

Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

● **Speiser, Andreas: Die geistige Arbeit.** (Wissenschaft und Kultur. Bd. 9.) Basel, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1955. 207 S. geb. Fr. 19,25 (DM 19,25).

Das Buch ist eine Sammlung von Reden und Aufsätzen, die sich dem Inhalte nach eng berühren. So etwas ist immer eine mißliche Sache. Überschneidungen sind kaum zu vermeiden; aber was schlimmer ist: das einzelne Stück, das in einer Zeitschrift oder auf einem Symposium zwischen andersartigen stand und sich von ihnen abhob, verliert in diesem Zusammenhang mit gleichartigen seine ursprüngliche Einheit. Das ist dann auch der Haupteindruck (und eigentlich ein falscher), daß der Verf., wenn er sich äußert, immer wieder seine Lieblingsgedanken wahllos nebeneinander setzt. Die Mathematik, die in jedem Stück mitspricht, erscheint dabei immer wieder unter demselben Gesichtswinkel; wenn von ihrem kulturellen Werte die Rede sein sollte, sind es entweder die ebenen und räumlichen Gruppen oder ist es die platonische Eins, die die Mathematik verkörpert. Oder wenn der Kunst gedacht wird, sind es gewisse vom Verf. mit viel Liebe aufgesuchte, aber auch übertrieben gehätschelte Beziehungen zur Gruppentheorie, um die es sich dreht. Andererseits wird man auch immer wieder überrascht von originellen Wendungen, wie z. B. den vier Biographien, mit denen das Buch anhebt, der Analyse des Anselmens und des Leibnizschen Gottesbeweises, einer Interpretation des Phaidon, der Analyse eines Stückes von Nietzsche, manchem in dem Aufsatz über „Freiheit“, usw. — Ein Buch, das man nicht (wie der Ref.) hintereinander auslesen sollte.

H. Freudenthal.

● **Taton, René: Causalités et accidents de la découverte scientifique. Illustration de quelques étapes caractéristiques de l'évolution des sciences.** (Evolution des Sciences No. 6.) Paris: Masson et Cie. 1955, 171 p.

Verf. beschreibt in sehr anregender Weise das Entstehen und das historische Schicksal einer Reihe von Entdeckungen aus den verschiedensten Wissensgebieten. Dabei wird auf erkenntnistheoretische und methodische Momente einerseits, und auf psychologische Umstände andererseits stets hingewiesen. Verf. vermeidet zugunsten des Buches ein fachlich zu detailliertes Eingehen auf Einzelfragen; trotzdem sind die gegebenen Erklärungen klar gefaßt und die historischen Angaben sachgetreu und objektiv gehalten. Eine Reihe von sehr guten Aufnahmen erhöhen den Wert des Buches.

G. H. Müller.

● **Clifford, William Kingdon: The common sense of the exact sciences. Edited and with a preface by Karl Pearson.** Reprint. New York: Dover Publications, Inc. 1955. LXVI, 249 p. 123 Fig. \$ 1,60.

Sechs Jahre nach dem frühen Tod von William K. Clifford (1845—1870) erschien das vorliegende Buch zum ersten Male. Es wurde von Karl Pearson, einem bekannten englischen Mathematiker und Erbforscher, aus Cliffords Nachlaß herausgegeben und mit pietätvoller Behutsamkeit und feinsinniger Einfühlung in seine Denk- und Darstellungsweise ergänzt. Schon im Oktober 1886 erschien eine dritte, im wesentlichen unveränderte Auflage. Später (1889) wurde das Buch von James R. Newman, mit Fußnoten und einer Biographie Cliffords versehen, erneut herausgegeben. Die vorliegende amerikanische Ausgabe ist ein unveränderter Abdruck der durch ein Vorwort von Bertrand Russell bereicherten englischen Ausgabe von 1946. Sie enthält neben diesem originellen Vorwort (S. V—X) die ausführliche biographische Einleitung Newmans (S. XV—LXII), die mit einer liebe-

vollen Würdigung des Mathematikers und Philosophen Clifford einen interessanten Beitrag zur Geschichte der Mathematik in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts verbindet, sowie das Vorwort Pearsons von 1885, in dem die Entstehung des Werkes geschildert wird (S. LXIII—LXVI). Dann folgt das Werk selbst mit seinen fünf Kapiteln Zahl, Raum, Größe, Lage, Bewegung (S. 1—243). Den Abschluß bildet eine Bibliographie der wichtigsten mathematischen und philosophischen Schriften Cliffords. — Die 5 Kapitel geben mit unübertrefflicher Klarheit und Exaktheit einen Einblick in die Grundlagen und in alle wesentlichen Begriffe und Vorstellungen der Mathematik und der elementaren Bewegungslehre. Verf. versteht es ausgezeichnet, schwierige Gedankengänge anschaulich und verständlich zu machen, ohne der logischen Strenge unerlaubte Opfer zu bringen. Die Einordnung von Begriffen und Gebilden wie Zahl, Operation, Dreieck, Kreis, Kegelschnitt, Kurve höherer Ordnung, Verhältnis, Fläche, Volumen, Vektor, Logarithmus, Krümmung, Funktion, Differentialquotient usw. in die 5 genannten Oberbegriffe zeugt von höchster Originalität, überlegener Zusammenschau, größtem didaktischem Geschick und wahrhaft prophetischer Einsicht. Obwohl seit Cliffords Tod Mathematik und Physik große Fortschritte gemacht haben, könnte das, was in diesem Buche steht, heute kaum besser dargestellt werden. „Was über das Verhältnis von Geometrie und Physik gesagt wird, steht völlig im Einklang mit Einsteins Gravitationstheorie, die 36 Jahre nach Cliffords Tod erschien“ (Russell). — Das Buch ist für Schüler der Oberstufe der Höheren Schulen verständlich. Studierende der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Philosophie können wertvolle Einsichten aus ihm gewinnen. Es kann jedem, der eine allgemeine Einführung in modernes naturwissenschaftliches und mathematisches Denken sucht, empfohlen werden. In den englisch sprechenden Ländern scheint es weit verbreitet zu sein. Eine deutsche Ausgabe ist mir nicht bekannt.

E. Löffler.

• Péter, Rózsa: Das Spiel mit dem Unendlichen. Mathematik für Außenstehende. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1955, 278 S. geb. DM 9,80.

A sociological feature of the present century is that mathematicians have begun to feel lonely; they desire to share their enthusiasms with a wider public. Nor is this an unimportant matter. Scientific and technical developments are reducing the need for unskilled labour and vastly increasing the demand for highly qualified people. Scientific and mathematical literacy need to become as widespread as ordinary literacy. To this challenge educational systems respond with creaking and groaning. Few teachers have yet developed the necessary skills. Professor Peter's book is a brilliant contribution towards this change. She writes, „The decisive thing for me, in mathematics, is what I feel about it; this is my link with the writer and artist.“ Indeed, one aim of the book was to help a writer, who said that his creative powers of expression were restricted by his ignorance of mathematical ideas. Mathematics is presented as a game, offering riddles that the mind wants to explore. But it is not a lazy game; like all good players, a mathematician delights to overcome difficulties. A truly modern freedom is shown in the order of treatment; graphs, arithmetic progressions, topology, Pascal's triangle, squaring $(a + b)$ is an unorthodox but perfectly feasible sequence, occurring in Part I. Part II, „Die schöpferische Form“, deals with extensions of number — negative numbers, vectors, fractions, infinite sequences, real numbers, fractional indices — and calculus. Part III, „Selbstkritik der reinen Vernunft“, gives an account of the paradoxes of set theory, and the formalist view of their resolution. Intuitionists are firmly rebuked. This section may well interest mathematicians as well as teachers and general readers. The spirit of the book throughout is rigorous. In the author's words, one must know „to what extent one can simplify without falsifying“. This aim has been admirably achieved. Compressing so many mathematical ideas into such small space must involve difficulties. I felt that the notes on sine and cosine in section 14

were perhaps insufficient to carry the weight of $e^{i\theta}$ in section 15, and that some references to projective geometry were a little hurried. But in general the book has remarkable clarity; in fact, every chapter had to receive the approval of a non-mathematical friend of the author. Written in 1943, this book was not published until later, owing to the war.

W. W. Sawyer.

● Transactions of the symposium on computing, mechanics, statistics and partial differential equations. Vol. II: Symposium on Applied Mathematics held at the University of Chicago April 29–30, 1954. New York — London: Interscience Publishers, Inc. 1955. 216 p. \$ 5,00.

Diese Transactions sind erschienen als Commun. pure appl. Math. 8, Heft 1 (1955).

● Dubnov, Ja. S.: Fehler in geometrischen Beweisen. (Populäre Vorlesungen über Mathematik. Heft 2.) 2. Aufl. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1955. 68 S. R. 0,95 [Russisch].

Das vorliegende Heft enthält 15 Beispiele fehlerhafter Beweise, die im allgemeinen bekannt sind und sich z. T. auch in dem Heft: „Lietzman-Trier, Wo steckt der Fehler, Leipzig 1927“ finden. Alle Beispiele beziehen sich auf die Geometrie. Die ersten 10 Beispiele bringen z. B. die bekannten Trugbeweise für das Parallelenaxiom, falsche Flächenberechnungen oder den Satz von der Gleichschenkllichkeit aller Dreiecke. Die letzten 5 Beispiele beruhen auf falschen Grenzübergängen nach Art des bekannten Schwarzschen Zylinders, der auch behandelt wird. Nach Behandlung der falschen Beweise werden die richtigen Lösungen der Paradoxa gegeben. Es fehlen aber auch nicht vorherige Mahnungen an den Leser, diese richtigen Lösungen selber zu finden, sowie Hinweise auf die verschiedenen Fehlermöglichkeiten wie falsche Zeichnung, nicht volle Berücksichtigung aller Lagemöglichkeiten, logische Fehler und Ähnliches.

W. Burau.

Geschichte.

Waerden, B. L. van der: Les mathématiques appliquées dans l'antiquité. Enseignement math., II. Sér. 1, 44–55 (1955).

Verf. greift vier schlagende Beispiele heraus, aus denen die Anwendung der Mathematik im Altertum sehr deutlich wird: 1. Er erwähnt die Konstruktion des Tunnels der Insel Samos durch Eupalinos aus Megara (etwa 530 v. Ch.), wie sie uns von Herodot (111, c. 60) überliefert ist, und sieht es als wahrscheinlich an, daß diese Konstruktion nach der von Heron von Alexandrien beschriebenen Methode (in der Dioptra) geleistet wurde. Die Erfindung der Methode ist nach Verf. genial; aber für die Abschätzung ihrer Genauigkeit benötigte man keine größeren geometrischen Kenntnisse, der gesunde Menschenverstand allein genügte. 2. Vitruv nach hat in Athen ein gewisser Agatharchos um 450 v. Ch. einen Leitfaden über Perspektive herausgegeben, die man scenographie im Altertum nannte. Sie ist erst aus den Bedürfnissen des Theaters entstanden. Auf Agatharchos folgten laut Vitruv Demokrit und Anaxagoras, die, wie man glauben darf, der Perspektive eine theoretische Grundlage gegeben haben. Die Wandfiguren von Pompeji sind auf Grund perspektivischer Regeln gemalt. Es ist wahrscheinlich, daß diese Regeln ähnlich den Regeln der Perspektive in den griechischen Theatern sind. 3. Die stereographische Projektion ist eine zentrale Projektion der Kugeloberfläche auf die äquatoriale Ebene, ausgehend vom Südpol der Kugel. Die Haupteigenschaft der stereographischen Projektion ist, daß ein Kreis in einen Kreis übergeht. Dieser Satz stützt sich auf den Satz I, 5 der Kegelschnitte von Apollonius. Der Astronom Ptolemaeus verwendet in seinem Planisphaerium diese stereographische Projektion. Hipparch (etwa 130 v. Ch.) hat aber früher diese Projektion in einer uns verlorengegangenen Schrift erwähnt. Das Astrolabium ist eine Vorrichtung, die auf dieser Methode der Projektion beruht. 4. Vitruv beschreibt eine Wasseruhr, die sich auf die Verwendung

der stereographischen Projektion stützt. Bruchstücke einer solchen Wasseruhr hat man in Salzburg gefunden, das im Altertum römischer Militärstützpunkt war. Albert Rehm hat auf Grund dieser Bruchstücke eine Rekonstruktion der Wasseruhr hergestellt. Fünf Figuren und vier Tafeln erleichtern das Verständnis der meisterhaften Darstellung.

E. Stamatis.

Neugebauer, O.: Apollonius' planetary theory. Commun. pure appl. Math. 8, 641—648 (1955).

Verf. erläutert das von Ptolemaios (Almagest XII, 1) überlieferte elegante Theorem des Apollonios von Pergä zur Bestimmung der scheinbaren Stillstände der Planeten am Epizykel- bzw. Exzentermodell. Apollonios war offenbar völlig vertraut mit der Äquivalenz der verschiedenen Modelle und der Relativität der geozentrischen und heliozentrischen Auffassung.

H. Hermelink.

Juškevič, A. P.: Über die Leistungen der chinesischen Gelehrten auf dem Gebiet der Mathematik. Istoriko-mat. Issledovanija 8, 539—572 (1955) [Russisch].

Verf. gibt unter Beigabe charakteristischer Beispiele eine Übersicht über die Schöpfungen chinesischer Mathematiker für die Zeit vom 2. Jhdt. v. Chr. bis zum 14. Jhdt., wobei sich gegenüber dem bisher Bekannten auch einiges Neue ergibt, da ihm die chinesisch geschriebenen, im Westen unbekannten Arbeiten einheimischer Mathematikhistoriker zur Verfügung standen, wie die „Geschichte der Mathematik in China“ von Ching Bao-chung (1936) oder die von Li Yang (1937). Als neu sei erwähnt, daß Yang Hui (13. Jhdt.) die Summierung der Quadratzahlen auf dieselbe geometrische Methode durchführt, wie sie J. E. Hofmann rekonstruiert hat (s. O. Becker, Grundlagen der Mathematik, S. 36f., dies. Zbl. 55, 242), ferner daß der Valentin Ottosche Wert $355/113$ für π (16. Jhdt.) bei Tsu Ch'ung-chih (5. Jhdt.) schon vorkommt (vgl. dagegen O. Becker-J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik, S. 136, dies. Zbl. 43, 241). Verf. untersucht auch die bis jetzt noch nicht lösbare Frage nach den gegenseitigen Beziehungen zwischen China, Babylon und Indien. Hier darf ergänzt werden, daß auch in der altbabylonischen Mathematik negative Zahlen — genau wie in China — als Ergebnis formaler Verallgemeinerungen (bei den „Serientexten“) auftreten. Zum Schluß berichtet der Verf. über die Tätigkeit moderner chinesischer Mathematiker. Es sind von ihnen in den Jahren 1928—1953 nicht weniger als 1100 Arbeiten aus den verschiedenen Gebieten der Mathematik (Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Funktionentheorie, Abstrakte Algebra, Differential- und Integralgleichungen, Topologie usw.) veröffentlicht worden. — Den vorliegenden Aufsatz hat das Institut für Geschichte der Naturwissenschaften und Technik (Akad. d. Wiss. der UdSSR) in einem Sammelband: „Aus der Geschichte der Wissenschaften und Technik in China“ (Moskau 1955, S. 130—159) fast unverändert abgedruckt. Neu ist hier ein Hinweis auf das Vorkommen des zahlen-theoretischen Problems der „großen Erweiterung“ von Sun-Tsu (3. Jhdt.) im „Algorismus Ratisbonensis“ (15. Jhdt.).

K. Vogel.

Boyer, Carl B.: Post-Cartesian analytic geometry. Scripta math. 21, 101—135 (1955).

L'Oeuvre „La Géométrie“ de Descartes est bien caractérisé par les paroles de Gino Loria [Revue Métaphys. Morale 44, 199—220 (1937)]: „En s'élevant ensuite à des considérations plus générales, il discute quelles sont les lignes qui peuvent être acceptées en géométrie, et arrive à la conclusion que ce sont celles dont on peut trouver l'équation rapportée à deux droites fixes; on peut alors en déterminer les diamètres, les axes, le centre, etc., et imaginer des procédés pour les construire: c'est tout un magnifique programme, qui donne de la matière au travail de plusieurs générations de mathématiciens“. Par cette excellente interprétation du sujet de „La Géométrie“ Gino Loria avait désavoué ses propres tentatives ainsi que celles de G. Milhaud, qu'il ne fallait pas considérer Descartes comme créateur de la Géométrie Analytique. L'A. donne une exposition

développée de l'évolution de la Géométrie de Descartes dans les écrits de ses successeurs. Cette analyse est soigneusement complétée par les Notes bibliographiques documentant l'exposé et permettant de puiser les informations dans les sources mêmes citées. C'est avec des détails intéressants que sont exposées les difficultés qu'avaient offert aux savants les notions des racines négatives. Mais l'A. ne fait pas allusion à d'autres difficultés comme celles de représentation graphique des coniques du problème de Pappus qui se rencontrent chez Descartes lui-même et chez ses commentateurs: Fr. Schooten, troisième éd. „Renati Descartes Geometria“ Amstelodami MDCLXXXIII et dans les volumineux commentaires sur la Géométrie de M. Descartes par Claude Rabuel à Lyon MDCCXXX que l'A. ne cite point (v. N. Saltykow, ce Zbl. 22, 3). L'A. atteint le plus d'éloquence, en analysant l'oeuvre de John Wallis, qui avait beaucoup apporté à la Géométrie de Descartes. Il avait précisément démontré qu'une équation du second degré à deux variables ne peut que définir une section conique, incluant l'ensemble des deux droites. Ce beau résultat fut ensuite généralisé par L. Euler sur les surfaces quadriques. Or, l'A. ne reste que dans le plan. Il serait bon d'ajouter le nom de I. Newton qui avait démontré (Principes mathématiques de la philosophie naturelle, premier livre, cinquième partie, lemmes XVII, XVIII et XIX) que les coniques de Descartes sont circonscrites au quadrilatère formé par les quatre droites de Pappus. Il est donc opportun de formuler une réserve sur les Notes 161 et 162, sous marge du t. III de Géométrie algébrique plane (Encyclopédie des Sciences mathématiques 1911, p. 59. Paris). Le résultat que l'on vient de citer n'est donc pas une généralisation du théorème connue de Pappus, mais son théorème inverse.

N. Saltykow.

Bompiani, Enrico: La nozione di contatto nel carteggio di P. Ruffini e gli elementi differenziali. Archimede 7, 145—149 (1955).

In dem kürzlich herausgegebenen Briefwechsel von Ruffini mit Mathematikern seiner Zeit (dies. Zbl. 55, 241) findet sich ein Brief von G. Saladini (Verf. eines 1760 erschienenen Lehrbuches „Elementa Geometriae infinitesimorum“) vom September 1805, in dem er Ruffini seine Ansichten über die Natur der Berührung zweiter Ordnung zwischen zwei Kurven mitteilt. Aus einem zweiten Brief von Saladini (Mai 1806) geht hervor, daß beide sich nicht haben einigen können („sconvenienza“). Verf. kommentiert die Situation und führt schließlich in gewissem Sinne ähnliche Situationen aus der Geschichte der Mathematik an.

H. Schwerdtfeger.

Popken, J.: Einige Perlen aus dem Werk von Gauss. Euclides, Groningen 30, 282—292 (1955) [Holländisch].

Im Rahmen des Gauß-Gedächtnisjahres werden seine Beiträge zu der Dezimalbruchentwicklung, der Primzahlzerlegung und dem arithmetisch-geometrischen Mittel einleitend besprochen.

W. Verdenius.

● **Kagan, V. F.:** Lobačevskij und seine Geometrie. Allgemeinverständliche Skizzen. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1955. 303 S. R. 6,45 [Russisch].

Das vorliegende Buch ist eine Sammlung von einer Rede und fünf Aufsätzen des bekannten Mathematikers V. F. Kagan (1869—1953), der Zeit seines Lebens viel zur Verbreitung von Kenntnissen in der nichteuklidischen Geometrie und über ihre Begründer in Rußland beigetragen hat. Die fünf Aufsätze, die den weitaus größten Raum im Buch einnehmen, betreffen folgende Themen: 1. „Die Vorgeschichte der NE-Geometrie von Euklid bis zum 19. Jahrhundert“ 2. „Lobačevski und seine Stellung in der Weltwissenschaft“. Hierin findet sich eine ausführliche Geschichte der Entdeckung der NE-Geometrie durch Lobačevski und eine Schilderung der äußeren Umstände seines Lebens, aber auch der axiomatischen und philosophischen Bedeutung seiner Leistungen. 3. „Die Elemente der NE-Geometrie bei anderen Geometern“. Hierin wird nochmals auf die Leistungen von Saccheri, Schweikart,

Lambert und Gauß eingegangen. 4. „J. Bolyai“. Dieser Artikel stellt das Leben und Wirken von Vater und Sohn Bolyai ausführlich dar. 5. „Aufbau der NE-Geometrie bei Lobačevski, Gauß und Bolyai“. Zu Beginn des Buches ist eine Rede wiedergegeben, die Kagan im Jahre 1926 anlässlich der 100-Jahrfeier der Entdeckung der NE-Geometrie in Kasan gehalten hat. Alle übrigen Beiträge sind aber erst nach 1945 von Kagan zu verschiedenen Gelegenheiten verfaßt worden.

W. Burau.

Levi, Beppo: *L'opera matematica di Giuseppe Peano.* In memoria di Giuseppe Peano 9—21 (1955).

Ascoli, Guido: *I motivi fondamentali dell'opera di Giuseppe Peano.* In memoria di Giuseppe Peano 23—30 (1955).

Segre, Beniamino: *Peano ed il Bourbakismo.* In memoria di Giuseppe Peano 31—39 (1955).

Barone, Francesco: *Un'apertura filosofica della logica simbolica Peaniana.* In memoria di Giuseppe Peano 41—50 (1955).

Geymonat, Ludovico: *I fondamenti dell'aritmetica secondo Peano e le obiezioni „Filosofiche“ di B. Russell.* In memoria di Giuseppe Peano 51—63 (1955).

Boggio, Tommaso: *Il calcolo geometrico di Peano.* In memoria di Giuseppe Peano 65—69 (1955).

Cassina, Ugo: *Sul „Formulario Mathematico“ di Peano.* In memoria di Giuseppe Peano 71—102 (1955).

Carruccio, Ettore: *Spunti di storia delle matematiche e della logica nell'opera di G. Peano.* In memoria di Giuseppe Peano 103—114 (1955).

Übersicht über die Arbeitsgebiete und spezifischen Leistungen Giuseppe Peanos (1858—1932) unter besonderer Berücksichtigung der Rolle der „Formulaire de mathématiques“.

G. H. Müller.

Taylor, Geoffrey: *George Boole 1815—1864.* Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 57, 66—73 (1955).

Rhees, Rush (edited by): *George Boole as student and teacher. By some of his friends and pupils.* Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 57, 74—78 (1955).

Hackett, Felix E.: *The method of George Boole.* Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 57, 79—87 (1955).

Thomas, Ivo: *Boole's concept of science.* Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 57, 88—96 (1955).

Feys, Robert: *Boole as a logician.* Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 57, 97—106 (1955).

Feys, Robert: *Boolean methods of development and interpretation.* Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 57, 107—112 (1955).

Verf. stellt das Boolesche Problem der „Entwicklung“ einer logischen Formel [im einfachsten Falle: $f(x) = f(1) \cdot x + f(0) \cdot (1 - x)$] dar, speziell die Schwierigkeiten, die durch das Auftreten uninterpretierbarer Formeln, wie $x + x$, entstanden. Obwohl die Boolesche Logik inzwischen durch die moderne Logik der Quantoren ersetzt worden ist, sind die Booleschen Ansätze wichtig geblieben für die moderne Algebra, z. B. mit den Booleschen Ringen.

P. Lorenzen.

Rosser, J. Barkley: *Boole and the concept of a function.* Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 57, 117—120 (1955).

Verf. stellt den neuzeitlichen Funktionsbegriff — mit „ $f(x)$ “ als Bezeichnung für einen Ausdruck, der „ x “ enthält — dem modernen Funktionsbegriff gegenüber — mit f als rechtseindeutiger Klasse von Paaren und „ $f(x)$ “ als Bezeichnung für dasjenige y mit $\langle x, y \rangle \in f$. Er beschreibt die Rolle, die Boole für den Übergang zum modernen Begriff gespielt hat, speziell durch die symbolische Behandlung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Hier wurde zuerst die

Trennung von „ $f(x)$ “ in „ f “ und „ x “ vollzogen, nämlich durch die Trennung von „ dy/dx “ in „ d/dx “ und „ y “.

P. Lorentzen.

● Gordevskij, D. Z.: K. A. Andrejev, ein hervorragender russischer Geometer. Charkov: Verlag der Charkover Staatlichen A. M. Gorkij-Universität 1955. 47 S. R. 1,30 [Russisch].

Der heute fast vergessene russische Mathematiker K. A. Andrejev lebte von 1848 bis 1921 und wirkte erst in Charkov und in späteren Jahren hauptsächlich in Moskau. Er gehört zu den Förderern der synthetischen Geometrie; seine außerhalb Rußlands kaum bekannt gewordenen Arbeiten beziehen sich hauptsächlich auf die Erzeugung von Kurven 3. und 4. Grades aus gegebenen Punkten, die Polarentheorie, Schließungsprobleme von Kegelschnitten und dgl.. Sein nicht sehr umfangreiches Schriftenverzeichnis umfaßt außerdem einige Lehrbücher über Geometrie. Der vorliegenden kleinen Schrift sind noch einige Gutachten über Andrejev sowie Briefe von ihm an bedeutende russische Mathematiker seiner Zeit beigelegt worden.

W. Burau.

Kakutani, Shizuo: Hirotada Anzai (1919—1955). Osaka math. J. 7, I—II (1955).

Nachruf mit Schriftenverzeichnis.

Knaster, B.: Samuel Dickstein zum Gedächtnis (1851—1939). Prace mat. 1, 5—8 (1955) [Polnisch].

Verzeichnis der Schriften Samuel Dicksteins von 1917 an. Prace mat. 1, 9—12 (1955) [Polnisch].

Papapetrou, Achilles: Albert Einstein zum Gedächtnis. Forsch. Fortschr. 29, 188—190 (1955).

Baltá Eliás, José: Einstein, universeller Physiker. Revista Acad. Ci. Madrid 49, 103—114 (1955) [Spanisch].

Beck, Guido: Ricardo Gans (7. 3. 1880—28. 6. 1954). Revista Un. mat. Argentina 16, 150—158 (1955) [Spanisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Tsuruichi Hayashi (1873—1935). J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. Math. 6, 1—2 (1955).

Popa, Ilie: Alexandru und Vera Myller. Acad. Republ. popul. Romîne, Fil. Jași, Studii Cerc. ști., Ser. I 6, Nr. 1/2, 1—12 (1955) [Rumänisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Reymond, Arnold: A la mémoire de Pierre Sergescu (1893—1954). Enseignement math., II. Sér. 1, 21—29 (1955).

● Naumov, J. A.: D. M. Sincov — sein Leben, seine Forschungs- und Lehr-tätigkeit. Charkov: Verlag der Staatlichen A. M. Gorkij-Universität zu Charkov 1955. 72 S. R. 3,00 [Russisch].

Dmitrij Matvejvič Sincov lebte 1867—1947. In seiner Jugendzeit studierte er in Kazan und verbrachte dort und in Dnepropetrovsk die ersten Jahre seiner wissenschaftlichen Tätigkeit, in die auch Auslandsreisen fielen. Ab 1903 bis zu seinem Tode wirkte er jedoch ausschließlich an der Universität Charkov. Hier entfaltete er eine vielseitige Lehr-, Vortrags- und Organisationstätigkeit an der Universität, dem math. Institut, der dortigen Math. Gesellschaft und Akademie. Großes Interesse brachte er stets der Verbesserung des Schulunterrichts in Rußland entgegen, auch galt er als bester Kenner der Mathematikgeschichte, insbesondere der seines Landes. Die eigenen Arbeiten Sincovs betrafen erst die Theorie der Komplexe im Sinne von A. Clebsch, später hauptsächlich die Differentialgeometrie der Lösungskurven einer Pfaffschen Gleichung. Das ausführliche Literaturverzeichnis (267 Nrn.) umfaßt aber auch eine Fülle von Rezensionen, Nekrologen, Vorlesungen und dgl., was auf die oben angedeutete vielseitige Tätigkeit dieses Mannes hindeutet.

W. Burau.

Drobot, S.: Das mathematische und naturwissenschaftliche Werk Jan Śnie-deckis. Wiadom. mat. 1, Nr. 1, 95—111 (1955) [Polnisch].

Agostinelli, Cataldo; Carlo Somigiana. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 650—656 (1955).

1860—1955. Nachruf und wissenschaftliche Würdigung.

Jitsuo Yoshikawa (1878—1915). J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. Math. 6, 3—4 (1955).

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

● **Pap, Arthur:** Analytische Erkenntnistheorie. Kritische Übersicht über die neueste Entwicklung in USA und England. Wien: Springer-Verlag 1955. VIII, 242 S. DM 24,—.

Kapitelübersicht: I. Das empirische Sinnkriterium. II. Wirklichkeitssätze, Wahrnehmungssätze und der Phänomenalismus. III. Wahrheit und Wahrscheinlichkeit: (Die semantische Definition der Wahrheit; Kernfragen der Wahrscheinlichkeitstheorie; Das Induktionsproblem). IV. Kausalität und Gesetzmäßigkeit: (Die Regularitätstheorie; Kausalität und Determination; Dispositionsbegriffe, subjunktive Konditionalsätze und der Begriff des Naturgesetzes). V. Erklärung: (Logische Analyse des Begriffs der Erklärung; Teleologische Erklärung, Emergenz; Der Physikalismus). VI. Logische Notwendigkeit: (Analytische und apriorische Wahrheit; Mathematik, Logik und Erfahrung; Die linguistische Theorie; Der Begriff der Analyse). — Dieses Buch bietet sozusagen ein „Gesamtreferat“ über die wichtigsten Theorien und Versuche, die etwa nach dem Aufblühen der Wiener Schule bis in unsere Zeit in der Philosophie der Wissenschaften zur Diskussion gestellt wurden. Im Hinblick auf das riesige Material, das aus der erwähnten (und nicht erwähnten) Literatur dazu verarbeitet wurde, ist dem Verf. hohe Anerkennung zu zollen. — Das Buch stellt ferner eine geradezu enorme Sammlung von Kritiken dar. Der Verf. läßt praktisch keinen Ansatz und kaum eine Kritik eines Ansatzes unkritisiert passieren, und er zeigt dabei eine große logische Schärfe des Denkens. Insofern kann dem Buch eine wichtige Funktion zukommen: im Hinblick (1) auf die Ausschaltung verfehlter Versuche, (2) auf eine gesteigerte logische und methodische Bewußtheit und (3) auf einen gewissen Zwang zur Aufstellung umfassenderer Theorien, da Einzelansätze kritikanfälliger zu sein scheinen. — Doch zeigen die Schwierigkeiten, zu denen so viele ganz heterogene Ansätze der Philosophie der Wissenschaften bei der Kritik des Verf. führen, daß die logische Analyse zu weit getrieben werden kann und daß man wohl an der Anwendung der logischen Analyse bei einem nichtlogischen Wissensgebiet selbst eine methodische Kritik üben kann, — vor allem, wenn dieses Gebiet noch in der Entwicklung ist. — Enttäuschend wirkt der allzu lose Zusammenhang des Buches — trotz aller Vor- und Rückbezüge —, der Mangel jedes Versuches — auch auf die Gefahr hin, kritisiert zu werden — wenigstens einer Synthesis des Haltbareren, und schließlich die Verkennung des Tatbestandes, daß bei der Philosophie der Wissenschaften, und sicher auch bei Erkenntnistheorie — soweit es sich nicht um praktische Methodologie handelt — auch philosophische Ansätze wesentlich auftreten. Einer (vom logischen Standpunkt berechtigten) Kritik an solchen Ansätzen, mögen sie vielleicht auch unvollständig und dunkel zum Ausdruck gebracht werden, muß wohl eine Suche nach dem Gemeinten vorangehen; sonst läuft man Gefahr, — und diese besteht durchaus bei manchen Abschnitten dieses Buches, — nicht mehr zu wissen, von welchen Prämissen aus Kritik geübt wird, und in welchem Sinne die in der Kritik gebrauchten Termini zu verstehen sind.

G. H. Müller.

Valpola, Veli: Ein System der negationslosen Logik mit ausschließlich realisierbaren Prädikaten. Acta philos. Fennica 9, 247 S. (1955).

Das Hauptanliegen des Verf. ist es, einen Prädikatenkalkül aufzustellen, der „zur Darstellung der Erkenntnis“ unter besonderer Berücksichtigung eines strengen empiristischen Standpunktes geeignet ist. Dazu wird in Teil I eine Reihe von Schwierigkeiten, die man in der Philosophie der Wissenschaften in den letzten Jahrzehnten diskutiert hat, erörtert. Es handelt sich dabei in erster Linie um die Interpretation von generellen Implikationen und von der Negation, sowie um die Definierbarkeit von Dispositionsprädikaten (z. B. „löslich“). Der Ref. kann sich bei den diesbezüglichen Erörterungen manchmal des Eindrucks nicht erwehren, daß es sich dabei um selbstgeschaffene Leiden handelt. Jedoch enthält der Teil I vom erkenntnistheoretischen Standpunkt manches Anregende und Wertvolle; allerdings kann man dem Verf. hinsichtlich seiner Ansichten über Axiomatik, die logischen Kalküle und allgemein die Grundlagenforschung in vielen Fällen nicht zustimmen. — Der in Teil II aufgestellte negationsfreie, typenfreie Kalkül, der in gewisser Weise nur solche Prädikate enthalten soll, die mindestens auf ein Objekt zutreffen, ist äußerst kompliziert und schwer übersehbar. Verf. sagt selbst in der Einleitung, daß sein Ergebnis auch als „eine Reductio ad absurdum der extremen empiristischen Prinzipien“ betrachtet werden kann. Hinsichtlich des genannten Kalküls bleibt für eine Beurteilung wohl eine klärende und vereinfachte Darstellung abzuwarten, die vor allem den Zusammenhang mit den bekannten Kalkülen weit deutlicher macht, als dies in der Arbeit geschieht. — Im allgemeinen dürfte ein Versuch einer Formalisierung des Erkenntnisinhaltes — falls ein solcher nicht eo ipso zum Scheitern verurteilt sein sollte — noch sehr sehr verfrüht sein, und es sind wohl vorsichtig tastende Ansätze für bekannte abgeschlossene Teilsysteme der Physik zunächst das Angemessene.

G. H. Müller.

• Koschmieder, Erwin: Ist das Symbolsystem der Logistik eine Sprache? (Münchner Stud. Sprachwiss. Heft 6) München: J. Kitzinger 1955. 82 S.

Die Symbolsysteme der mathematischen Logik sind nicht Sprachen im Sinne der allgemeinen Sprachwissenschaft, folglich auch nicht formalisierte Sprachen, sondern Schriften; denn das Wesentliche an einer Sprache im sprachwissenschaftlichen Sinne ist dies, daß sie aus Lauten besteht, aus denen Ausdrucksmittel erzeugt werden können, die der Mitteilung dienen. Hiervon wird in der Tat abstrahiert, wenn die Symbolsysteme der mathematischen Logik mit den möglichen Erweiterungen durch außerlogische Konstanten als formalisierte Sprachen bezeichnet werden. Man wird sie genauer als formalisierte Schriftsprachen bezeichnen müssen, und auch dies nach Meinung des Ref. erst dann, wenn es gelungen ist, die aus den Ausdrucksmitteln einer solchen Symbolik erzeugbaren linearen Zeichenreihen als Ausdrucksmittel einer Sprache der Logik zu interpretieren. Auf diesen wesentlichen Vorbehalt ist der Verf. nicht eingegangen. Es scheint mir, daß eine durch eine solche Interpretation gewonnene Sprache der Logik auch durch die ihr wesentlich angehörigen Variablen, auf denen ihr formaler Charakter beruht, den Anforderungen an eine Wortsprache hinreichend genügt, um die ihr zugrunde liegende Symbolik auf die Stufe zu heben, auf der sie sinnvoll als eine formalisierte Schriftsprache charakterisiert werden kann.

H. Scholz.

• Skolem, Th., G. Hasenjaeger, G. Kreisel, A. Robinson, Hao Wang, L. Henkin and J. Los: Mathematical interpretation of formal systems. (Studies in Logic and the Foundation of Mathematics.) Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1955. VIII, 113 p. f. 12,—, \$ 3,25.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln besprochen.

Matsumoto, Kazuo: Reduction theorem in Lewis' sentential calculi. Math. Japonicae 3, 133—135 (1955).

Unter Benutzung von Ergebnissen von McKinsey und Tarski (dies. Zbl. 37, 294) zeigt Verf. für die Modalsysteme S_4 und S_5 (vgl. Lewis and Langford, „Symbolic Logic“, New-York 1932): Eine Formel A ist beweisbar in S_5 dann und nur dann, wenn $\sim \diamond \sim \diamond \sim \diamond \sim A$ in S_4 beweisbar ist.

G. H. Müller.

Rasiowa, H.: A proof of ε -theorems. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 299—302 (1955).

The author outlines a new simple proof of ε -theorems. The proof is based on the interpretation of logical formulas as some mappings whose values are in Boolean algebras. The author notices that this proof can be generalized to the case of some non-classical functional calculi.

R. Sikorski.

Izumi, Yoshihisa et Tôru Wada: Sur la notion de la perfection. Tôhoku math. J., II. Ser. 7, 132—135 (1955).

The authors attempt to prove some theorems concerning the relationship between truth-tables and formalizations. The notation is inadequately explained and the paper is very difficult to follow.

A. Rose.

Izumi, Yoshihisa: Sur le degré de la perfection. Tôhoku math. J., II. Ser. 7, 128—131 (1955).

Izumi claims to have disproved two theorems of the reviewer (this Zbl. 43, 8; 45, 296) but his argument appears to contain several errors. For example, it is claimed that the set of formulae satisfying the 3-valued tables

		y					y		
$x \sim y$		0	1	2	$x \approx y$		0	1	2
0		0	1	2	0		1	0	2
x 1		1	0	2	x 1		0	1	2
2		2	2	0	2		2	2	1

(presumably with 0 as the only designated truth-value) is identical with the set of tautologies constructed from \sim and \approx . In fact the tautology $(x \sim y) \sim ((z \sim x) \sim (z \sim y))$ takes the value 1 when x, y, z take the values 0, 1, 2 respectively. A. Rose.

Shen, Yuting: Two semantical paradoxes. J. symbolic Logic 20, 119—120 (1955).

Seien 1. WIJS, 2. b(A), 3. w(A) Abkürzungen für 1. den Redeteil „was ich jetzt sage“, 2. für „beweisbar (A)“, 3. für „widerlegbar (A)“. Verf. betrachtet folgende Sätze: $\rightarrow b(\text{WIJS})$, $b(\neg b(\text{WIJS}))$, $b(b(\neg b(\text{WIJS})))$, ..., $w(\text{WIJS})$, $b(w(\text{WIJS}))$, $b(b(w(\text{WIJS})))$, ..., die sich inhaltlich als paradox herausstellen.

G. H. Müller.

Popadić, Milan S.: A new formulation of the principle of induction. Fac. Philos. Univ. Skopje, Sect. Sci. natur., Annuaire 8 (1955), 29—31 und engl. Zusammenfassg. 32—33 (1955) [Serbo-kroatisch].

Let M, S, S_1, N be sets; let φ be a binary relation. This wording of Induction principle is proved (Proposition 2. 1): We have $M \subseteq N$, provided that 1. $S_{M \cap N} \cap S_1 \neq A, \{A\}$, 2. There exists a relation $\psi \in P\varphi$ such that $D\psi = S_M \setminus \{A, M\}$, $W_{S_{M \cap N} \setminus \{A, M\}} \psi \subseteq P(M \cap N)$. Here $S_A = S \cap P A$ ($P A$ = the class of all subsets of A). A binary relation in V is any set φ in V^2 ; $D\varphi$ (resp. $W\varphi$) is the class of first (second) components of all the $x \in \varphi$. For any class A , $D_A \varphi$ ($W_A \varphi$) is the class of all left (right) components of elements of φ whose right (left) components are in A . In the previous wording, S, S_1 and φ are called: induction system, basis of induction and inductor respectively. The ordered quadruple (M, S, S_1, φ) is „potential“ provided $\sim (W_{S_E \setminus \{A\}} \psi \subseteq P E)$ for each $\psi \in P\varphi$ such that $D_\psi = S_M \setminus \{A, M\}$, $E \subseteq M \cup \bigcap X$ ($X \in Z = W\psi \cup S_M \cap S_1$), $S_E \cap S \neq A, \{A\}$. In order that Proposition 2. 1 holds, it is necessary and sufficient that (M, S, S_1, φ) be potential and that the union of sets in Z contains M for every $\psi \in P\varphi$ with $D_\psi = S_M \setminus \{A, M\}$. [In the paper we read W_ψ instead of Z .]

D. Kurepa.

• Heyting, A.: Les fondements des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration. (Collection de Logique Mathématique, Série A, Nr. IX.) Paris: Gauthier-Villars 1955. 87 p. 1100 fr.

Traduction de Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie (ce Zbl. 9, 385) du même auteur. On a tenu compte des travaux intuitionnistes plus récents.

H. Freudenthal.

Brouwer, L. E. J.: The effect of intuitionism on classical algebra of logic. *Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A* **57**, 113—116 (1955).

Verf. gibt zunächst die philosophischen Voraussetzungen an, auf denen die Boolesche Aussagenlogik beruht, anschließend die für die intuitionistische Mathematik charakteristischen Abweichungen mit Gegenbeispielen gegen $A \vee \neg A$, gegen $\neg \neg A \rightarrow A$ und gegen $\neg A \vee \neg \neg A$. Auch die de Morganschen Formeln werden besprochen.

P. Lorenzen.

Griss, G. F. C.: La mathématique intuitioniste sans négation. *Nieuw Arch. Wiskunde*, III, **3**, 134—142 (1955).

Exposition des principes de la mathématique sans négation. *H. Freudenthal.*

Umezawa, Toshio: Über die Zwischensysteme der Aussagenlogik. *Nagoya math. J.* **9**, 181—189 (1955).

Seien p_i Aussagenvariable im intuitionistischen Aussagenkalkül H und M, P_n, R, Q_n, Q'_i die folgenden Disjunktionen: $M: p \vee \bar{p}$; $P_n: \bigvee_{i,j; i \neq j} p_i \rightarrow p_j$, ($i, j = 1, \dots, n$); $R_n: p_1 \vee p_1 \rightarrow p_2 \vee \dots \vee p_{n-1} \rightarrow p_n \vee p_n$; Q_n entstehe aus P_n durch Weglassung von $p_n \rightarrow p_{n-1}$; Q'_n entstehe aus Q_n durch Weglassung von $p_n \rightarrow p_{n-2}$. $HM, HP_n, HR_n, HQ_n, HQ'_n$ seien die aus H durch Hinzunahme von M, P_n, R_n, Q_n, Q'_n als Axiome hervorgehenden Systeme und K der klassische Aussagenkalkül. Verf. beweist ($n \geq 2$): $HP_n \supset HQ_{n+1} \supset HP_{n+1}$; $K \supset HP_n \supset H$; $Q'_{n+1} \supset Q_{n+1}$; $HR_{n-1} \supset HR_n \supset HP_2$; $HP_2 \supset HM$. Diese Ergebnisse dürfen wohl auf Grund der Untersuchungen von Gödel, Jaskowski, Tarski u. a. als im wesentlichen bekannt angesehen werden. — Auf die vom Verf. gestellte Frage, ob $HM \supset HP_2$ auch gilt, ist die Antwort negativ, wie P. Bernays (mündl. Mitteilung) unter Verwendung einer 6-stelligen Matrix zeigte.

G. H. Müller.

Algebra und Zahlentheorie.

Gruppentheorie:

Furstenberg, Harry: The inverse operation in groups. *Proc. Amer. math. Soc.* **6**, 991—997 (1955).

It has been noted before (e. g. P. Lorenzen, this Zbl. **22**, 206) that groups may be defined in terms of right-division instead of multiplication. Writing $a \circ b$ for $a b^{-1}$, the author shows the following set of axioms to be sufficient (this is the same as the second set given by Lorenzen loc. cit.): (1) for any a, b the element $a \circ b$ is defined and unique; (2) $(a \circ c) \circ (b \circ c) = a \circ b$; (3) to given a, b there exists an element x such that $a \circ x = b$. He then calls half-group the system obtained by dropping the third axiom. Thus half-groups are groupoids satisfying the one law (2). The prime object of the note is the complete description of the structure of half-groups. They are in a simple way „extensions“ of half-groups in which every element is a product $x \circ y$, and these latter are essentially direct products of a group and a half-group of a very special kind. It should be noted that the term sub-half-group is used for a sub-groupoid, that is a sub-half-group in the usual sense, fulfilling the additional requirement that it contains all idempotent elements.

Hanna Neumann.

Yamada, Miyuki: A note on middle unitary semigroups. *Kodai math. Sem. Reports* **7**, 49—52 (1955).

Cette note gravite autour de la notion d'unité médiane („middle unit“); cette notion n'est pas définie dans le papier et il n'est fourni aucune référence à un travail la définissant; le fait qu'aucune démonstration ne soit donnée ne facilite pas le travail du lecteur qui doit d'abord deviner cette définition. Dans un demi-groupe, on appellera unité médiane un élément e tel que l'on ait $x e y = x y$ quels que soient x et y . L'A. considère d'abord les demi-groupes D dans lesquels l'ensemble M

des unités médianes est net à droite et net à gauche (c'est-à-dire tel que, pour tout $x \in D$, il existe x' et x'' vérifiant les relations $xx' \in M$ et $x''x \in M$). Les groupes à gauche, les groupes à droite et les produits d'un groupe à gauche par un groupe à droite constituent des exemples de ces demi-groupes. L'A. énonce plusieurs lemmes qui reviennent essentiellement à dire que M est un sous-demi-groupe fort et symétrique (au sens de P. Dubreil, ce Zbl. 26, 196; ou Algèbre, tome I, deuxième édition, p. 249, ce Zbl. 57, 250). L'A. considère une équivalence, qui n'est autre que l'équivalence principale associée au complexe M (cf. P. Dubreil, loc. cit.), et cette équivalence lui permet de déterminer complètement la structure des demi-groupes considérés: on les obtient en adjoignant à chaque élément d'un demi-groupe qui soit le produit d'un groupe à gauche par un groupe à droite un ensemble quelconque d'éléments se comportant comme lui dans la multiplication. On a là une généralisation remarquable des groupes à gauche et des groupes à droite. Dans un second paragraphe, l'A. examine une extension du problème précédent: il étudie la structure des demi-groupes Δ ayant au moins une unité médiane et dans lesquels tout idempotent est unité médiane. Un tel demi-groupe est réunion d'un demi-groupe D et d'un demi-groupe sans idempotent qui est un idéal de Δ . Réciproquement, à partir d'un demi-groupe D et d'un demi-groupe sans idempotent, on peut toujours construire un demi-groupe Δ qui en soit la réunion. L'A. énonce un théorème permettant de voir à quelles conditions deux demi-groupes Δ ainsi construits sont isomorphes. Il annonce une étude ultérieure de la structure des demi-groupes sans idempotent. *R. Croisot.*

Tetsuya, Kazutoshi, Takao Hashimoto, Tadao Akazawa, Ryochii Shibata, Tadashi Inui and Takayuki Tamura: All semigroups of order at most 5. *J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. Math.* 6, 19—39 (1955).

Les AA. donnent des listes de tous les demi-groupes d'ordre 5 au plus qu'ils classent de façon logique. Ils obtiennent ainsi en particulier 1160 demi-groupes d'ordre 5 distincts (à un isomorphisme ou à un anti-isomorphisme près). *R. Croisot.*

Nielsen, Jakob: A basis for subgroups of free groups. *Math. Scand.* 3, 31—43 (1955).

A subset B in a free group F generated by a finite or infinite set of symbols a_1, a_2, \dots is called basic if (1) in no product of two elements of the set $B \cup B^{-1}$, where these two factors are not inverse, more than half of any of the two factors cancels, and (2) in no product of three elements of the set $B \cup B^{-1}$, where no two neighbouring factors are inverse, half of the central factor cancels to the left and half to the right. The subgroup generated by a basic set B is free and B is a set of its free generators. The author proves that every subgroup G of a free group F has a basic subset which generates G , and describes a method by which he can decide in a finite number of steps whether an element of F belongs to G or not, if a basic set of generators for G is known. If F (or G) is finitely generated the number of tests required is also finite. Arguments are quite elementary and primitive. *M. Suzuki.*

Kostrikin, A. I.: Lösung des abgeschwächten Burnside'schen Problems für den Exponenten 5. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* 19, Nr. 3, 233—244 (1955) [Russisch].

The author proves that the restricted Burnside problem for two generators and the exponent 5 has an affirmative solution: Let F be the maximal periodic group of period $p = 5$ with two generators (that is, the factor group of the free group on two generators with respect to the „identical relation“ $x^5 = 1$) and F_i the i -th term of the lower central series of F . Put $F_\omega = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. Then the Burnside group $F_0 = F/F_\omega$ is finite, its class is 12 or 13 and its order is 5^{33} or 5^{34} . The method of proof is an extension of that used by Sanov (this Zbl. 46, 32) to obtain lower estimates for the length of the lower central series of F . Sanov had calculated the factor groups F_i/F_{i+1} for $i \leq 8$. The present author continues the calculation of Lie polynomials

with coefficients in the Galois field $GF(5)$ of higher degrees, modulo the preceding ones and finds after heavy computational work that the module L_{13} of homogeneous Lie polynomials of degree 13 modulo those of degree 12 is trivial. This then shows that F_{13}/F_{14} and all the subsequent factor groups of the lower central series of F are trivial. The author mentions without proof that he has computed the orders of all the preceding factor groups and finds that they are not trivial with the possible exception of F_{12}/F_{13} which may be of order 5 or 1. Another solution of the restricted Burnside problem for the exponent 5 and for an arbitrary number of generators is given by G. Higman (forthcoming in Proc. Cambridge philos. Soc.). *K. A. Hirsch.*

Baer, Reinhold: Nilgruppen. Math. Z. **62**, 402—437 (1955).

This paper contains a wealth of results concerning in particular characterizations of and relations between the classes of groups determined by the following properties. 1. Every element generates a subnormal subgroup (nilgroups). 2. For each pair x, y of elements, $x_k(y) = 1$ for some k , where $x_0(y) = x$, $x_{i+1}(y) = [x_i, y]$ (Engel groups). 3. Every finite homomorphic image of a subgroup is nilpotent in the usual sense (nilpotent groups). 4. Every homomorphic image $\neq 1$ has center $\neq 1$ (supernilpotent groups). 5. The maximal condition holds for subgroups (Noether groups). 6. Every homomorphic image $= 1$ contains an abelian normal subgroup $= 1$ (solvable groups). 7. Every homomorphic image $\neq 1$ contains an abelian subnormal subgroup $\neq 1$ (subsolvable groups). We can indicate only a few of the author's results. Groups of finite class are nilgroups and supernilpotent. Nilgroups are Engel groups, as are supernilpotent groups, but counter examples are given to the converse statements. Engel groups are nilpotent, as was first proved for finite groups by Zorn [Bull. Amer. math. Soc. **42**, 485—486 (1936)]. It is shown that a group is a nilgroup if and only if it is generated by subnormal cyclic subgroups, and that the totality of elements of finite order in a nilgroup constitutes a characteristic subgroup which is a direct product of primary groups. A group is solvable if and only if, whenever x_i, y_i are elements such that $x_{i+1} = [x_i, [x_i, y_i]]$ for all $i > 0$, then $x_i = 1$ for some i . G is a Noether group such that $G^{(n)} = 1$ for some n if and only if G is subsolvable and $G^{(i)}$ is finitely generated ($G^{(i)}$ being the i -th term of the derived series of G). A Noether group of finite class is characterized by the fact that it is a finitely generated nilgroup. A subsolvable group is finite if it is a finitely generated torsion group. *D. G. Higman.*

Jennings, S. A.: The group ring of a class of infinite nilpotent groups. Canadian J. Math. **7**, 169—187 (1955).

Durchweg bezeichne G eine endlich erzeugte, nilpotente, torsionsfreie Gruppe, kurz eine N -Gruppe. In einer solchen Gruppe gibt es immer eine Zentralreihe $G = F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_{r+1} = E$ mit unendlichen zyklischen Faktorgruppen F_i/F_{i+1} . Die Invariante r heißt der Rang von G . Wenn f_i ein erzeugendes Element von F_i modulo F_{i+1} ist, so hat jedes Gruppenelement eine eindeutige Darstellung $g = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_r^{\alpha_r}$ mit ganzzahligen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$. Hieraus folgt leicht, daß jede N -Gruppe (lexikographisch) geordnet werden kann. Der Gruppenring von G über einem Körper Φ der Charakteristik 0 heiße Γ . Δ sei das von allen Elementen $g - 1$ ($g \in G$) erzeugte Ideal von Γ . Eine Basis für Δ bilden die Elemente

$$(f_{i_1}^{\pm 1} - 1)^{\beta_1} (f_{i_2}^{\pm 1} - 1)^{\beta_2} \dots (f_{i_s}^{\pm 1} - 1)^{\beta_s}$$

mit $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s \leq r$ und positiv ganzen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$. Hieraus schließt Verf., daß für jedes n das Ideal Δ^{n+1} ein echtes Unterideal von Δ^n ist, und daß der Durchschnitt aller $\Delta^n = 0$ ist. Dieser Umstand ermöglicht es, in Γ eine natürliche Topologie einzuführen. Die Vervollständigung von Γ bezüglich dieser Topologie heiße Γ^* , und Δ^* bezeichne die vollständige Hülle von Δ in Γ^* . Ähnlich wie Magnus heiße I^* , und Δ^* bezeichne die vollständige Hülle von Δ in Γ^* . Ähnlich wie Magnus in seiner Behandlung der freien Gruppen (dies. Zbl. **11**, 152) zeigt Verf., daß die Menge D_n der Elemente d_n von G , für die $d_n - 1 \in \Delta^{*n}$ ist, einen Normalteiler von

G bildet, die n -te dimensionale Untergruppe von G . Die Faktorgruppe D_n/D_{n+1} ist torsionsfrei abelsch (oder trivial). Die Glieder der Zentralreihe $G = D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots \supseteq D_{m+1} = E$ werden in einer weiteren Arbeit als minimale Untergruppen mit diesen Eigenschaften gekennzeichnet werden. In der zweiten Hälfte der Arbeit wird jeder N -Gruppe eine Lie-Algebra zugeordnet. In Γ^* kann man die Funktion $\log(1-x)$ mit $x \in \Delta^*$ einführen, insbesondere $\log g$, $g \in G$. Diese Elemente spannen eine Lie-Algebra L auf, und das Hauptergebnis ist, daß L von endlichem Rang r über dem Grundkörper Φ ist. Die Strukturkonstanten erweisen sich als rational. Wenn Φ der Körper der reellen Zahlen ist, dann enthält die von den Elementen der Form $1+x$, $x \in \Delta^*$, erzeugte Gruppe G^* als Untergruppe eine reelle einfach zusammenhängende Lie-Gruppe, deren zugeordnete Lie-Algebra genau L ist, und die G als diskrete Untergruppe enthält. Dieses letztere Ergebnis ist auch auf ganz anderem Wege von A. I. Mal'cev (dies. Zbl. 13, 17) bewiesen worden. K. A. Hirsch.

Itô, Noboru: Über eine zur Frattini-Gruppe duale Bildung. Nagoya math. J. 9, 123—127 (1955).

Sei G eine endliche Gruppe. Verf. betrachtet die von allen minimalen Untergruppen von G erzeugte Gruppe $F^*(G)$, welche als dual zu dem Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von G (Frattini-Gruppe) angesehen werden kann. Verf. zeigt, daß $G/F^*(G)$ auflösbar ist, wenn für die Primteiler p der Ordnung von G mit höchstens zwei Ausnahmen gilt: Das Zentrum einer p -Sylowgruppe von G enthält alle Elemente der Ordnung p von G . Unter den beiden Ausnahmeprimzahlen soll dabei die Primzahl 2, wenn sie die Gruppenordnung teilt, vorkommen. — Als Hilfsmittel zu dem Beweis dieses Satzes beweist Verf. den folgenden Satz: Sei p eine ungerade Primzahl. Eine endliche Gruppe G , deren sämtliche Elemente der Ordnung p im Zentrum von G liegen, ist notwendig p -nilpotent, d. h. es gibt in G einen Normalteiler N , welcher eine p -Sylowgruppe von G als Vertretergruppe von G/N besitzt. An einem einfachen Gegenbeispiel wird gezeigt, daß dies für $p = 2$ nicht mehr richtig ist. — Über p -nilpotente Gruppen vgl. auch N. Itô, dies. Zbl. 44, 13.

P. Roquette.

Čunichin, S. A.: Über Π -auflösbare Untergruppen endlicher Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR 103, 377—378 (1955) [Russisch].

Für das Verständnis dieser Arbeit ist die Kenntnis einer vorangehenden Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 56, 22) erforderlich. Dort war der Begriff eines Kompositionsblocks einer endlichen Gruppe eingeführt worden. Durchweg bezeichne g die Ordnung einer endlichen Gruppe G und h einen Teiler von G . h heiße ganz-blockig, wenn $h = 1$ oder ein Kompositionsblock oder das Produkt mehrerer Kompositionsblöcke von G ist. Das Hauptergebnis der erwähnten Arbeit war, daß G für jedes ganz-blockige h mindestens eine Untergruppe der Ordnung h besitzt. In Verschärfung und Erweiterung dieses Resultats gibt die vorliegende Arbeit (ohne Beweise) weitere Fälle an, in denen man für gewisse Teiler der Ordnung die Existenz von Untergruppen erschließen kann, die obendrein relativ zu einer Menge Π von Primteilern der Ordnung auflösbar sind. (Für den Begriff der relativ auflösbaren oder Π -auflösbaren Gruppe siehe frühere Arbeiten des Verf., dies. Zbl. 29, 4; 37, 303; 39, 17). Sei $h = m_1 m_2 \cdots m_k$, $k \geq 1$, wobei m_1, m_2, \dots, m_k Kompositionsblöcke von G sind, und sei Π eine nicht leere Menge von Primzahlen, für die in der Menge aller verschiedenen Primteiler eines jeden Kompositionsblocks m_1, m_2, \dots, m_k nicht mehr als eine Primzahl von Π auftritt. Dann ist jede Untergruppe von G der Ordnung h Π -separabel. Sei s ein Teiler von g derart, daß $(s, g/s) = 1$ und daß die Menge der verschiedenen Primteiler eines jeden Kompositionsblocks von G nicht mehr als einen Primteiler von s enthält. Dann besitzt G mindestens eine auflösbare Untergruppe der Ordnung s , und alle diese Untergruppen sind in G konjugiert. Ein Teiler s von g heiße separabel, wenn $s = 1$ oder $(s, g/s) = 1$ und G eine $\Pi(s)$ -separable Gruppe ist, wobei $\Pi(s)$ die Menge aller verschiedenen Primteiler von s ist. Wenn h ein ganz-blockiger und

s ein separabler Teiler von g und $(h, s) = 1$ ist, so enthält G mindestens eine Untergruppe der Ordnung $h s$, die (im Falle $s > 1$) $\Pi(s)$ -separabel ist. Dieser Satz geht im Falle $s = 1$ in den oben erwähnten Satz des Verf. über, der wiederum als Spezialfälle die bekannten Sätze von Schur über Zerfällung von Gruppen und von P. Hall über Sylow-Systeme auflösbarer Gruppen enthält. Andererseits ist der Satz für $h = 1$ eine Aussage über die Existenz von Untergruppen in Π -separablen Gruppen, von der Sylow's klassischer Satz ein Spezialfall ist. [Für eine einheitliche Behandlung aller bekannten Sylow-artigen Sätze vergleiche man P. Hall, Proc. London math. Soc., III. Ser. 6, 286—304 (1956)]. Schließlich erwähnen wir noch das folgende Ergebnis: Wenn eine Gruppe der Ordnung $p^\alpha q^\beta r^\gamma$, p, q, r Primzahlen, $\alpha, \beta, \gamma > 0$, nicht auflösbar ist, so hat G nur einen einzigen Kompositionsblock.

K. A. Hirsch.

Schenkman, Eugene: The splitting of certain solvable groups. Proc. Amer. math. Soc. 6, 286—290 (1955).

Sei G eine endliche Gruppe und G^* der Durchschnitt der absteigenden Zentralreihe von G . Verf. beweist den folgenden Satz: Wenn G^* abelsch ist, so ist G^* „komplementiert“, d. h. G enthält eine echte Untergruppe X , für die $G^* \cap X = E$, $G^* X = G$ ist. Je zwei solche Komplemente X und Y sind unter einem Element von G^* konjugiert. Natürlich sind alle Komplemente isomorph zu G/G^* und daher nilpotent. Verf. zeigt an einem Beispiel, daß der Satz nicht mehr gilt, wenn G^* nur als nilpotent vorausgesetzt wird, selbst wenn G/G^* abelsch ist. Wenn ferner G eine Gruppe ohne Zentrum und A ihre Automorphismengruppe ist, dann sind bei abelschem G^* sowohl G als auch A in den Holomorph von G^* enthalten. In diesem Falle sind auch je zwei Komplemente von G^* in A schon unter einem Element von G^* konjugiert.

K. A. Hirsch.

Szép, J. und N. Itô: Über die Faktorisierung von Gruppen. Acta Sci. math. 16, 229—231 (1955).

Es sei G eine Gruppe und H eine echte Untergruppe. Mit $\{H_\alpha\}$ werde die Menge aller zu H konjugierten Untergruppen bezeichnet. Dann ist das Produkt $\bar{H} = \prod_\alpha H_\alpha$ eine Untergruppe von G . Ist G eine endliche nichtnilpotente Gruppe, so enthält G eine nilpotente Untergruppe H mit der Eigenschaft $\bar{H} = G$. R. Kochendörffer.

Chevalley, C.: Sur certains groupes simples. Tôhoku math. J., II. Ser. 7, 14—66 (1955).

Par la nouveauté et l'originalité des idées directrices, l'étendue et la profondeur des connaissances mathématiques mises en jeu et l'incomparable virtuosité technique qui se manifeste à chaque page, ce mémoire est sans conteste un des plus remarquables qui aient jamais été écrits sur la théorie des groupes. On avait depuis longtemps remarqué l'analogie entre les groupes de Lie simples (déterminés par Killing et E. Cartan) et certains types de groupes simples algébriques définis sur un corps quelconque (et en particulier sur un corps fini); de façon précise, on savait définir des groupes algébriques simples se particulierisant, lorsque le corps des scalaires est le corps des complexes, en les quatre groupes „classiques“ de la classification de Killing-Cartan; et E. Dickson, au début du siècle, avait obtenu un résultat analogue pour le type „exceptionnel“ G_2 de cette classification. L'A. étend ce résultat aux quatre autres types „exceptionnels“ F_4 , E_6 , E_7 et E_8 , ce qui, en particulier, lui donne quatre nouvelles classes de groupes simples finis [E. Artin a prouvé depuis (ce Zbl. 65, 257) que les ordres de ces groupes sont différents deux à deux et différents de ceux de tous les groupes simples finis connus antérieurement]; et, ce qui est plus intéressant encore, il obtient ce résultat à l'aide d'une méthode qui s'applique à tous les types de groupes de Lie simples, et qui, pour la première fois, fait le „pont“ entre la théorie des algèbres de Lie à coefficients complexes et les groupes algébriques simples sur un corps quelconque. Pour parvenir à ces remarquables résultats, l'A.

commence, dans une première partie, par compléter sur certains points (essentiels pour la suite), la théorie classique de E. Cartan et H. Weyl pour les algèbres de Lie semi-simples complexes. Le résultat capital (qui, à la connaissance du Réf., est nouveau) est le suivant: soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe, \mathfrak{h} une algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , $\beta(H, H')$ la forme de Killing sur \mathfrak{g} ; pour toute racine r (relative à \mathfrak{h}), soit H_r le „co-poids“ correspondant, élément de \mathfrak{h} tel que $\beta(H, H_r) = -r(H)$; alors il y a une base (X_r) d'un supplémentaire de \mathfrak{h} , chaque X_r étant vecteur propre de \mathfrak{h} pour la racine r , avec les formules de multiplication $[X_r, X_{-r}] = H_r$, $[X_r, X_s] = N_{r,s} X_{r+s}$ où $N_{r,s} = 0$ si $r+s$ n'est pas racine, et (ce qui est la nouveauté) $N_{r,s} = \pm(p+1)$ lorsque $r+s$ est racine et p est le plus grand entier $i \geq 0$ tel que $s - ir$ soit racine; en outre, $N_{-r,-s} = -N_{r,s}$. — Dans la seconde partie, l'A. considère toujours une algèbre de Lie semi-simple complexe \mathfrak{g} et son groupe adjoint Γ (composante connexe du groupe des automorphismes de \mathfrak{g}); quand on a choisi une base de \mathfrak{g} formée des X_r (ayant les propriétés démontrées dans la 1^{re} partie) et des „co-poids“ H_i correspondant à un système fondamental de l racines (l rang de \mathfrak{g}), les éléments de Γ sont des matrices à coefficients complexes. Pour toute racine r , on considère alors le sous-groupe à un paramètre \mathfrak{X}_r de Γ formé des matrices $x_r(t) = \exp t(\text{ad } X_r)$, et qui correspond classiquement au vecteur X_r de \mathfrak{g} ; en vertu de la relation $N_{r,s} = \pm(p+1)$, il se trouve que les coefficients de la matrice $x_r(t)$ sont des polynômes en t à coefficients entiers rationnels. Il s'ensuit aussitôt que l'on peut substituer à t un élément arbitraire d'un corps quelconque K et que, pour deux éléments t, t' de K , on a encore $x_r(t+t') = x_r(t)x_r(t')$; autrement dit, on a ainsi encore un groupe de matrices \mathfrak{X}_r à coefficients dans K ; c'est le groupe G' de matrices sur K engendré par tous les \mathfrak{X}_r que l'A. associe à \mathfrak{g} et dont il fait l'étude approfondie dans les III^e et IV^e parties du mémoire. Il commence par introduire un second groupe de matrices G sur K , contenant G' (et dont G' se trouvera être le groupe des commutateurs sauf dans quatre cas exceptionnels). Soit P le groupe (abélien libre) des racines de \mathfrak{g} ; à tout homomorphisme χ de P dans le groupe multiplicatif K^* des éléments $\neq 0$ de K , on associe la matrice $h(\chi)$ qui laisse fixe les éléments H_i et transforme chaque X_r en $\chi(r) X_r$ (on a encore désigné par H_i et X_r les éléments de la base de l'espace vectoriel sur K dans lequel opèrent les matrices de G); en particulier, pour tout $u \in P$ et toute racine r , $u(H_r)$ est un entier rationnel, et on définit donc un homomorphisme χ_r de P dans K^* en posant $\chi_r(u) = z^u(H_r)$, où $z \in K^*$; les matrices $h(\chi_r)$, lorsque r est fixe et z parcourt K , forment un groupe \mathfrak{S}_r . On désigne par \mathfrak{S} le groupe de matrices engendré par toutes les matrices $h(\chi)$, lorsque χ parcourt l'ensemble des homomorphismes de P dans K^* ; G est alors le groupe engendré par \mathfrak{S} et les \mathfrak{X}_r . Soit P' le groupe des poids de \mathfrak{g} (dont P est un sous-groupe, tel que P'/P soit isomorphe au centre du groupe compact simplement connexe dont l'algèbre de Lie est la forme compacte de \mathfrak{g}); soit \mathfrak{S}' le sous-groupe de \mathfrak{S} engendré par les matrices $h(\chi)$, où χ parcourt les homomorphismes de P dans K^* qui peuvent se prolonger à un homomorphisme de P' dans K^* ; alors \mathfrak{S}' est contenu dans G' et G/G' est isomorphe à $\mathfrak{S}/\mathfrak{S}'$. — Ceci posé, le thème principal de la III^e partie est la démonstration, pour le groupe G correspondant à une algèbre semi-simple complexe quelconque \mathfrak{g} , du lemme de F. Bruhat (démontré par ce dernier pour les groupes classiques; cf. ce Zbl. 55, 20). Soit U le sous-groupe de G engendré par les \mathfrak{X}_r correspondant aux racines $r > 0$ (pour une structure d'ordre total sur l'ensemble des racines, telle que la somme des coefficients, dans l'expression d'une racine $r > 0$ en fonction des racines fondamentales, soit fonction croissante de r). Pour chaque élément w du groupe de Weyl W de \mathfrak{g} , il existe une matrice $\omega(w)$ de G qui transforme la droite KX_r en $KX_{w(r)}$ pour toute racine r . Enfin, pour tout $w \in W$, soit U''_w le sous-groupe de G engendré par les \mathfrak{X}_r tels que $w(r) < 0$. Le théorème fondamental affirme alors que G est réunion des ensembles disjoints $U \mathfrak{S} \omega(w) U''_w$, w parcourant W ; en outre, tout élément du produit $U \mathfrak{S} \omega(w) U''_w$ s'écrit d'une seule

manière sous la forme $u h \omega(w) u''$. Soit alors $N(w)$ le nombre des racines $r > 0$ telles que $w(r) < 0$; l'A. montre comment la connaissance de ces nombres permet de déterminer: 1° le polynôme de Poincaré de G lorsque K est le corps des complexes; 2° l'ordre de G lorsque K est un corps fini. Comme le polynôme de Poincaré d'un groupe de Lie simple complexe est connu par ailleurs, la comparaison des deux résultats précédents donne l'ordre de G lorsque K est fini. A la fin de la IV^e partie, l'A. indique comment on en déduit aisément l'ordre de G' sous la même hypothèse. — La IV^e partie est consacrée à la démonstration du fait que G' est un groupe simple lorsque l'algèbre \mathfrak{g} est simple, sauf dans quatre cas exceptionnels (K ayant 2 ou 3 éléments dans chacun de ces cas). L'idée centrale repose sur la remarque que pour toute racine r le sous-groupe de G' engendré par \mathfrak{X}_r et \mathfrak{X}_{-r} est une image homomorphe du groupe linéaire spécial $SL(2, K)$, lequel est simple (sur son centre) lorsque K a plus de 3 éléments. D'autre part, il est facile de voir que si un sous-groupe distingué H de G est tel que $H \cap \mathfrak{X}_r$ n'est pas réduit à l'élément neutre alors $\mathfrak{X}_r \subset H$ (en raison de la simplicité de $SL(2, K)$ sur son centre). Tout revient donc à voir que $H \cap \mathfrak{X}_r$ ne peut être réduit à l'élément neutre, résultat que l'A. n'atteint qu'au terme d'une démonstration par l'absurde d'une extraordinaire complexité, au cours de laquelle toutes les ressources de la technique des algèbres de Lie semi-simples sont mises en jeu; il faut aussi signaler que, dans cette partie tout comme dans la III^e partie, le résultat $N_{r,s} = (p-1)$ est invoqué à maintes reprises (et ne sert donc pas uniquement à la définition des \mathfrak{X}_r). Enfin, l'A. signale à la fin de son travail qu'il y a lieu encore de vérifier que les groupes qu'il obtient sont bien (dans le cas des groupes „classiques“) ceux qui sont définis de la manière usuelle (ou plutôt certains de ces derniers, correspondant, par exemple, lorsqu'il s'agit du groupe orthogonal, au cas des formes quadratiques d'indice maximum); il resterait à obtenir de la même manière les autres groupes classiques finis, si toutefois cela est possible.

J. Dieudonné.

Masuda, Katsuhiko: Generalization of the concept of cohomology of finite groups. Proc. Japan Acad. 31, 504—507 (1955).

The generalization introduced by the author is in the following direction. Let $\|\|$ be a normalized valuation of the rational number field and let $Z_{\|\|}$ be either the ring of ordinary integers or the ring of l -adic integers according as $\|\|$ is archimedean or non-archimedean corresponding to the prime number l . Let G be a finite group and let D be a representation of G by regular matrices with coefficients in $Z_{\|\|}$. Then $(\|\|, D)$ is called a point of the cohomology space of G ; if G operates on the right on the abelian group A , the author defines a bigraded cohomology group $H(A, G, \|\|, D)$ at every point of the cohomology space of G . If $\|\|$ is archimedean and D is the trivial representation, this group coincides with the ordinary cohomology group $H(A, G)$. Thus the author regards $H(A, G)$ as a local cohomology group in the cohomology space of G . However, it is added in proof that Serre has pointed out that $H(A, G, \|\|, D)$ is just $H(A', G)$ for a suitably defined A' (and operations of G on A'). Thus the concept of cohomology group has not been enlarged although the possibility remains that the author's technique may establish interesting relations between cohomology groups of G and representations of G .

P. Hilton.

Conrad, Paul: Extensions of ordered groups. Proc. Amer. math. Soc. 6, 516—528 (1955).

In einer geordneten additiven Gruppe G (σ -Gruppe) bilden die von 0 verschiedenen Klassen A_γ , $\gamma \in I$, archimedisch vergleichbarer Elemente eine geordnete Menge. Die Menge aller Elemente aus den A_γ mit $\gamma < \beta$ ($\leq \beta$) einschließlich 0 bildet eine Untergruppe G_β (G^β) von G . G^β/G_β ist σ -isomorph (ordnungstreu-isomorph) einer Untergruppe R_γ der Gruppe R der reellen Zahlen bezüglich der Addition und werde als eine Komponente von G bezeichnet. G heißt d -abgeschlossen (abgeschlossen bezüglich Division), wenn $nG = G$ für jedes natürliche n . H heißt a -Erwei-

terung (archimedische Erweiterung) von G , wenn zu jedem $h > 0$ aus H ein $g > 0$ aus G und ein natürliches n existiert mit $ng \leq h \leq (n+1)g$. G heißt a -abgeschlossen, wenn es keine echte a -Erweiterung von G gibt. Jede o -Gruppe G besitzt eine a -abgeschlossene a -Erweiterung H (P. Conrad, dies. Zbl. 55, 32). Hier wird darüber hinaus gezeigt: Sind alle Komponenten von G d -abgeschlossen, so existiert eine a -abgeschlossene a -Erweiterung H , deren sämtliche Komponenten o -isomorph zu R sind. Ist überdies Γ wohlgeordnet, so ist H d -abgeschlossen. Hingegen zeigt ein Beispiel, daß es im Gegensatz zu den abelschen o -Gruppen nichtabelsche o -Gruppen gibt, bei denen keine a -Erweiterung d -abgeschlossen ist, sowie a -abgeschlossene o -Gruppen, deren Komponenten nicht sämtlich zu R o -isomorph sind. Ist jedoch $\Gamma = \{1, 2\}$ und G a -abgeschlossen, so ist G auch d -abgeschlossen und beide Komponenten sind o -isomorph zu R . Jeder innere Automorphismus von G , der G^γ auf sich abbildet, induziert einen o -Automorphismus π von R_γ . Es ist $a\pi = pa$, wo p eine feste positive reelle Zahl. Hiermit wird eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, daß G d -abgeschlossen ist, sofern Γ wohlgeordnet: Für jeden solchen o -Automorphismus von R_γ stellt $1 + p + \dots + p^n$, n beliebig natürlich, einen o -Automorphismus von R_γ dar. Hieraus folgt für abelsche G bei wohlgeordnetem Γ : G ist dann und nur dann d -abgeschlossen, wenn alle G -Komponenten d -abgeschlossen sind. Und für beliebige G bei wohlgeordnetem Γ : Ist jede G -Komponente o -isomorph zu R , so ist G d -abgeschlossen.

O. Föllinger.

Suprunenko, D. A.: Lokalnilpotente irreduzible Untergruppen der vollen linearen Gruppe. Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 41—44 (1955) [Russisch].

Verf. beweist, daß in der Gruppe $GL(n, P)$ alle maximalen irreduziblen lokalnilpotenten Untergruppen konjugiert sind, und daß jede lokalnilpotente irreduzible Untergruppe von $GL(n, P)$ in einer maximalen enthalten ist. Hier ist P ein algebraisch-abgeschlossener Körper. Dieses Resultat ist analog dem vom Verf. früher (dies. Zbl. 56, 23) bewiesenen, daß in den endlichen symmetrischen Gruppen alle maximalen transitiven nilpotenten Untergruppen konjugiert sind. Bei dem Beweis spielt das folgende Lemma eine wichtige Rolle. Sei Γ eine irreduzible nilpotente Untergruppe von $GL(n, P)$, deren Zentrum mit der multiplikativen Gruppe M des Körpers PE_n übereinstimmt [E_n Einheitsmatrix von $GL(n, P)$]. Dann ist der Durchschnitt $\mathfrak{G} = \Gamma \cap SL(n, P)$ [$SL(n, P)$ die unimodulare Gruppe] endlich und die Primteiler von n und der Ordnung von \mathfrak{G} stimmen überein.

K. A. Hirsch.

Reiner, Irving: Maximal sets of involutions. Trans. Amer. math. Soc. 79, 459—476 (1955).

Let U_n denote the group of all $n \times n$ integral matrices with determinant ± 1 . An element $W \in U_n$ is called an involution if $W^2 = I$. The author characterizes the classes of involutions by the elementary divisor of the positive and negative subspaces in the sense of Dieudonné (However it seems to be enough to consider the elementary divisors of $W - I$). The author studies the maximal mutually commutative conjugate set of W . The number of elements of the set is denoted by $N(W)$. Besides some general results concerning the maximal set, he determines all non-equivalent conjugate sets for $n = 2, 3$ and 4.

L. K. Hua.

Reiner, Irving: Automorphisms of the symplectic modular group. Trans. Amer. math. Soc. 80, 35—50 (1955).

Let \mathfrak{S} denote the $2n$ -rowed matrix corresponding to the bilinear form $\sum_{i=1}^n x_i y_{i+n} - \sum_{i=1}^n x_{i+n} y_i$, and let Γ_{2n} be the symplectic modular group, which consists of all $2n$ -rowed matrices \mathfrak{M} with integer elements satisfying $\mathfrak{M} \mathfrak{S} \mathfrak{M}' = \mathfrak{S}$. Evidently we have the following three types of automorphisms of Γ_{2n} : 1. Inner automorphisms $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{A} \mathfrak{M} \mathfrak{A}^{-1}$, where $\mathfrak{A} \in \Gamma_{2n}$, 2. $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{S}_1 \mathfrak{M} \mathfrak{S}_1^{-1}$, where $\mathfrak{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ and 3. $\mathfrak{M} \rightarrow \psi(\mathfrak{M}) \mathfrak{M}$, where $\psi(\mathfrak{M})$ defines a mapping which maps \mathfrak{M} into the

group $\{\pm 1\}$. The author proves that the group of automorphisms of I'_{2n} is generated by the previous three types of automorphisms. Notice that the factor group of the group of automorphisms over the group of inner automorphisms is an abelian group with elements of order 2.

L. K. Hua.

Robinson, G. de B.: On the modular representation of the symmetric group. V. Canadian J. Math. **7**, 391—400 (1955).

Ein Young-Diagramm heißt p -regulär, wenn keine p seiner Zeilen gleiche Länge haben. Es gibt so viel p -reguläre Diagramme von n Stellen, wie es p -reguläre Klassen (d. h. mit Elementen von zu p primter Ordnung) in der symmetrischen Gruppe S_n gibt, und folglich so viel wie es irreduzible Darstellungen mod. p dieser Gruppe gibt. In der vorliegenden Arbeit wird bewiesen, daß genauer zu jedem p -Block genau so viele p -reguläre Diagramme wie irreduzible modulare Darstellungen gehören. Zum Beweis dient das in der vorangehenden Arbeit IV (dies. Zbl. **56**, 25) bereitgestellte Werkzeug, insbesondere die dort erklärte zu einem Diagramm gehörige „ r -Boolesche Algebra“ und die Komplementbildung in dieser Algebra, die u. U. noch modifiziert werden muß, falls sie nämlich zu einem singulären Diagramm führt. Ferner wird eine explizite Konstruktion eines Young-Diagramms mit gegebenem p -Kern und p -Quotient angegeben und benutzt. Das Schlußresultat ist in der Anzahlformel
$$\sum_{w_1 \dots w_{p-1}} p_{w_1} p_{w_2} \dots p_{w_{p-1}} \left(\sum w_i = w, \quad 0 \leq w_i \leq w \right) \quad \text{für}$$

die p -regulären Diagramme vom Gewicht w mit gegebenem p -Kern enthalten (p_w = Anzahl der Partitionen von w).

H. Boerner.

Robinson, G. de B. and O. E. Taulbee: On the modular representations of the symmetric group. VI. Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 596—598 (1955).

In dieser Arbeit, die mehr Andeutung als Ausführung enthält, während die Beweise anderswo publiziert werden sollen, geht es um die Bestimmung der Matrix D , welche die Zerfällung der gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen in unzerfällbare modulare angibt. Die p -regulären Diagramme (vgl. das vorhergehende Referat) eines p -Blocks B werden Köpfe genannt; diejenigen, deren assoziierte (gestürzte) Diagramme im assoziierten Block B' Köpfe sind, heißen Füße. Jeder Unzerfällbaren kann eineindeutig ein Kopf und ein Fuß zugeordnet werden, und alle Diagramme, die diese Unzerfällbare enthalten, liegen (bei lexikographischer Anordnung) zwischen dem Kopf und dem Fuß. Es wird ein Operator Y_p beschrieben, der aus dem Fuß-Diagramm alle andern erzeugen soll. — Es wird ferner die in der allgemeinen Theorie fundamentale Korrespondenz zwischen Unzerfällbaren und modularen Irreduziblen explizit herzustellen angestrebt und hierzu an gewisse in III (dies. Zbl. **46**, 251) eingeführte Permutationen erinnert.

H. Boerner.

Frucht, Robert: Zur Darstellung endlicher Abelscher Gruppen durch Kollineationen. Math. Z. **63**, 145—155 (1955).

I. Schur hat bekanntlich die Theorie der Darstellungen der endlichen Gruppen durch Kollineationen entwickelt. In dieser Arbeit wird anschließend an eine frühere Arbeit des Verf. das Schursche Problem für abelsche Gruppen ohne Benutzung der allgemeinen Schurschen Theorie gelöst. Ferner wird die Frage nach den Darstellungen abelscher Gruppen durch reelle Kollineationen behandelt.

K. Shoda.

Asano, Keizo: Einfacher Beweis eines Brauerschen Satzes über Gruppencharaktere. Proc. Japan Acad. **31**, 501—503 (1955).

Für den Brauerschen „Satz über induzierte Charaktere“ wird hier ein Beweis gegeben, der dem letzten, von Brauer und Tate (vgl. dies. Zbl. **65**, 14) veröffentlichten Beweis sehr ähnlich ist, aber unabhängig von diesen erhalten wurde.

P. Roquette.

Berman, S. D.: Über die Gleichung $x^m = 1$ im ganzzahligen Gruppenring. Ukrain. mat. Žurn. **7**, 253—261 (1955) [Russisch].

Ausführliche Begründung der in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **50**,

255) angegebenen Resultate. Der Satz über die Ordnung der Einheitswurzeln wird für den Fall bewiesen, daß der Koeffizientenring aus den ganzen Größen eines algebraischen Zahlkörpers besteht.
R. Kochendörffer.

Goetz (Göte), A.: Über die Separabilität topologischer Gruppen. *Fundamenta Math.* **42**, 55—56 (1955) [Russisch].

A countably additive non-negative measure μ defined on a field F of subsets of a set X is said to be separable, if there is a countable class M of F -sets such that for any $\varepsilon > 0$ and any $Y \in F$ there is a member $A \in M$ such that $\mu(A + Y - A \cdot Y) < \varepsilon$. It is proved that a locally compact group G is separable if and only if the Haar measure on G is separable in the above sense.
W. T. van Est.

Borel, Armand: Topology of Lie groups and characteristic classes. *Bull. Amer. math. Soc.* **61**, 397—432 (1955).

The content of this survey can be fully characterized by the following titles of paragraphs: Hopf's and Samelson's theorems, the Pontrjagin product, characteristic classes, principal and universal bundles, results on universal bundles, invariants of the Weyl group, examples, homology and cohomology of compact simple Lie groups, remarks on cohomology of Lie groups and on Weyl groups, cohomology of homogeneous spaces, characteristic classes of homogeneous spaces, G/T and related spaces, cellular decompositions, homogeneous complex spaces, noncompact Lie groups and their coset spaces, homotopy groups of Lie groups.

H. Freudenthal.

Dieudonné, Jean: Sur la notion de variables canoniques. *Anais Acad. Brasil Ci.*, **27**, 251—258 (1955).

In his theory of formal Lie groups the author has previously established the „Taylor formula“ $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\alpha} P_{\alpha}(\mathbf{y}) X_{\alpha} f$ (this Zbl. **64**, 255f.). If in this expression the coefficient of X_{0i} (i. e. $P_{0i}(\mathbf{y})$) is y_i , the group law is said to be canonical. It is shown here how, in any formal Lie group, the coefficient $P_{0i}(\mathbf{y})$ can by a change of variables be brought to the form $y_i +$ terms of height $\geq r$ (for any r). By letting $r \rightarrow \infty$, it follows that the group law can always be made canonical. This fact is used to solve a problem raised by the author (this Zbl. **55**, 256): If the group law of a formal Lie group \mathcal{G} is canonical and if in the hyperalgebra \mathfrak{g} of \mathcal{G} the X_{α} with $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \dots = \alpha_n = 0$ form a subalgebra of \mathfrak{g} , then the relations $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$ define a subgroup of \mathcal{G} . A similar method proves that two groups with canonical group law, which have the same structure constants, are identical.

P. M. Cohn.

Libermann, Paulette: Sur la semi-involution. *C. r. Acad. Sci., Paris* **241**, 1444—1447 (1955).

This is a very important contribution in the study of E. Cartan's theory of infinite Lie groups following ideas of Ehresmann (cf. this Zbl. **53**, 120). The theory of Lie groups and of infinite Lie groups is connected by the notion of deduced groups (Y. Matsushima, *Colloque de Topologie de Strasbourg*, Déc. 1954), and it is shown that there exists always an integer r such that the deduced groups of order $\geq r$ are or reduced to identity or these groups are involutives in Matsushima's sense. The dimension of these groups is determined.

H. Guggenheimer.

Gelfand, I. M. und M. I. Graev: Ein Analogon der Plancherelschen Formel für die klassischen Gruppen. *Trudy Moskovsk. mat. Obšč.* **4**, 375—404 (1955) [Russisch].

Die Verallgemeinerung der Plancherelschen Formel auf halbeinfache Liesche Gruppen stößt hauptsächlich auf die folgende Schwierigkeit. Man kennt die Werte der Integrale über Klassen von konjugierten Elementen von der „allgemeinen Lage“ einer hinreichend oft differenzierbaren und außerhalb einer kleinen Umgebung der Einheit verschwindenden Funktion $x(g)$ ($g \in G$); es soll dann der Wert der Funktion in dem Einselement ermittelt werden. In ihren Untersuchungen über die Darstel-

lungen der klassischen Gruppen haben I. M. Gelfand und M. A. Neumark [Trudy mat. Inst. Steklov **36**, 1—288 (1950)] eine komplizierte Lösung dieses Problems für den Fall der komplexen unimodularen Gruppe gefunden. Dieses Verfahren wird jetzt durch ein allgemeineres und äußerst übersichtliches ersetzt und für die klassischen Gruppen in den Einzelheiten durchgeführt. Das Resultat hat die folgende Form: $x(e) = L I_{\delta}|_{\delta=e}$, wo I_{δ} das Integral von $x(g)$ über die Klasse aller zu der Diagonalmatrix δ mit verschiedenen Eigenwerten konjugierten Elemente und L ein gewisser linear homogener Differentialoperator ist. Zum Beweis werden Resultate von M. Riesz (dies. Zbl. **33**, 276) in einer etwas verallgemeinerten Form herangezogen. Es sei $f(x)$ eine genügend oft differenzierbare und außerhalb einer kompakten Menge verschwindende Funktion in einem Euklidischen Raum von ungerader Dimensionszahl m und $\omega(x)$ eine nicht entartete und nichtdefinite quadratische Form mit einer ungeraden Zahl von positiven Quadraten. Dann hat die durch das Integral $\int_{\omega(x) \geq 0} f(x) |\omega(x)|^{\lambda-2} dx$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$, bzw. durch dessen analytische Fortsetzung definierte Funktion $R(\lambda)$ an den Stellen $\lambda = -m - 2k$ einfache Pole, und man hat $\operatorname{Res}_{\lambda = -m - 2k} R(\lambda) = c_k (\Delta^k f)(0)$ ($k = 1, 2, \dots$). Hier sind

die c_k gewisse Konstanten und $\Delta = \sum_{p,q} b_{pq} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q}$, wo $\|b_{pq}\|$ die Inverse der Matrix der quadratischen Form $\omega(x)$ ist. Für eine andere Ableitung der Plancherelschen Formel für komplexe halbeinfache Gruppen vgl. Harish-Chandra, dies. Zbl. **44**, 328; **55**, 340. Anmerkung des Ref.: Das Integrationsgebiet $0 \leq \eta \leq \xi \leq 2a$ in dem Integral 1.22 (S. 380) ist durch das Gebiet $0 \leq \eta \leq a - |\xi - a|$, $0 \leq \xi \leq 2a$ zu ersetzen. Sonst kann der Beweis für die Analytizität der Funktion $R_2(\lambda)$ an der Stelle $\lambda = -m$ auf dem von den Verff. eingeschlagenen Weg erbracht werden.

L. Pukánszky.

Verbände. Ringe. Körper:

Ward, A. J.: On relations between certain intrinsic topologies in partially ordered sets. Proc. Cambridge philos. Soc. **51**, 254—261 (1955).

Für den Begriff der Ordnungskonvergenz (OK) einer gerichteten Familie (Moore-Smith-Folge) in einer (teilweise) geordneten Menge E liegen im wesentlichen zwei Vorschläge vor. Die erste OK [α_1 -Konvergenz von Rennie, The theory of lattices, p. 14, dies. Zbl. **44**, 379; ferner bei Frink, Trans. Amer. math. Soc. **51**, 569—582 (1942), p. 570] arbeitet mit monotonen Majoranten und Minoranten der Folge und läßt sich daher nicht ohne weiteres in die Sprache des Filters (des für das topologische Verhalten allein Wesentlichen) übersetzen. In vollständigen Verbänden stimmt dieser Begriff der OK mit dem zweiten überein, den man allgemein durch Relativierung von der Dedekind-MacNeilleschen Hülle E^* auf die beliebig geordnete Menge E erhält [α_2 -Konvergenz von Rennie, loc. cit. p. 15; ferner Birkhoff, dies. Zbl. **16**, 85, p. 55f. dieser Arbeit; sowie Lattice theory, 2. Aufl., p. 59f.; Löwig, Ann. of Math., II. Ser. **42**, 1138—1196 (1941), p. 1148]; diese läßt sich auch ohne die Dedekind-MacNeillesche Hülle direkt (Rennie und Löwig, loc. cit. und vorliegende Arbeit) und vor allem, nach dem Muster von Bourbaki (Intégration, Actual. sci. industr. No. 1175 (1952), p. 28 ex. 9), in der Sprache der Filter formulieren. So ist es kein Wunder, daß Verf. ohne weitere Diskussion nur noch die α_2 -Konvergenz in der Sprache der Filter formuliert und benutzt: man definiert oberen und unteren Limes eines Filters \mathfrak{F} ; alle dazwischen liegenden Elemente werden als „mediale“ bezeichnet: Zusammenfallen des oberen und unteren Limes gibt die α -Konvergenz. Die nach Urysohnschem Vorbild daraus abgeleitete topologische oder Sternkonvergenz heißt hier „starke α^* -Konvergenz“; sie hat allerdings nur prätopologischen Charakter, d. h. entspricht einer mehrstufigen oder Prätopologie der geordneten Menge E , welche

ihrerseits durch transfinite Iteration der Abschließung eine gewöhnliche einstufige Topologie, die Ordnungstopologie von E , erzeugt. — Diese Topologie weicht i. a. von der von Frink (loc. cit. p. 570) eingeführten Intervall-Topologie (abgeschlossene Intervalle bilden Subbasis für die topologisch abgeschlossenen Mengen) sowohl wie von der Frinkschen Ideal-Topologie (dies. Zbl. 55, 259: vollständig irreduzible Ideale und duale Ideale bilden Subbasis für die offenen Mengen) ab. Zum Verhältnis Ordnungs-/Ideal-Topologie werden einige „pathologische“ Beispiele diskutiert, die auf Halmos, Floyd und McShane zurückgehen; das Beispiel von Halmos der Booleschen Algebra der Lebesgue-meßbaren Mengen modulo Nullmengen zeigt z. B. die Unvergleichbarkeit beider Topologien, dabei sind beide Topologien (siehe dazu Theorem 5 der Arbeit) hier Hausdorffsch. Als Hauptergebnisse der Arbeit dürften aber folgende Sätze anzusprechen sein: 1. Die Intervall-Topologie eines Verbandes ist Hausdorffsch genau dann, wenn Konvergenz im Sinne der Intervall-Topologie und starke σ^* -Konvergenz zusammenfallen; 2. (Folgerung) In einem vollständigen Verband ist dies dann und nur dann der Fall, wenn jeder Ultrafilter ordnungskonvergent ist. Diese Sätze können als Beiträge zu zwei Birkhoff'schen Problemen (Lattice theory, 2. Aufl., Problem 23, p. 62 und Problem 25, p. 64) angesehen werden. — Weitere Untersuchungen im Zusammenhang mit Arbeiten von Frink und Northam (dies. Zbl. 51, 260) sind angekündigt.

Jürgen Schmidt.

Balachandran, V. K.: On complete lattices and a problem of Birkhoff and Frink. Proc. Amer. math. Soc. 6, 548—553 (1955).

Zuerst schickt Verf. folgende Definition voraus: V sei ein beliebiger Verband. Ein Element $a \in V$ heiße vereinigungsirreduzibel (v -irreduzibel) bzw. v -Primelement, wenn aus $a_1 \vee a_2 = a$ bzw. $a_1 \vee a_2 \geq a$ stets $a_1 = a$ (oder $a_2 = a$) bzw. $a_1 \geq a$ (oder $a_2 \geq a$) folgt. Weiter heiße $a \in V$ vollständig v -irreduzibel bzw. vollständiges v -Primelement, wenn aus $\bigvee_i a_i = a$ bzw. $\bigvee_i a_i \geq a$ (sofern es in V diese Vereinigungen gibt) die Existenz eines i_0 folgt derart, daß $a_{i_0} = a$ bzw. $a_{i_0} \geq a$ ist. Schließlich heiße ein Verband V unendlich-durchschnitts distributiv (unendlich- d -distributiv), wenn für alle in V existierenden Durchschnitte $\bigwedge_i a_i$ und alle $a \in V$ die Beziehung $a \vee (\bigwedge_i a_i) = \bigwedge_i (a \vee a_i)$ gültig ist. Die entsprechenden dualen Begriffe heißen d -irreduzibel, d -Primelement, usw. — Verf. beweist nun die folgenden Hauptresultate: 1. Ist V ein vollständiger Verband, so sind folgende vier Behauptungen gleichwertig: (i) jedes Element von V ist Vereinigung endlich vieler v -Primelemente, (ii) V ist distributiv und jedes seiner Elemente ist Vereinigung endlich vieler v -irreduzibler Elemente, (iii) der Verband V^* aller Ideale von V ist unendlich- d -distributiv, (iv) jedes vollständig d -irreduzible Ideal von V ist ein vollständiges d -Primideal. — 2. Ist V ein vollständiger komplementärer Verband derart, daß jedes seiner vollständig d -irreduziblen Ideale ein vollständiges d -Primideal ist, so ist V eine endliche Boolesche Algebra (und umgekehrt). — Damit wird, in Beantwortung einer von G. Birkhoff und O. Frink stammenden Frage eine Charakterisierung aller vollständigen Verbände gewonnen, deren jedes vollständig d -irreduzible (duale) Ideal ein vollständiges Primideal (d. h. ein im Sinne des Verf. vollständiges d -Primideal) ist.

M. Benado.

Zarickij, M. A.: Die Boolesche Algebra mit Abschließung und die Boolesche Algebra mit Ableitung. Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR 1955, 3—6 und russ. Zusammenfassg. 6 (1955) [Ukrainisch].

A Boole closure algebra [r -algebra] is any Boole algebra satisfying the axioms of Kuratowski: $(A + B)^r = A^r + B^r$, $A \subseteq A^r$, $0^r = 0$, $A^{rr} = A^r$. A Boole derivative algebra [d -algebra] is any Boole algebra such that $A \subseteq B \Rightarrow A^d \subseteq B^d$, $(A + B)^d \subseteq A^d + B^d$, $1^d = 1$, $A^{dd} \subseteq A^d$, $0^d = 0$ (here A^d might be interpreted as A'). In analogy with Kuratowski [Fundamenta Math. 3, 182—199 (1922), in particular the schemes, p. 186] the author proves analogous schemes for d -algebras:

$$\begin{array}{c}
 A^{cdc} \rightarrow A^{cddc} \rightarrow \dots A^{cd^n c} \rightarrow A^{cdcdcdc} \begin{array}{l} \nearrow A^{cdcd} \\ \searrow A^{dcac} \end{array} \rightarrow A^{cdcd} \rightarrow A^{d^n} \rightarrow \dots A^{dd} \rightarrow A^d. \\
 A^{dc} \rightarrow A^{ddc} \rightarrow \dots A^{d^n c} \rightarrow A^{dcdcdc} \begin{array}{l} \nearrow A^{dcd} \\ \searrow A^{cdcdc} \end{array} \rightarrow A^{dcdcdc} \rightarrow A^{cd^n} \rightarrow \dots A^{cdd} \rightarrow A^{cd}.
 \end{array}$$

Here \rightarrow means \subseteq . Any d -algebra gives rise to a d -Algebra definable by means of the d -operation and the operations $-$, \cdot of the Boole algebra. The converse does not hold; e. g. A^d is not definable only by $r, \cdot, +$. The relation $A^{rrr} = A^{cdc}$ is proved and applied (X^c is the complement of X). D. Kurepa.

Schafer, R. D.: Structure and representation of nonassociative algebras. Bull. Amer. math. Soc. **61**, 469—484 (1955).

Verf. gibt einen guten Überblick bisher gewonnener Ergebnisse über nicht-assoziative Algebren mit endlichem Rang. Nach einem einführenden Abriss über assoziative und Lie-Algebren, in denen Verf. die wichtigsten vorkommenden Begriffe wie Einfachheit, Halbeinfachheit, Radikal, Nilideal u. a. m. definiert, werden diese in dem nachfolgenden Paragraphen auf beliebige nichtassoziative Algebren verallgemeinert (was für die meisten Begriffe keine Schwierigkeiten bereitet). Als Radikal einer Algebra A wird das kleinste Ideal N definiert, für das A/N halbeinfach (d. h. direkte Summe einfacher Algebren) ist. N braucht weder nilpotent (wie bei assoziativen Algebren) noch auflösbar (wie bei Lie-Algebren) zu sein; Verf. gibt ein Beispiel einer Algebra vom Range 2 an, deren Radikal von einem idempotenten Element erzeugt wird. Es gibt jedoch Klassen wichtiger Algebren, in denen die Radikale ähnliche „vernünftiger“ Eigenschaften haben wie die von assoziativen oder Lie-Algebren. Dies ist z. B. der Fall bei den alternativen Algebren $[a x^2 = (a x) x$ und $x^2 a = x(x a)]$ und den Jordan-Algebren $[x a = a x$ und $x^2(a x) = (x^2 a) x]$. In diesen beiden Fällen ist das Radikal N maximales Nilideal; N ist nilpotent. Weitere Eigenschaften werden angegeben. Eine Verallgemeinerung dieser Algebren (ebenso der assoziativen und Lie-Algebren) bilden die potenzassoziativen Algebren, die dadurch gekennzeichnet sind, daß jedes Element eine assoziative Unter algebra erzeugt. Die wichtigsten bekannten Eigenschaften solcher Algebren werden angegeben. Unter einigen Zusatzvoraussetzungen ist auch hier das Radikal maximales Nilideal. Endlich folgt ein Abriss der Darstellungstheorie nichtassoziativer Algebren. Die Note schließt mit einem ausführlichen Literaturverzeichnis. J. André.

Kleinfeld, Erwin: Primitive alternative rings and semi-simplicity. Amer. J. Math. **77**, 725—730 (1955).

Verf. beweist, daß ein primitiver, alternativer, nicht assoziativer Ring eine Cayley-Dickson-Algebra ist. Die von Kaplansky (dies. Zbl. **42**, 262) benutzte Voraussetzung der \mathfrak{p} -Regularität ist somit überflüssig. Nebenbei ergibt sich ein elementarer Beweis für die Tatsache, daß ein alternativer, nicht assoziativer Ring ohne eigentliche zweiseitige Ideale auch keine eigentlichen einseitigen Ideale besitzt. Für einfache Ringe, die nach einem früheren Resultat des Verf. (dies. Zbl. **51**, 25) Cayley-Dickson-Algebren sind, ist das nicht neu. Ob es Nilringe dieser Art gibt, ist immer noch eine offene Frage. Der Begriff des primitiven Rings ermöglicht eine Strukturtheorie für halbeinfache Ringe. E. Trost.

Lazard, M.: Sur les algèbres enveloppantes universelles de certaines algèbres de Lie. Publ. sci. Univ. Alger, Sér. A **1**, 281—294 (1955).

Let Ω be a commutative ring and let L be a Lie Ω -ring, i. e. an Ω -module with a bilinear multiplication with respect to which it is a Lie ring. The author is concerned with finding conditions under which the natural mapping of L into its universal associative enveloping ring U (regarded as Ω -ring) is an Ω -isomorphism. This is known to hold whenever Ω is a field (Birkhoff, this Zbl. **16**, 244; Witt, this Zbl. **16**, 244), and by examining Witt's proof the author shows that the following condition is sufficient for embeddability: L (qua Ω -module) is an inductive limit

of Ω -modules which are direct sums of 1-generator submodules. This includes the case where Ω is a principal ideal ring, and therefore also the case where there are no operators. (These results had already been announced by the author, this Zbl. 46, 34.) P. M. Cohn.

Borel, A. and G. D. Mostow: On semi-simple automorphisms of Lie algebras. Ann. of Math., II. Ser. 61, 389—405 (1955).

Let L be a finite dimensional Lie algebra over a field of characteristic 0, and Γ a group of semi-simple automorphisms of L (cf. Chevalley, Théorie des groupes de Lie II, Paris 1951). The authors prove (i) if Γ is cyclic and L is not soluble then there is an element $x \in L$ left fixed by Γ , such that $\text{ad } x$ is not nilpotent. If L is semi-simple, x may be taken to be regular (Chevalley, l. c. III, Paris 1955). (ii) If either (a) L and Γ are soluble, or (b) Γ has a finite chain of normal subgroups with cyclic quotients, then Γ leaves a Cartan subalgebra of L invariant. — The proof of (i) (which generalises a result of Borel and Serre, this Zbl. 51, 19) uses properties of linear Lie algebras with a non-degenerate trace-function, while (ii) depends on algebraic groups and algebraic Lie algebras. Examples are given to show that the assumptions on Γ cannot be weakened in some directions. P. M. Cohn.

Dixmier, J.: Sur les algèbres dérivées d'une algèbre de Lie. Proc. Cambridge philos. Soc. 51, 541—544 (1955).

Let $D^i g$, $i = 0, 1, 2, \dots$, denote the sequence of derived algebras of a Lie algebra g of finite dimension over a commutative field K . The author proves (Theorem 1) that if $D^i g$ is non-abelian, then $\dim (D^i g / D^{i+1} g) \geq 2^i + 1$. In case K is of characteristic zero, g no longer necessarily nilpotent and $D^i g$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, the sequence of distinct derived algebras, this result is shown to imply that $\dim (D^i g / D^{i+1} g) \geq 2^{i-1} + 1$, for $1 \leq i \leq n - 2$. The best possible nature of the inequality in Theorem 1 is examined; thus it is proved (Theorem 2) that in case g is nilpotent and K has characteristic $\neq 2$, then if $\dim (D^1 g / D^2 g) = 3$, $D^2 g$ is of dimension 0 or 1. Theorem 1 is analogous to a result on finite p -groups, of P. Hall (this Zbl. 7, 291), who is also here stated to have a corresponding result to Theorem 2 in the case of finite p -groups, p odd. W. H. Cockcroft.

Dixmier, J.: Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Acta Sci. math. 16, 246—250 (1955).

Let g be a Lie algebra of finite dimension over a field K , all of whose representations are also of finite dimension over K ; and let M be a g -module. In case g is nilpotent, $\dim g > 1$, and M the one dimensional module of trivial representation over K , then it is known that (i) the cohomology group $H^2(g; M) \neq 0$ (cf. Chevalley-Eilenberg, this Zbl. 31, 248), and (ii) $\dim H^1(g; M) \geq 2$ (cf. preceding review, recalling that $H^1(g; M)$ is the dual of $g/[g, g]$). Taking an arbitrary M , the author proves on the one hand that if K is infinite, g nilpotent and if every quotient g -module of the sub- g -modules of M is a non-trivial g -module, then $H^i(g; M) = 0$ for all i ; and on the other hand that if g is nilpotent of dimension n , and there exists a non-zero quotient g -module of a sub- g -module of M which is a trivial g -module, then $\dim H^0(g; M) \geq 1$, $\dim H^i(g; M) \geq 2$, $0 < i < n$, $\dim H^n(g; M) \geq 1$. W. H. Cockcroft.

Jennings, S. A.: Radical rings with nilpotent associated groups. Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. 49, 31—38 (1955).

Unter „Quasimultiplikation“ werde die Operation $x * y = x + y + xy$ verstanden. Ein assoziativer Ring R , indem zu jedem Element x ein „quasiinverses“ x' mit $x * x' = 0$ existiert, heißt Radikalring. Seine Elemente bilden eine Gruppe \mathcal{G} unter der Quasimultiplikation mit der Null als Einselement. \mathcal{A} sei der R zugeordnete Liesche Ring. Verf. zeigt, daß \mathcal{A} dann und nur dann nilpotent ist, wenn \mathcal{G} nilpotent ist. Ist R speziell eine Nilalgebra über einem Körper der Charakteristik Null, so ist die Klasse von \mathcal{A} gleich der Klasse von \mathcal{G} , vorausgesetzt, daß diese Klassen endlich sind. E. Trost.

Levitzki, J.: The matricial rank and its application in the theory of I -rings. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 3, 203—237 (1955).

Die Arbeit setzt frühere Untersuchungen des Verf. [dies. Zbl. 50, 261; Trans. Amer. math. Soc. 77, 216—237 (1954)] fort, deren Bezeichnungen hier übernommen sind. — Ein I -Ring ist ein Ring S , in dem jedes Rechtsideal, das kein Nilideal ist, ein Idempotent enthält. Ein Teilring R von S hat den Matrizenrang $R = n$, wenn R ein System von n^2 Matrizeneinheiten e_{ik} enthält, aber keines von größerem Grad. Es wird für ein Element a der Matrizenrang durch $|a| = a S = S a$ definiert. In beliebigen Ringen gilt $|a b| \leq |a|$, $|a b| \leq |b|$, in I -Ringern überdies $|a + b| \leq |a| + |b|$ und $|R_1 + R_2| \leq |R_1| + |R_2|$ für beliebige Rechtsideale. Ist S ein FI -Ring, d. h. ein I -Ring, dessen homomorphe Bilder S' ebenfalls I -Ringe sind, so gilt $|S'| \leq |S|$. In jedem I -Ring S bilden die Elemente a mit $|a| < \infty$ ein zweiseitiges Ideal, das mit dem M -Sockel von S zusammenfällt, d. h. mit der Summe aller Rechtsideale mit endlichem Matrizenrang. Hat der I -Ring S selbst endlichen Matrizenrang, so heißt er IM -Ring. Gilt dies auch für jedes homomorphe Bild, so haben wir einen FIM -Ring. Ein Ring, der eine wohlgeordnete aufsteigende Kompositionsreihe von zweiseitigen Idealen A_σ besitzt mit $A_{\sigma+1} - A_\sigma$ ein IM -Ring, heißt IM -auflösbar. Entsprechende Definition der FIM -Auflösbarkeit, P -Auflösbarkeit, FIP -Auflösbarkeit (ein P -Ring ist ein I -Ring, dessen Restklassenring nach dem Radikal kein nilpotentes Element enthält). Es wird bewiesen, daß die FIM -auflösbaren Ringe mit den FIP -auflösbaren Ringen zusammenfallen. Ein zweiseitiges Ideal A eines Ringes S heißt stabil, wenn jedes System von Matrizeneinheiten in $S - A$ das homomorphe Bild eines eben solchen Systems bei der kanonischen Abbildung von S auf $S - A$ ist. Es wird bewiesen, daß jedes P -auflösbare FI -Ideal A eines beliebigen Ringes S stabil ist und daß aus der Gültigkeit der D -Bedingung in S die Gültigkeit der D -Bedingung in $S - A$ folgt. Gilt die D -Bedingung im FI -Ring S , so ist S P -auflösbar. G. Köthe.

Faddeev, D. K.: Zum Begriff der Norm einer einfachen zentralen Algebra. Doklady Akad. Nauk SSSR 105, 662—663 (1955) [Russisch].

Die Grundlage der vorliegenden Arbeit bildet die von M. Kneser eingeführte Norm einer Algebra (dies. Zbl. 50, 31). Bewiesen wird zunächst $N_{k_2/k_0}(a) = N_{k_1/k_0}(N_{k_2/k_1}(a))$ für $k_0 \subset k_1 \subset k_2$. Ist k_1 eine endliche algebraische Erweiterung des p -adischen Körpers k_0 mit dem Primdivisor p_1 , so gilt für die Invarianten einer Algebra die Formel $\left(\frac{a}{p_1}\right) = \left(\frac{N_{k_1/k_0}(a)}{p}\right)$. Mit k_0 werde ein endlicher algebraischer Zahlkörper bezeichnet, p sei ein Primdivisor von k_0 . Die in p enthaltenen Primdivisoren einer endlichen algebraischen Erweiterung k_1 von k_0 seien p_1, \dots, p_r . Dann ist die p -Invariante von $N_{k_1/k_0}(a)$ gleich der Summe der Invarianten von a an den Stellen p_1, \dots, p_r . R. Kochendörffer.

Leavitt, W. G.: Finite dimensional modules. Anais Acad. Brasil Ci. 27, 241—250 (1955).

L'A. cherche des conditions pour qu'un anneau K (ayant un élément unité) satisfasse à la condition suivante: tout K -module libre M ayant une base de n éléments n'a que des bases de n éléments et tout système de plus de n éléments de M est lié (cas où on peut dire que M est „de dimension n “). Il montre qu'il en est ainsi dans les trois cas suivants: 1. K est noethérien à droite; 2. il existe un entier p tel que tout système $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ de p éléments de K soit lié par une relation $\sum_i a_i c_i = 0$, où un au moins des c_i n'est pas diviseur de 0 à gauche; 3. il existe un entier p tel que tout système $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ de p éléments de K soit lié par une relation $\sum_i a_i c_i = 0$ avec $a_i c_i \neq 0$ pour un indice au moins. Ces résultats sont déduits de la remarque suivante, qui généralise un résultat de P. Dubreil: si un module admet un système

de n générateurs et contient un système libre de $n + 1$ éléments, il contient un système libre infini. L'A. étudie aussi les anneaux plus généraux K tels que tout K -module libre ayant une base finie ait toutes ses bases équipotentes. Il conviendrait de citer ici le cas où K est contenu dans un anneau noethérien ayant même élément unité; voir N. Bourbaki, Algèbre, chap. II, p. 20, exerc. 16 (non cité par l'A.).

J. Dieudonné.

Flanders, Harley: Finitely generated modules. Duke math. J. **22**, 477—483 (1955).

Variante des démonstrations classiques de la théorie des modules de type fini sur un anneau principal; si E, F sont deux tels modules et $F \subset E$, l'A. utilise principalement dans ses raisonnements l'idéal $\mathfrak{B}(E, F)$, égal au produit des facteurs invariants de E/F si ce module est un module de torsion, à 0 dans le cas contraire [bien entendu, il n'utilise pas tout d'abord cette définition, mais définit directement $\mathfrak{B}(E, F)$ lorsque E est libre et n'obtient qu'ensuite l'interprétation à l'aide de E/F].

J. Dieudonné.

Nakayama, Tadisi: Über die Kommutativität gewisser Ringe. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **20**, 20—27 (1955).

The author proves the following two theorems which are further generalizations of a theorem of Hua and Jacobson. Let R be a division ring with center Z . For every simple extension $K = Z(c)$, let $\alpha_1(K), \dots, \alpha_{r(K)}(K)$ be a finite number of elements of K , so given that for every element a of K there exists a natural number $n = n(a, K)$ and an element $p = p(a, K)$ such that $p \in [a, \alpha_1(K), \dots, \alpha_{r(K)}(K)]$, the subring generated by $a, \alpha_1(K), \dots, \alpha_{r(K)}(K)$, and $a^{n+1}p - a^n \in Z$. Then $R = Z$. For a ring R with center Z , if we replace $K = Z(c)$ by the subring $Z[c]$ and $n = 1$, the previous conclusion is still true.

L. K. Hua.

Wang, Shih-Chiang: A note on ordered rings of real vectors. Acta math. Sinica **5**, 65—79 und engl. Zusammenfassg. 79—80 (1955) [Chinesisch].

Die Note beschäftigt sich mit dem folgenden Problem 103 aus Birkhoffs Lattice Theorie (dies. Zbl. **33**, 101): Sei G die additive Gruppe aller reellen Vektoren (a, b) mit der Ordnungsrelation: $(a, b) \geq (c, d)$, wenn entweder $a > c$, oder $a = c$ und $b \geq d$. Läßt sich eine Multiplikation in G so definieren, daß G sogar ein geordneter Ring wird (d. h. Produkt und Summe von positiven Elementen soll wieder positiv sein)? Verf. beantwortet die Frage positiv, indem er auf verschiedene Weisen eine solche Multiplikation explizit angibt. Eine Übersicht über alle Möglichkeiten für die Definition der Multiplikation zu gewinnen, scheint schwierig, jedoch gibt es nach Verf. im wesentlichen nur sechs Klassen isomorpher geordneter Ringe, die G als additive Gruppe haben.

Demaria, Davide Carlo: Sulla definizione di corpo. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **18**, 268—274 (1955).

Verf. macht einige ganz elementare Bemerkungen über die Möglichkeit, die Körperaxiome abzuschwächen. Statt wie üblich zu fordern, daß die Elemente unter Addition und die von der Null verschiedenen Elemente unter Multiplikation Gruppen bilden, die durch die beiden distributiven Gesetze verbunden sind, spaltet er die Postulate in elf etwas schwächere auf, die aber zusammen ausreichen, um einen Körper zu bestimmen, und von denen obendrein jedes Postulat von den übrigen unabhängig ist.

K. A. Hirsch.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Martić, Ljubo: Une application de séparableur dans la théorie des nombres entiers algébriques. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. **10**, 37—39 u. kroatische Zusammenfassg. 40 (1955).

Verf. nennt jede Menge S in einem Ring R ganzer algebraischer Zahlen, deren Komplement $R \setminus S$ multiplikativ abgeschlossen ist, einen Separateur und bemerkt, daß sich jedes nichtprimäre Ideal als Durchschnitt gewisser Separateure darstellen läßt.

H. W. Leopoldt.

Kubota, Tomio: A note on units of algebraic number fields. Nagoya math. J. **9**, 115—118 (1955).

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper, l eine Primzahl und H eine Untergruppe der vollen Einheitengruppe E_k von k , welche alle l -ten Einheitenpotenzen enthält. Weiter sei für $\eta \in H$, $\eta \neq 1$ stets $k(\sqrt[l]{\eta})/k$ verzweigt, falls k die l -ten Einheitswurzeln enthält. Dann existieren unendlich viele zyklische Erweiterungen K/k vom Grade l mit den Eigenschaften: a) H ist die Gruppe der Relativnormen von Einheiten aus K ; b) ist ein Ideal \mathfrak{a} von k Hauptideal von K , so ist \mathfrak{a} schon Hauptideal von k . Verf. beweist dies unter Heranziehung des Grunwaldschen Existenzsatzes in der scharfen Formulierung bei Hasse, dies. Zbl. **39**, 31. *H. W. Leopoldt.*

Hasse, Helmut: Die dyadische Einseinheitenoperatorgruppe zum Körper der 2^n -ten Einheitswurzeln nebst Anwendung auf die Klassenzahl seines größten reellen Teilkörpers. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A **20**, 7—16 (1955).

Sei P_n der Körper der 2^n -ten Einheitswurzeln ($n \geq 3$), ζ eine primitive 2^n -te Einheitswurzel. \bar{P}_n die perfekte Hülle von P_n bei der zu dem einzigen Primteiler $\lambda = 1 - \zeta$ von 2 gehörigen Bewertung. Auf die Gruppe H der Einheiten $\eta \equiv 1 \pmod{\lambda}$ aus \bar{P}_n wirken als Operatoren der Ring D der ganzen rational-dyadischen Zahlen (Hasse, Zahlentheorie § 15, dies. Zbl. **35**, 30) und die Automorphismen von P_n , insbesondere der erzeugende Automorphismus $s: \zeta \rightarrow \zeta^5$ von P_n/P_2 . Verf. untersucht die Struktur von H als Operatorgruppe mit dem Gruppenring $D(s)$ als Operatorbereich. Insbesondere ergibt sich, daß das Erzeugendensystem $\zeta, \varepsilon_0^{(s-1)^v}$ ($\varepsilon_0 = \lambda^{s-1} = (1 - \zeta^5)(1 - \zeta)^{-1}$, $v = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 2$) der Kreiseinheitengruppe E_0 in der Faktorgruppe H/H^2 unabhängig ist, so daß also ein Potenzprodukt dieser Erzeugenden genau dann ein Quadrat ist, wenn alle Exponenten gerade sind. Daraus folgt ein von früheren Beweisen (s. z. B. Hasse, Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper, § 12, dies. Zbl. **46**, 260) verschiedener Beweis des Weberschen Satzes, daß die Klassenzahl des größten Teilkörpers von P_n ungerade ist. *M. Kneser.*

Carlitz, L.: Note on the class number of quadratic fields. Duke math. J. **22**, 589—593 (1955).

Es sei $h(d)$ die Klassenzahl des reell-quadratischen Körpers $R(\sqrt{d})$ mit der Diskriminante d . Ist insbesondere $d = p$ (prim), so ist bekanntlich [s. Verf., Proc. Amer. math. Soc. **4**, 535—537 (1953)]

$$(2u/t) h(d) \equiv (A + B)/p \pmod{p},$$

wobei $A = \prod a$ mit $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, $B = \prod b$ mit $\left(\frac{b}{p}\right) = -1$ und $\varepsilon \mid \text{Grundeinheit}$ von $R(\sqrt{d})$ $\left[= \frac{1}{2} (t + u\sqrt{p}) \right] > 1$ ist. Wenn $d = p m = p_0 m_0$ mit $p_0 = (-1)^{(p-1)/2} p$, $1 < m < p$ und $A = \prod_{a=1}^d a^{(\frac{m_0}{a})}$, $B = \prod_{b=1}^d b^{(\frac{m_0}{b})}$ ist, so wird nun mittels der Bernoullischen Polynome gezeigt: $(B - A)/p \equiv (2m u/t) h(d) \pmod{p}$. Wenn dagegen $d < 0$ und $d = p_0 m_0$ mit $m = |m_0| > 1$ ist, so gilt $(B - A)/p \equiv h(d) \pmod{p}$. *Z. Suetuna.*

Tornheim, Leonard: Minimal basis and inessential discriminant divisors for a cubic field. Pacific J. Math. **5**, 623—631 (1955).

The author in this paper demonstrates the followings: Lemma 1. If K is any cubic field, then $K = Q(\theta)$ with $\theta^3 + a\theta^2 + b = 0$, where (i) a and b are rational integers, (ii) no factor of a has its cube dividing b , and (iii) if $3 \mid a$, then the discriminant $\Delta = -b(4a^3 + 27b)$ of θ is not divisible by 3^4 unless $3 \mid b$. Theorem 1. Let θ satisfy the conditions of Lemma 1. A minimal basis of $Q(\theta)$ is

$$\omega_1 = 1, \omega_2 = \theta, \omega_3 = \{B^2 + aB + (B + a)\theta + \theta^2\}/D,$$

where D is a product of prime powers p^e determined by the prime powers p^{2s} for

which $(p^2)^s \parallel \Delta$ as described below and B is a common solution of the congruences given below: (1) If $(p, 3b) = 1$, then $e = s$ and $3B + 2a \equiv 0 \pmod{p^e}$. (2) If $p|a$, $p \nmid b$, then $e = 0$. Also $e = s - 1$ if $p \nmid 3$ and $e = s - 2$ if $p = 3$. (3) If $p|a$, $p^2 \nmid b$, then $e = 1$ and $B \equiv 0 \pmod{p^e}$. Also $e = s - 1$ unless $p = 3$ and $p^2|a$ and then $e = s - 2$. (4) If $p|3b$, $(p, 2a) = 1$, then $e = s$ and $B \equiv 0 \pmod{p^e}$. (5) If $p = 3$, $3|a$, $3 \nmid b$, then $e \leq 1 = s$; and $e = s$ if and only if $b + a \equiv \pm 1 \pmod{9}$ and then $B \equiv -b \pmod{3}$. (6) If $p = 2$, $(2, a) = 1$, $2^t \parallel b$ and (a) if t is odd, then $e = s - 1$ and $B \equiv 0 \pmod{2^e}$; (b) if $t = 2$ then $e = s - 1$ unless $H + a \equiv 0 \pmod{4}$, where $H = -\Delta/4^{s-1}b$, and then $e = s$. Also $3B + 2a \equiv 2^{s-1} \pmod{2^s}$. (c) if $t > 2$ and even, then $e = s - 1$ unless $a + c \equiv 0 \pmod{4}$, where $c = b/2^t$, and then $e = 2$. Also $B \equiv 2^{s-1} \pmod{2^s}$. Theorem 2. The largest inessential discriminant divisor F is 1 except it is 2 in Case 6b of Theorem 1 when $H - 3a + 2^{e-1} \equiv 0 \pmod{2^3}$ and in Case 6c when $a + c + 2^{e-1} \equiv 0 \pmod{2^3}$. Lemma 1 sets forth for consideration an important idea namely to choose a value for θ so that the results arrived at in the Theorem 1 to be stated in the clearest way. It should be of interest to find out if it should be not possible to select θ in a more convenient way than it is done in Theorem 1. Concerning the Theorem 1, it is necessary to mention that G. F. Voronoj solved already the same problem in 1894 taking as starting-point another value for θ . (Collected papers, vol. I, 28—81, this Zbl. 49, 28).

C. P. Popovici.

Inaba, Eizi: On cohomology groups in a field, which is complete with respect to a discrete valuation. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 6, 25—29 (1955).

Let K be a field which is complete with respect to a discrete valuation and let its residue class field \mathfrak{K} be perfect. Let G be the Galois group of a maximal separable extension L of K and let \mathfrak{G} be the Galois group of the residue class field \mathfrak{L} of L over \mathfrak{K} . Finally let L^* (\mathfrak{Q}^*) denote the multiplicative group of all non-zero elements in L (\mathfrak{Q}), and let Z denote the additive group of rational integers, on which G operates trivially. The author generalizes to higher dimensions the cohomological version of Witt's theorem (this Zbl. 16, 51), by proving that for all $n \geq 1$ there is a canonical isomorphism $H^n(G, L^*) \approx H^n(G, Z) \times H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{Q}^*)$. An application is given in case generalized local class field theory (cf. Moriya, this Zbl. 47, 272) holds over K , when it is proved that $H^n(G, L^*)$ is trivial if $n \neq 2$, and isomorphic to the additive group of the rationals mod. Z if $n = 2$. (In this respect cf. Tate, this Zbl. 47, 37).

W. H. Cockcroft.

Mattuck, Arthur: Abelian varieties over p -adic ground fields. Ann. of Math., II. Ser. 62, 92—119 (1955).

In this paper, the author gives a generalization of E. Lutz' theorem on elliptic curves (this Zbl. 17, 53), i. e., he presents a complete proof of the following assertion: Let A be an Abelian variety of dimension n defined over a field k of characteristic zero complete under a non-archimedean valuation. Then, the group of rational points of A over k contains a subgroup which is isomorphic to the n -fold direct sum of the additive group of integers in k . If k is locally compact, the subgroup is of finite index. In Lutz' case, k is a p -adic number-field, which is locally compact; a generalization of her result has been expected for some time. The main idea of the author is the following: He proves the theorem first for Jacobian varieties by a similar idea as classical proof of Jacobi's inversion theorem; then, he reduces the general case to the case of Jacobian varieties by the aid of the Poincaré reducibility theorem. A careful foundation for the theory of algebraic varieties over complete non-archimedean fields of characteristic zero is given.

J. Igusa.

Zahlentheorie:

● Jones, Burton W.: Theory of numbers. New York: Rinehart & Co., Inc. 1955. XI, 143 p. \$ 3.75.

Dieses Buch ist sehr geeignet, als erste Einführung in die elementare Zahlen

theorie zu dienen. Hand in Hand mit der Entwicklung der Theorie werden die Sätze und Verfahren durch Zahlenbeispiele erläutert, zahlreiche Übungsaufgaben sind in den Text eingestreut. Im 1. Kapitel wird eine skizzenhafte Einführung des Zahlensystems gegeben, beginnend mit den natürlichen Zahlen, endend mit den komplexen Zahlen. Die Teilbarkeitstheorie bis zum Fundamentalsatz wird entwickelt. Im 2. Kapitel werden periodische Dezimalbrüche sowie der Kongruenzkalkül behandelt; die elementaren zahlentheoretischen Funktionen werden erklärt. Das 3. Kapitel behandelt einige einfache diophantische Gleichungen sowie lineare diophantische Gleichungen in mehr als 2 Unbekannten. Gegenstand des 4. Kapitels sind die Kettenbrüche. Als Anwendung wird die Pellsche Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ behandelt. Das 5. Kapitel hat die Überschrift „nichtlineare Kongruenzen“. Anzahl der Kongruenzwurzeln, Potenzreste und primitive Wurzeln sind der Hauptinhalt. Das 6. Kapitel gibt die Theorie der quadratischen Reste bis zum Jacobisymbol; es schließt mit der Darstellbarkeit als Summe zweier Quadrate. *H. Ostmann.*

Moessner, Alfredo: *Problemi diofantei.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **10**, 574—576 (1955).

Si danno alcune relazioni numeriche di natura diofantea. Zusammenfassg. des Autors.

Schinzel, André: *Sur l'équation indéterminée $x^2 + l = y^3$.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **24**, 271—274 (1955).

Verf. zeigt zunächst, daß die Arbeit von H. Lorent mit demselben Titel fehlerhaft ist, was auch der Ref. bereits festgestellt hatte (dies. Zbl. **65**, 29). Dann führt er größtenteils ohne Beweis ein paar Sätze an, die aussagen, daß die im Titel angegebene Gleichung keine ganzzahlige Lösung hat, wenn l von der Gestalt $b^2 - a^3$ oder $4a^2 - 8b^3$ oder $2a^2 - 8b^3$ oder $-2a^2 - 8b^3$ ist, wobei a und b einfache Teilbarkeitsbedingungen erfüllen. *N. Hofreiter.*

Harris, V. C.: *An analog of an identity of Jacobi.* Bol. mat. **28**, 17 (1955).

The purpose of this note is to exhibit an expression involving the sums of the divisors of the even integers. Zusammenfassg. des Autors.

Vandiver, H. S.: *Divisibility problems in number theory.* Scripta math. **21**, 15—19 (1955).

Plauderei über einige ungelöste zahlentheoretische Teilbarkeitsprobleme.

H. Ostmann.

Carlitz, L.: *A note on power residues.* Duke math. J. **22**, 583—587 (1955).

Es sei $p = km + 1$ eine Primzahl mit $k > 1$, $m > 1$ und g eine Primitivwurzel mod p . Ist für eine Zahl a zwischen 1 und $p - 1$ ($0 \leq i < k - 1$, $0 \leq s \leq m - 1$) $a \equiv g^{ks+i} \pmod{p}$, dann heiße a in der Klasse C_i enthalten. Ist ferner $g^m \equiv w \pmod{p}$, so ist

$$A_i = \prod_{a \in C_i} a \equiv \prod_{s=0}^{m-1} g^{ks+i} \equiv (-1)^{m-1} w^i \pmod{p}.$$

Wird $(-1)^m w^{-i} A_i = -1 + p \Omega_i$ gesetzt, so wird nun der Rest von $\Omega_i \pmod{p}$, also der Rest von $A_i \pmod{p^2}$, mittels der Bernoullischen Zahlen explizit angegeben. Hieraus ergibt sich insbesondere für $p = 2m + 1$ mit geradem m ($k = 2$) $\Omega_0 - \Omega_1 \equiv 2B_m \pmod{p}$, woraus folgt

$$\frac{1}{p} \left(\prod_{\left(\frac{a}{p}\right)=1} a + \prod_{\left(\frac{b}{p}\right)=-1} b \right) \equiv 2B_{(p-1)/2} \pmod{p},$$

eine Kongruenz, welche eine bekannte Kongruenzrelation der Klassenzahl des quadratischen Körpers $R(\sqrt{p})$ in sich enthält [s. Verf., Proc. Amer. math. Soc. **4**, 535—537 (1953)]. *Z. Suetuna.*

Möller, Kurt: *Untere Schranke für die Anzahl der Primzahlen, aus denen x, y, z der Fermatschen Gleichung $x^n + y^n = z^n$ bestehen muß.* Math. Nachr. **14**, 25—28 (1955).

Verf. beweist: Besteht n aus r verschiedenen ungeraden Primteilern, so besitzen y und z ($x < y < z$) mindestens je $r + 1$ verschiedene Primteiler, x mindestens r solche (der Fall $r = 1$ ist bereits bekannt). Ist $n = 2u$, $u \equiv 1(2)$, und hat u jetzt r verschiedene Primteiler, so haben überdies x und y je mindestens $2r - 1$ verschiedene Primteiler. Allgemeiner wird bewiesen: $A = x^n \pm y^n$, $(x, y) = 1$, hat mindestens $r + 1$ verschiedene Primteiler, wenn n aus r verschiedenen ungeraden Primteilern besteht, ausgenommen die Fälle $1^3 + 2^3 = 9$ und bezüglich $x^n - y^n$ der Fall $x - y = 1$. In diesen Ausnahmefällen besitzt A bei ungeradem n mindestens r verschiedene Primteiler. Die Beweisführung verläuft elementar. *H. Ostmann.*

Vandiver, H. S.: On the divisors of the second factor of the class number of a cyclotomic field. Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 780—783 (1955).

In Hinblick auf die Fermatsche Vermutung wendet Verf. auf ein Kriterium (D. H. Lehmer, E. Lehmer und Verf.; s. dies. Zbl. **55**, 40), das unter der Voraussetzung $h_2 \not\equiv 0 \pmod{l}$ (h_2 zweiter Klassenzahlfaktor des Körpers der l -ten Einheitswurzeln, l ungerade Primzahl) gilt, eine von Nicol und dem Verf. (s. dies. Zbl. **64**, 280) angegebene Rekursionsformel zur Bestimmung gewisser Koeffizienten an. Eine numerische Auswertung sei jedoch nur mittels großer Rechenautomaten möglich.

H. Ostmann.

Scholz, B.: Bemerkung zu einem Beweis von Wieferich. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **58**, 45—48 (1955).

Wieferich und Kempner haben bewiesen, daß alle natürlichen Zahlen in höchstens neun Kuben additiv zerlegbar sind. In der vorliegenden Arbeit vereinfacht der Verf. den Beweis. Nach Wieferich ist die Zerlegbarkeit jeder hinreichend großen Zahl z in neun nichtnegative Kuben bewiesen, wenn sich z in der Form $(1) z = a^3 + b^3 + c^3 + A(6A^2 + 6m)$ darstellen läßt, wobei a, b, c, A, m ganze Zahlen ≥ 0 sind, $m < A^2$, und außerdem m eine durch drei Quadrate darstellbare Zahl ist. Der Verf. betrachtet alle Zahlen z mit $8 \cdot 8^{3^v} < z \leq 8 \cdot 8^{3^{v+1}}$ und zeigt, daß diese z in der Form (1) darstellbar sind, wenn $v \geq 3$ ist. Nach der v. Sterneckschen Tabelle gilt die Zerlegbarkeit in höchstens neun Kuben für alle Zahlen $\leq 4 \cdot 10^4$. Es bleibt dann noch, die Zahlen $(2) 4 \cdot 10^4 < z < 8 \cdot 8^9$ zu untersuchen. Nach der v. Sterneckschen Tabelle ist jede Zahl zwischen 10^4 und $2 \cdot 10^4$ in höchstens sechs Kuben zerlegbar. Der Verf. zeigt, daß er die Zahlen in (2) auf die Form $z = i^3 + j^3 + k^3 + z'$ bringen kann, worin $10^4 < z' < 2 \cdot 10^4$ ist, womit der Beweis vollendet ist.

S. Selberg.

Volkman, Bodo: Ein Satz über die Menge der vollkommenen Zahlen. J. reine angew. Math. **195**, 152—155 (1955).

Es sei $U_i(x)$ die Anzahl der ungeraden natürlichen Zahlen $n \leq x$, für die $\sum_{d|n} d = 2^i n$ gilt, wobei i eine beliebige natürliche Zahl bedeuten soll. Dann zeigt Verf., daß $U_i(x) = O(x^{1-1/2(i+2)})$ erfüllt ist. Insbesondere folgt für $i = 1$, daß die Anzahl der x nicht übertreffenden ungeraden vollkommenen Zahlen der Abschätzung $U_1(x) = O(x^{5/6})$ genügt. Siehe dazu B. Hornfeck, folgendes Referat.

H. J. Kanold.

Hornfeck, Bernhard: Zur Dichte der Menge der vollkommenen Zahlen. Arch. der Math. **6**, 442—443 (1955).

Verf. beweist auf sehr einfache Weise, daß für die Anzahl $V(x)$ der vollkommenen Zahlen (d. h. Zahlen n mit $\sum_{d|n} d = 2n$) unterhalb x gilt: $V(x) < \sqrt{x}$.

H. J. Kanold.

Salié, Hans: Über die Dichte abundanter Zahlen. Math. Nachr. **14**, 39—46 (1955).

A natural number n is called λ -abundant if the sum of its divisors is $\geq \lambda n$; if $A(x; \lambda)$ is the number of λ -abundant numbers $n \leq x$ then the asymptotic den-

sity of the λ -abundant numbers is given by $D(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \infty} A(x; \lambda)/x$. By a careful estimation of the density of the (λ -abundant) multiples of a set of primitive λ -abundant numbers (none of whose proper divisors are λ -abundant), the author shows that $D(6/5) > 0.744$, $D(4/3) > 0.680$, $D(3/2) > 0.569$, $D(2) > 0.246$, $D(3) > 0.018$, $D(4) > 0.000065$. This improves estimates given by the reviewer [S.-Ber. preuss. Akad. Wiss., Berlin, math.-naturw. Kl. 1933, 831–837 (1933)] which were 0.742, 0.676, 0.533, 0.241, 0.009, 0.00003, resp. — It is also proved that every sufficiently large number is either λ -abundant or the sum of two λ -abundant numbers.

F. A. Behrend.

Stöhr, Alfred: Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. I, II. J. reine angew. Math. 194, 40–65, 111–140 (1955).

Verf. gibt in den beiden Arbeiten eine ausführliche und umfangreiche Darstellung über die verschiedenen Fragen, die mit dem Basisbegriff in der neueren additiven Zahlentheorie zusammenhängen. Die Arbeit ist teils referierender Natur, teils werden auch die Beweise gegeben, soweit es ihr Umfang zuläßt. Auch eine Reihe neuer und bemerkenswerter Sätze des Verf. werden mit Beweisen mitgeteilt. Die ersten drei Paragraphen beschäftigen sich mit der Anzahlfunktion von Basen, und zwar mit Abschätzungen nach unten und oben, die sich im wesentlichen auf die Größen $\frac{\text{fin}}{\mathfrak{B}} \delta(\mathfrak{B}; \sqrt[h]{x})$, $\frac{\text{fin}}{\mathfrak{B}} \delta^*(\mathfrak{B}; \sqrt[h]{x})$, $\frac{\text{fin}}{\mathfrak{B}} \bar{\delta}^*(\mathfrak{B}; \sqrt[h]{x})$ beziehen, worin \mathfrak{B} alle Basen h -ter Ordnung durchläuft und $\delta, \delta^*, \bar{\delta}^*$ die (finite) Dichte, die asymptotische und die obere asymptotische Dichte bedeuten mit $\sqrt[h]{x}$ an Stelle des sonstigen x als Vergleichsfunktion (z. B.: $\delta(\mathfrak{B}; \sqrt[h]{x}) = \frac{\text{fin}}{x=1,2,\dots} B(x)/\sqrt[h]{x}$). In § 4 werden Basen von $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ behandelt und einige neue Relationen hergeleitet. § 5 ist der Diskussion des Minimalbasenbegriffs gewidmet. Rekurrente (das sind in gewisser Weise rekursiv definierte) Basen sind der Inhalt von § 6. Interessant ist § 7, wo hinreichende Kriterien für Nicht-Basen gegeben werden, z. B.: der größte gemeinsame Teiler aller Elemente von $\mathfrak{B} \cap [0, n]$ gehe mit n zugleich gegen ∞ ; dann ist \mathfrak{B} keine asymptotische Basis. Das nämliche gilt, wenn \mathfrak{B} endliche Vereinigung von p -adisch (p fest) konvergenten Mengen ist. In § 8 wird ausführlich der Schnirelmannsche Basisbegriff besprochen und mit dem jetzt üblichen verglichen. Hervorgehoben sei (mit etwas anderen Worten) der Satz: Ist \mathfrak{B} eine asymptotische Basis für eine (beliebige, aber feste) Restklasse, so hat jede durch höchstens endlich viele Abänderungen aus \mathfrak{B} entstehende Menge die nämliche Eigenschaft für eine eventuell andere Restklasse (mit nicht notwendig gleichem Modul). § 9 behandelt das Niven-Produkt von Zahlenmengen, § 10 die Projektion und Verdichtung von Zahlenmengen. § 11 ist den wesentlichen Komponenten vornehmlich gewidmet. Besonderes Interesse verdient der Satz: Zu jedem ganzen $k \geq 1$ gibt es k Basen h -ter Ordnung ($h \geq 2$) $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_k$ derart, daß auch $\mathfrak{B} = \sum_{n=1}^k \mathfrak{B}_n$ noch Basis h -ter Ordnung ist und die natürliche Dichte $\delta_*((h-1)\mathfrak{B}) = 0$ ist. — Im letzten Paragraphen werden noch einige mit dem Basisbegriff verwandte Fragen behandelt. In fast allen Paragraphen wird auf offene Fragen hingewiesen (von denen lediglich einige wenige in der Zwischenzeit geklärt werden konnten). Ein reichhaltiges Literaturverzeichnis ist am Schluß zusammengestellt.

H. Ostmann.

Kasch, Friedrich: Abschätzung der Dichte von Summenmengen. Math. Z. 62, 368–387 (1955).

Unter einer Basis \mathfrak{B} der Ordnung h bezüglich der Menge \mathfrak{Z} aller natürlichen Zahlen $n \geq 0$ versteht man bekanntlich eine Menge nichtnegativer ganzer Zahlen mit $h\mathfrak{B} = \mathfrak{Z}$, $(h-1)\mathfrak{B} \neq \mathfrak{Z}$. Ist weiter $l(m) (\leq h)$ die Minimalzahl von Summan-

den $b \in \mathfrak{B}$, die zur Darstellung von m benötigt werden, so nennt man nach Stöhr $\lambda = \overline{\lim}_{n=1,2,\dots} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n l(m)$ die mittlere Basisordnung von \mathfrak{B} . Verf. greift die schon mehrfach behandelte Frage auf nach Abschätzungen der Dichte $\gamma = \delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ durch Funktionen von λ und $\delta(\mathfrak{A}) = \alpha$. Bislang waren als bestes bekannt: $\gamma \geq \alpha + \alpha(1 - \sqrt[3]{\alpha})/\lambda$ ($= \alpha + (1/(1 + \sqrt[3]{\alpha})) \cdot \alpha(1 - \alpha)/\lambda$) (A. Brauer, dies. Zbl. 19, 6) und: $\gamma \geq \alpha + \frac{3}{4} \alpha(1 - \alpha)/\lambda$ [S. Selberg, Arch. Math. Naturvid. 48, Nr. 8, 111–118 (1944)], was für $\alpha > \frac{1}{9}$ besser ist, als die Brauersche Abschätzung. Unter Mitverwendung eines den Brauerschen Beweis wesentlich vereinfachenden Gedanken von Stöhr (s. dies. Zbl. 65, 275) gewinnt Verf.:

$$\gamma \geq \alpha + \frac{1 + \sqrt{\alpha + \alpha}}{(1 + \sqrt{\alpha})^2} \cdot \frac{\alpha(1 - \alpha)}{\lambda} \quad \text{und} \quad \gamma \geq \alpha + \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha + (1 - \alpha)}}{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2} \cdot \frac{\alpha(1 - \alpha)}{\lambda},$$

also eine Symmetrieeigenschaft im zweiten Summanden. Die nämlichen Abschätzungen gelten auch im asymptotischen Fall bezüglich $\gamma^*, \alpha^*, \lambda^*$ an Stelle von γ, α, λ . Am Schluß überträgt Verf. seine Überlegungen noch auf Differenzmengen $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ ($=$ Menge aller $a - b > 0, a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{B}$). H. Ostmann.

Scherk, Peter: An inequality for sets of integers. Pacific J. Math. 5, 585–587 (1955).

Aus dem Beweis eines Satzes von Besicovitch (dies. Zbl. 12, 394) über die Dichte der Summe $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ zweier Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen arbeitet Verf. die folgenden beiden Sätze heraus: (1) Es sei $x \in \mathfrak{A}$ für $x = 0, 1, 2, \dots, h$ ($h \geq 0$); 0 oder 1 seien in \mathfrak{B} ; $n \notin \mathfrak{C}$. Weiter sei $C(n) < A(n-1) + B(n)$. Dann gibt es ein $m \notin \mathfrak{C}$, $0 < m < n - h - 1$, so daß $C(m, n) \geq A(n-m-1) + B(m, n)$ ist [allgemein sei $A(x, y)$ die Anzahl der $a \in \mathfrak{A}$ mit $x < a \leq y$ und $A(x) = A(0, x)$]. – (2) Wieder sei $\{0, 1, \dots, h\} \subseteq \mathfrak{A}$ und 0 oder 1 in \mathfrak{B} , $n \notin \mathfrak{C}$. Weiter sei $1 > \alpha = \overline{\lim}_{x \geq h} A(x)/(x+1) > 0$. Dann gilt $C(n) \geq \alpha n + B(n)$. –

Mit $h = 0$ finden sich diese Aussagen im wesentlichen bereits bei Besicovitch (s. oben), für $h \geq 0$ bei Erdős [Ann. of Math., II. Ser. 43, 65–68 (1942)] ebenfalls mit der Beweisidee von Besicovitch. Leichte Verallgemeinerungen finden sich in des Ref. Buch „Additive Zahlentheorie“, Teil I, S. 133–136, Sätze 8–10 (Ergebn. d. Math., Heidelberg 1956) durchgeführt, ebenfalls nach dem Muster des Beweises von Besicovitch. H. Ostmann.

Hartman, S.: Sur un type de lacunarité. Matematiche 10, 57–61 (1955).

Eine Menge $\mathfrak{N} = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ nichtnegativer ganzer Zahlen erfüllt in der Bezeichnung des Verf. die Lückenbedingung (P), wenn ein positives K existiert, so daß es für jedes ganze $l > 0$ Sequenzen n_{k+1}, \dots, n_{k+l} in \mathfrak{N} gibt mit $n_{k+\lambda+1} - n_{k+\lambda} < K$ für alle $\lambda = 1, 2, \dots, l-1$. Es ist leicht, Mengen \mathfrak{N} mit verschwindender natürlicher Dichte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{x} = 0$ zu finden, für die (P) gilt. Ist die obere asymptotische Dichte $\lim_{x=1,2,\dots} \frac{N(x)}{x} = 1$, so ist (P), wie sofort zu sehen, schon mit $K = 1$ erfüllt. Andererseits gibt Verf. ein Beispiel einer Menge positiver asymptotischer Dichte $\lim_{x=1,2,\dots} \frac{N(x)}{x}$, die (P) verletzt. Die Vereinigung endlich vieler Mengen, für die (P) nicht gilt, verletzt (P) ebenfalls. H. Ostmann.

Rényi, Alfred: On the density of certain sequences of integers. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 8, 157–162 (1955).

Es sei $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ die kanonische Darstellung der natürlichen Zahl n , $r = r(n)$, $\alpha_i \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Man setzt $\Delta(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_r - r$. Verf. betrachtet die Menge \mathfrak{N}_k aller n mit $\Delta(n) = k$ und zeigt, daß die natürliche Dichte

d_k^* existiert und die Identität (*) $\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k = \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{p-z}\right)$ besteht (p Primzahl) [diese in der Arbeit mit (3) bezeichnete Formel enthält rechter Hand den Druckfehler „ $\prod_{p=0}^{\infty}$ “]. (*) ergibt für $z=0$ die natürliche

Dichte $d_0 = 6/\pi^2$ der quadratfreien Zahlen und für $z=1$ die Relation $\sum_{k=0}^{\infty} d_k = 1$.

Ferner ist $d_k \sim \frac{1}{2^{k+2}} \prod_{p=3}^{\infty} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} (k \rightarrow \infty)$. Der Beweis verläuft elementar. Es werden zunächst die Dichten gewisser Hilfsmengen bestimmt, was mit einer einfachen Siebbetrachtung gelingt.

H. Ostmann.

Kac, M.: A remark on the preceding paper by A. Rényi. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 8, 163–165 (1955).

Verf. gibt einen anders verlaufenden Beweis für die Existenz der Dichte d_k in der vorstehend besprochenen Arbeit von A. Rényi.

H. Ostmann.

Teuffel, E.: Beweise für zwei Sätze von H. F. Scherk über Primzahlen. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 58, 43–44 (1955).

Sei $p_1 = 1, p_2 = 2, \dots, p_n, \dots$ die Folge aller Primzahlen, und sei $P_m = \sum_{v=1}^m p_v$ gesetzt. Durch einen elementaren Induktionsschluß beweist Verf.: Ist $n \geq 2$ und $0 < 2k \leq P_{2n-1}$, so gibt es Darstellungen der Form $2k = \sum_{v=1}^{2n-1} \varepsilon_v p_v$, $\varepsilon_v = \pm 1$,

$\varepsilon_{2n-1} = +1$. — Hieraus gewinnt Verf. noch die Darstellungen $p_{2n+1} = \sum_{v=1}^{2n} \varepsilon_v p_v$,

$\varepsilon_v = \pm 1$, $\varepsilon_{2n-1} = \varepsilon_{2n} = +1$, und $p_{2n} = 2p_{2n-1} + \sum_{v=1}^{2n-2} \varepsilon_v p_v$, $\varepsilon_v = \pm 1$,

$\varepsilon_{2n-2} = -1$. [Vgl. hiermit die von Sierpiński angegebenen verwandten Darstellungen (s. dies. Zbl. 49, 31).]

H. Ostmann.

Kuhn, P.: Eine Verbesserung des Restgliedes beim elementaren Beweis des Primzahlsatzes. Math. Scandinav. 3, 75–89 (1955).

In der vorliegenden Arbeit gibt Verf. einen elementaren Beweis dafür, daß $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p = x + O(x \log^{-1/10} x)$. Der Beweis beruht auf der A. Selberg-

Ungleichung, der Tschebyscheff-Polignacschen Identität, samt einer klassischen Ungleichung von Tschebyscheff. Es sei $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta(x^{1/k})$

und $R(x) = \psi(x) - [x]$. Nach Tschebyscheff ist dann (1) $|R(x)| \leq 0,11x$ für $x \geq x_1$. Aus der Ungleichung von A. Selberg leitet Verf. her:

$$(2) \quad |R(x)| \log x \leq 2 \left| \sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1) R(x n^{-1}) \right| + O(x).$$

Der folgende Satz des Verf. spielt eine wichtige Rolle im Beweis: Falls für $\eta \geq N \geq x_1$ die Ungleichung $R(\eta) \leq \beta(N) \eta$ mit $\beta(N) = \beta \leq 0,11$ gilt und ferner die zwei Zahlen L und x den Ungleichungen $N^2 \leq L$, $L^2 \leq x$ genügen, gilt die Abschätzung

$$(3) \quad x^{-1} \left| \sum_{N < \eta \leq L} (\Lambda(\eta) - 1) R(x \eta^{-1}) \right| \leq 0,75 \beta (1 + \beta) \log(LN^{-1}) + O(\log L \log^{-1/2} N).$$

Aus (3) zusammen mit (2) konstruiert Verf. jetzt eine monoton wachsende Zahlenfolge natürlicher Zahlen $\{y_i\}$ und eine dazugehörige monoton abnehmende Zahlenfolge $\{\alpha(y_i)\}$ mit $y_1 = x_1$ und $\alpha(y_1) = \alpha(x_1) = 0,11$, so daß (4) $|R(x)| \leq x \alpha(y_i)$ für $x \geq y_i$. Es wird weiter gezeigt, daß man $\{y_i\}$ und $\{\alpha(y_i)\}$ so wählen kann, daß von einem gewissen Index $i = J$ an $y_{J+m} = [c_1 c_2^m]$, $\alpha(y_{J+m}) = c_3 c_4^m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, wo c_1, c_2, c_3, c_4 positive Konstanten sind. Hieraus erhält man endlich $R(x) = O(x \log^{-1/10} x)$.

S. Selberg.

Cugiani, Marco: Nuovi risultati sulle „Catene“ di numeri primi. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 38, 309—320 (1955).

Verf. führt frühere Untersuchungen (s. dies. Zbl. 55, 274) über Primzahlsequenzen innerhalb Intervallen der Form $((1-\eta)\xi, \xi)$, $0 < \eta < 1$, weiter. U. a. wird bewiesen: Es sei $\bar{\Theta} = \overline{\text{fin}} \Theta$, wobei der Primzahlsatz $\pi(x) = li(x) + O(x \cdot \exp(-\log^\Theta x))$ für Θ richtig sei (bekanntlich ist $\bar{\Theta} \geq \frac{4}{7}$). Es sei $\nu(\alpha \log \xi; \eta, \xi)$ die Anzahl der Primzahlsequenzen $p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+i}, \dots$ in $((1-\eta)\xi, \xi)$ mit $p_{n+i+1} - p_{n+i} < x \log \xi$, $\nu^*(\dots)$ die nämliche Anzahl mit $p_{n+i+1} - p_{n+i} > \alpha \log \xi$. Dann existieren $\mu_0 < 1$ und $\lambda_0 > 1$ so, daß für alle $\alpha \in (\mu_0, 1)$ bzw. $\alpha \in (1, \lambda_0)$ (offene Intervalle) $\exp(\log^\Theta \xi) = o(\nu(\alpha \log \xi; \eta, \xi)) = o(\nu^*(\dots))$ für alle $\Theta < \bar{\Theta}$ ist, und das nämliche gilt, wenn $\alpha \log \xi$ durch $\alpha \log p_i$ ersetzt wird. — Weitere Relationen ähnlicher Art werden noch hergeleitet.

H. Ostmann.

Mycielski, Jan: On powers. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 129—132 (1955).

Verf. betrachtet die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen $P > 1$, die keine Potenz k^l mit $l > 1$ sind und weist auf einige Analogien zur Primzahlmenge hin. Ist $P(x)$ die Anzahl der $P \leq x$, so ist

$$P(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) \left[\sqrt[m]{x} - 1 \right] = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(\log x)^m}{m! \zeta(m)} + O(\log x).$$

— Schreibt man $n = a(n)^{b(n)}$, wobei $a(n)$ minimal, $b(n)$ maximal (beide positiv ganz) gewählt sind, so werden noch Relationen für $b(n)$ und $a(n)$ hergeleitet. — Schließlich gewinnt Verf. noch die Identität $\zeta(s) = 1 + \sum_P \frac{1}{P^s - 1}$. H. Ostmann.

Chowla, S. and W. E. Briggs: On the number of positive integers $\leq x$ all of whose prime factors are $\leq y$. Proc. Amer. math. Soc. 6, 558—562 (1955).

This paper has been reviewed in this Zbl. 55, 275.

L. K. Hua.

Delange, Hubert: Quelques théorèmes tauberiens relatifs à l'intégrale de Laplace et leurs applications arithmétiques. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 14, 87—103 (1955).

In a previous paper (this Zbl. 56, 331) the author has proved a tauberian theorem which as a special case contains a well known theorem of Ikehara. In the present paper he states two theorems which are special cases of the previous one, and makes use of them to prove some, partly known, theorems dealing with the theory of primes. The proves are based on the well known fact that the Riemann Zeta-function and the Dirichlet L -series have no zeros for $\Re(s) \geq 1$. Amongst others the author proves the following new theorem: Let $\omega(n)$ be the number of different prime divisors in n and $\Omega(n)$ the total number of prime divisors, and let q and q' be two naturale numbers > 1 , and r and r' two arbitrary integers. Then the number of integers $n \leq x$ with $\omega(n) \equiv r \pmod{q}$ and $\Omega(n) \equiv r' \pmod{q'}$ is asymptotically $x/q q'$.

S. Selberg.

Voelker, Dietrich: Verallgemeinerung fundamentaler zahlentheoretischer Funktionen. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 10, 137—139 (1955) [Spanisch].

Es werden die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen (bzw. der zugehörigen äquivalenten Laplace-Integrale) betrachtet z. B. der Reihen für die Funktionen $\{\zeta(2s)/\zeta(s)\}^m$, $1/\{\zeta(s)\}^m$, $\zeta^{(m)}(2s)/\zeta(s)$ ($m \geq 1$, ganz). Wenn die zugehörigen Konvergenzabszissen $= \frac{1}{2}$ wären, so wäre die Riemannsche Vermutung richtig (vgl. das folgende Ref.).

K. Prachar.

Voelker, Dietrich: Hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Riemannschen Vermutung. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 10, 141—149 (1955) [Spanisch].

Verf. bemerkt, daß die Richtigkeit der Riemannschen Vermutung folgen würde, falls das Laplace-Integral $\int_0^\infty e^{-st} M(e^t) dt$ [$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$ ist die Mertenssche

Funktion] die Konvergenzabszisse $\frac{1}{2}$ hätte und ebenso wenn $M(x)$ durch $L(x) = \sum_{n \leq x} \lambda(n)$ [$\lambda(n) =$ Liouvillesche Funktion] ersetzt wird. Bem. des Ref.: Es ist bekannt, daß Bedingungen dieser Art nicht nur hinreichend sondern auch notwendig für die Richtigkeit der Riemannschen Vermutung sind (vgl. z. B. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*. Theorem 14.25 (B), dies. Zbl. **42**, 79).

K. Prachar.

Halberstam, H.: Über additive zahlentheoretische Funktionen. *J. reine angew. Math.* **195**, 210—214 (1955).

Sei $\omega(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n und $f(x)$ ein ganzzahliges irreduzibles Polynom. Dann gilt [abgesehen von trivialen Fällen, wie z. B. $f(x) = x$]

$$\sum_{p \leq n} \omega(f(p)) = \{1 + o(1)\} \frac{n \log \log n}{\log n} \quad (n \rightarrow \infty)$$

(wo p über Primzahlen läuft). Der Beweis wird vor allem dadurch kompliziert, daß $f(p)$ ($p \leq n$) auch Primteiler $> n$ haben kann. Beim Beweis werden gewisse Methoden von Erdős (dies. Zbl. **12**, 149) [wo der Satz für $f(p) = p - 1$ bewiesen wurde] und Erdős (dies. Zbl. **46**, 41) benützt. Verf. gibt ohne Beweis an, daß man durch Kombination dieser Methoden mit einer von ihm früher (dies. Zbl. **64**, 42) verwendeten Methode und einem Satz von Tatzawa [Japanese *J. Math.* **21**, 93—111 (1951)] den folgenden sehr allgemeinen Satz beweisen kann: Sei $F(m)$ eine stark additive Funktion [d. h. $F(nm) = F(n) + F(m)$ für $(m, n) = 1$ und $F(p^a) = F(p)$ für $a = 2, 3, \dots$], $\varrho(p)$ die Anzahl der mod p verschiedenen Lösungen von $f(n) \equiv 0 \pmod{p}$, $A(n) = \sum_{p \leq n} F(p) \varrho(p)/p$, $B(n) = \sum_{p \leq n} F^2(p) \varrho(p)/p$. Wenn dann $F(p) = O(1)$, $B(n) \rightarrow \infty$ und $(\log \log n)^3 = o(B(n))$ ist (für $n \rightarrow \infty$), so gilt für jedes natürliche k

$$\left[\sum_{p \leq n} \{F(f(p)) - A(n)\}^k \right] / \pi(n) \{B(n)\}^{k/2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^k e^{-u^2/2} du$$

[wo $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq n$ sei].

K. Prachar.

Lambek, J. and L. Moser: Some associative operations on integers. *Math. Mag.* **29**, 59—62 (1955).

The authors prove the assertion: If the integer-valued increasing function $f(n)$ satisfies $f(0) = 0$ and $\Delta f(n) + \Delta f(m) \leq \Delta f(n+m) + 1$, then the binary operation

$$m \circ n = m + n + f(g(m) + g(n)) - f(g(m)) - f(g(n)),$$

where $u = g(m)$ is the largest integer u with $f(u) \leq m$, is associative. Further they make trivial remarks on some associative but not necessarily commutative binary operations.

H. J. A. Duparc.

Cellitti, Carlo: Sopra una proprietà delle forme quadratiche binarie primitive di determinante $D \equiv 1 \pmod{4}$. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **10**, 527—530 (1955).

Verf. zeigt: es gibt ein Vertretersystem der Klassen uneigentlich primitiver binärer quadratischer Formen $ax^2 + 2bxy + cy^2$, welches gleichzeitig ein Vertretersystem der Klassen bez. der Untergruppe $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit $\beta \equiv 0 \pmod{2}$ der unimodularen Gruppe ist. Hierbei ist $c \equiv 2 \pmod{4}$.

M. Eichler.

Piehler, Joachim: Über die Charaktere quadratischer Formen. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg* **4**, 1215—1224 (1955).

Die Arbeit schließt sich an die von G. Pall (dies. Zbl. **11**, 54) an, welche die von Smith und Minkowski begründete Theorie der Ordnungsinvarianten vereinfacht. Aus den Ordnungsinvarianten o_ν werden Invarianten $J_\nu^* = \pm 2^{-a_\nu} o_\nu$ nach einer hier nicht wiederzugebenden Regel gebildet. Die ν -te primitive Begleitform besitzt dann quadratische Restcharaktere genau nach den Primdiskriminantenteilern von J_ν^* , d. h. den Teilern δ von J_ν^* , welche zusammen mit $J_\nu^* \delta^{-1}$ Diskriminantanten

binärer quadratischer Formen sind, in dieser Weise aber nicht weiter zerlegt werden können. Zwischen den Charakteren bestehen zwei Bindungen, von denen eine unter Umständen fortfällt. Gibt man die α_r und die Charaktere gemäß diesen Bindungen vor, so gibt es hierzu ein Geschlecht quadratischer Formen. Trotz unbestreitbarer Vereinfachungen der Theorie gegenüber Smith und Minkowski bleibt eine Vielzahl von Fällen zu unterscheiden. Nach Meinung des Ref. verdient, was Eleganz und Handlichkeit betrifft, die lokale Äquivalenztheorie den Vorzug, die sich auf die kanonische Gestalt der Form stützt. S. hierzu O. T. O'Meara, dies. Zbl. **64**, 38, sowie die in diesem Referat genannte Literatur. *M. Eichler.*

Val'fiš (Walfisz), A. Z.: Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. XVII. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze **21**, 3—64 (1955) [Russisch].

[Part XVI, *ibid.* **20**, 1—20 (1954)]. For real $x > 0$ and odd integer k let $V_k(x)$, $A_k(x)$ respectively denote the volume and the number of integer points in the sphere $y_1^2 + \dots + y_k^2 \leq x$. The author obtains estimates for the upper and lower limits of (*) $4x(A_k(x) - V_k(x))/k V_k(x)$ as $x \rightarrow \infty$ through integer values. The exact shape of the estimate depends on the residue of k modulo 8. For example, when $k = 2l + 1 \equiv 1 \pmod{8}$ the upper limit is

$$1 + 2(2^{-l} + 2 \cdot 3^{-1-l} + 4^{-l} + 5^{-l} + \text{similar terms} + 3 \cdot 49^{-l})$$

with an error of at most the order 51^{-l} ; there being an explicit but complicated formula for an upper bound of the error. The proof depends on Petersson's result [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **5**, 116—150 (1926)] that (*) for $x - \frac{1}{2}$ an integer can be represented as a „singular series“ with error $O(n^{-1/2} \log n)$. The required results then follow from an elaborate but elementary estimation of the upper and lower bounds of singular series. The proof requires large tables of the occurring coefficients and other auxiliary numerical functions. The author also generalizes a further result of Petersson that there are integers such that (*) is positive or negative respectively when $x - \frac{1}{2} = \text{integer} = m_1, m_2(M)$. He shows that $M = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$ will do and that for explicitly given m_1, m_2 and x of the above form the expression (*) is always greater than $2(2^{-k/2} + 0,001 \cdot 3^{-k/2})$ in absolute value and of the required sign. *J. W. S. Cassels.*

Armitage, J. V.: On a method of Mordell in the geometry of numbers. Mathematika **2**, 132—140 (1955).

Verf. zeigt folgenden Satz: Es sei $f(x_1, \dots, x_n)$ die Distanzfunktion eines Sternkörpers S mit Mittelpunkt im Punkt $(0, \dots, 0)$ des R_n . Es besitze weiter S Automorphismen mit folgenden Eigenschaften: 1. Es existiere eine natürliche Zahl r , so daß es zu jedem Punkt p des R_n mit $f \neq 0$ einen Automorphismus A von S gibt, so daß $A p$ die Gestalt hat $(\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_r, 0, \dots, 0)$. 2. Die Adjungierte jedes Auto-

morphismus von S ist wieder ein solcher. Dann wird behauptet: Ist S_{n-1} der $(n-1)$ -dimensionale Sternkörper $f(-x_2 - \dots - x_r, x_2, \dots, x_n) \leq 1$ im (x_2, \dots, x_n) -Raum, dann ist

$$\Delta(S)^{n-2} \geq f\left(\underbrace{1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0\right)^n \Delta(S_{n-1})^n$$

(Δ kritische Determinante im Sinne von K. Mahler). Dieser Satz enthält Sätze von L. J. Mordell und Verf. macht Anwendungen auf $|x_1| (x_2^2 + \dots + x_n^2)^{(n-1)/2} \leq 1$ ($n \geq 3$). *E. Hlawka.*

Rogers, C. A.: The moments of the number of points of a lattice in a bounded set. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **248**, 225—251 (1955).

Es sei im R_n durch $\varrho(x)$ die charakteristische Funktion einer beschränkten Jordan-meßbaren Menge S gegeben; dann ist für jedes Gitter Γ , $\varrho(\Gamma) = \sum_{x \in \Gamma} \varrho(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte von Γ in S . $\Gamma = \Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \dots, \omega)$ sei das Gitter mit der Determinante 1, erzeugt von den Punkten $\alpha_i = (\delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,n-1}, \alpha_i \omega^{-n}) \omega$

($i = 1, \dots, n$; δ_{ik} Kroneckersymbol, $\alpha_n = 1$); dann wird folgender Mittelwert über ϱ definiert: $\lim_{\omega \rightarrow +0} \int_0^1 \dots \int_0^1 \varrho(\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \omega)) d\alpha_1, \dots, d\alpha_{n-1}$ (wenn er existiert). Verf. zeigt nun die Existenz dieses Mittelwertes nicht für ϱ , sondern für ϱ^k , wo die natürliche Zahl k eingeschränkt ist durch $\max_{m=1, \dots, k} [m^2(k-m) + 1] < n$.

Über den Nachweis der Existenz dieses Mittelwertes Σ der k -ten Potenzen der Anzahl der Gitterpunkte in S wird noch eine explizite Formel für Σ gegeben, und zwar in der Gestalt einer unendlichen Reihe: $\varrho^k(0) + \left(\int \varrho(x) dx\right)^k + \dots$, wo die weiteren Glieder Integrale über $m(k-m)$ ($m = 1, \dots, k-1$) dimensionale Gitter sind. Als erste Anwendungen dieser wichtigen Untersuchung zeigt der Verf. für $n \geq 6$ eine Verschärfung eines Satzes des Ref. (s. dies. Zbl. 28, 206). *E. Hlawka.*

Cugiani, Marco: Sopra una questione di approssimazione diofantea non lineare. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 489—497 (1955).

Verf. studiert die Verteilung der Zahlen $p^2 - q^2 \lambda$ (λ reell, > 0), wenn p und q unabhängig voneinander alle ganzen Zahlen durchlaufen. *E. Hlawka.*

Kurzweil, J.: On the metric theory of inhomogeneous diophantine approximations. Studia math. 15, 84—112 (1955).

Sei E die additive Gruppe der reellen Zahlen, K die eindimensionale Torusgruppe und $\Phi: x \rightarrow x'$ der natürliche Homomorphismus von E auf K . Es sei μ das Haarsche Maß auf K , und mit $I[g, h]$ bezeichnen wir die Menge der x' auf K , für welche x im Intervall $g \leq x \leq h$ liegt. [Es ist $\mu(I[g, h]) = h - g$, wenn $0 < h - g \leq 1$.] Es sei nun weiter B eine nicht leere Menge von Folgen $\{b_i\}$ von reellen Zahlen mit $b_i > 0$, $b_{i+1} < b_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \infty$, dann sei $\alpha(B)$ die Menge der reellen Zahlen x ($0 \leq x < 1$), für welche folgendes gilt: Für jede Folge $\{b_i\} \in B$ gehören fast alle $y' \in K$ zu unendlich vielen Intervallen $I[x - b_i, x + b_i]$ ($i = 1, 2, \dots$). Es sei nun \tilde{B} die Menge aller Folgen $\{b_i\}$ mit obigen Eigenschaften, dann enthält $\alpha(\tilde{B})$ keine rationale Zahl. H. Steinhaus hat die Frage aufgeworfen, ob alle irrationalen Zahlen aus $(0, 1)$ in $\alpha(\tilde{B})$ liegen. Diese Frage wird hier beantwortet, und zwar so: Ist Y die Menge aller Zahlen y ($0 \leq y < 1$) für die es ein $d_y \geq 1$ gibt, so daß y nicht die Approximationen $1/(d_y q)^2$ zuläßt (d. h. für welche es nicht unendlich viele rationale Zahlen p_n/q_n , $q_{n+1} < q_n$ mit $|y - p_n/q_n| \leq 1/(d_y q_n)^2$ gibt), so ist $\alpha(\tilde{B}) = Y$. Daraus folgt, daß $\alpha(\tilde{B})$ nicht-leer ist und ihr Maß gleich 0 ist. Es wird andererseits gezeigt: Besteht B nur aus einer einzigen Folge $\{b_i\}$, dann ist das Maß von $\alpha(B)$ gleich 1. Verf. zeigt noch weitere Verallgemeinerungen (darunter auch mehrdimensionale). *E. Hlawka.*

Mordell, L. J.: Some Diophantine inequalities. Mathematika 2, 145—149 (1955).

Let $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ be a real function of the real variables x_1, \dots, x_n . The author shows that in many cases it is possible to find a constant k depending only on the function f with the following property: To every set of real numbers x_1, \dots, x_n in $0 \leq x_j \leq 1$ there exists a set $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, each ε_j being 0 or 1 such that (*) $f(x_1 - \varepsilon_1, \dots, x_n - \varepsilon_n) \leq k$. The underlying method is to assume that (*) is false for every set of ε_j and to deduce a contradiction from the resultant inequality

$$\sum_{\varepsilon} f(x_1 - \varepsilon_1, \dots, x_n - \varepsilon_n) \prod_j (x_j - \varepsilon_j)^{\lambda_j} \geq k \sum \prod_j (x_j - \varepsilon_j)^{\lambda_j}$$

for suitably chosen λ_j independent of x_1, \dots, x_n . Subsidiary devices are also used. A typical case is $k = 2^{-n}$, $f(x) = |x_1 \dots x_n| g_1(x_1) \dots g_n(x_n)$ where the $g_j(x)$ are any functions which satisfy $|g_j(x) - 1| < 1$ in $0 \leq x_j \leq 1$ and have the shape

$$g_j(x) = 1 + x_1 g_{j1}(x_2, \dots, x_n) + x_2 g_{j2}(x_1, x_3, \dots, x_n).$$

The work arose from an attempt to find neater proofs of similar inequalities of Birch and Swinnerton-Dyer which arise in the consideration of Minkowski's conjecture about the product of inhomogeneous linear forms (to appear in *Mathematika*).
J. W. S. Cassels.

Kubilius, I. P.: Wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden in der Zahlentheorie. Vestnik Leningradsk. Univ. 10, Nr. 10 (Ser. mat. fiz. chim. 4), 59—60 (1955) [Russisch].

Eine Übersicht der Untersuchungen über Anwendungen wahrscheinlichkeitstheoretischer Methoden in der Zahlentheorie wird gegeben. Es werden die Ergebnisse von P. Turán, P. Erdős, M. Kac, V. LeVeque in der Theorie der Verteilung der Werte additiver und multiplikativer arithmetischer Funktionen, von A. Renyi über die Methode des „großen Siebes“ und von Ju. V. Linnik über die Arithmetik der Quaternionen dargelegt. — Einige Ergebnisse des Verf. werden angeführt.

Analysis.

Turán, P.: On a new analytical method and its applications. Colloquium math. 3, 91—112 (1955).

Verf. gibt einen sehr lesenswerten Bericht über seine Methode und ihre Anwendungen (vgl. das Buch des Verf. „Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen“, dies. Zbl. 52, 46).
E. Hlawka.

● **Mangoldt, H. v. und Konrad Knopp: Einführung in die Höhere Mathematik. I. Bd.: Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, Analytische Geometrie, Algebra, Mengenlehre.** 10., vollständig Neubearb. Aufl. Leipzig: S. Hirzel Verlag 1955. XVI, 564 S., 116 Fig. im Text.

Kapitelüberschriften: 1. Kombinatorik, Gruppen. 2. Determinanten. 3. Das System der rationalen Zahlen. 4. Das System der reellen Zahlen. 5. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen. 6. Grundbegriffe der analytischen Geometrie. 7. Das System der komplexen Zahlen. 8. Veränderliche und Funktionen. 9. Gerade und Ebene. 10. Grenzwerte. 11. Zahlen- und Punktmengen. 12. Stetigkeit. Namen- und Sachverzeichnis. — Obwohl Gesamtanlage und Stoffauswahl in dieser Neubearbeitung äußerlich ungeändert sind, haben viele Teile eine Neugestaltung erfahren, insbesondere die Kapitel 2, 3, 4 und 6. Durch eine eingehende Behandlung der Grundlagen der Geometrie hat jetzt die analytische Geometrie ein ebenso sorgfältiges axiomatisches Fundament erhalten wie die Analysis. Das Bemühen, größte Strenge mit leichter Verständlichkeit zu vereinen, hat wieder jenen, stets auf das Konkrete gerichteten, ausführlichen Stil geprägt, der schon früher der besondere Vorzug dieses Werkes war und der allen Lesern im Selbststudium — zu guter Letzt ist das Studium immer ein solches — eine zuverlässige Stimme sein wird. Druck und Ausstattung sind gut.
G. Aumann.

Mengenlehre:

Kurepa, Duro: Quelques aspects de l'importance de la théorie des ensembles. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 10, 255—257 u. kroat. Zusammenfassg. 257 (1955).

Sikorski, R.: On σ -complete Boolean algebras. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 7—9 (1955).

Der Verf. zeigt, daß es möglich ist, die Booleschen σ -Mengenalgebren unter allen Booleschen σ -Algebren B zu charakterisieren durch ein System von Bedingungen über Teilmengen Z von B , deren Mächtigkeiten $Kz\ Z$ durch eine feste Kardinalzahl m beschränkt sind. Jede dieser Bedingungen habe die Form: „Für alle indizierten Mengen $F_1 = (a_{1,t})_{t \in T_1}, \dots, F_k = (a_{k,t})_{t \in T_k}$ in B mit $Kz\ T_i \leq m$ gilt V “, wobei die Bedingung V innerhalb der Theorie der Booleschen Algebren formuliert und neben

der trivialen Einschränkung, in Booleschen σ -Mengenalgebren erfüllt zu sein, nur der folgenden unterworfen ist: V trifft dann und nur dann zu auf F_1, \dots, F_k in B , wenn V zutrifft auf F_1, \dots, F_k in $B(F_1 \cup \dots \cup F_k)$, d. h. der kleinsten Booleschen Unter algebra von B über $F_1 \cup \dots \cup F_k$, die gegenüber der Produkt- und Summenbildung in B beliebiger Mächtigkeit, soweit ausführbar, abgeschlossen ist. Es sei nun S die Algebra aller Teilmengen einer Menge X mit $\text{Kz } X \geq 2^m$ und J das Ideal aller Teilmengen Y von X mit $\text{Kz } Y \leq 2^m$. Dann kann $B = S/J$ keiner Booleschen σ -Mengen algebra isomorph sein. Andererseits ist $B(Z)$ im Fall $\text{Kz } Z \leq m$ einer Booleschen σ -Mengen algebra isomorph und daher jede der gegebenen Bedingungen erfüllt in B .

K. Krickeberg.

Schwartz, Laurent: L'énumération transfinie et l'œuvre de M. Denjoy. Bull. Sci. math., II. Sér. **79**, 78—96 (1955).

Eingehende Besprechung des mehrbändigen Werkes von A. Denjoy „L'énumération transfinie“ (dies. Zbl. **49**, 35—39; **56**, 47—48).

W. Neumer.

Neumer, Walter: Über Folgen von Ordnungszahlen. Z. math. Logik Grundl. Math. **1**, 109—126 (1955).

Sei A eine Anfangszahl, $[0, A)$ die Menge aller Ordinalzahlen $< A$ und \bar{A} , (A) die Mächtigkeit von A bzw. A . Zwischen „ A -Teilen“ M und N (das sind Teilmengen von $[0, A)$ vom Ordnungstypus A) werden für reguläres (singuläres) A Halbordnungen

$M \succ N$, $(M s \succ N)$ definiert: $M \succ N \leftrightarrow_{\text{Def}} \bar{N} - \bar{M} < \bar{A} \text{ \& } \bar{M} - \bar{N} \geq \bar{A}$,

$(M s \succ N \leftrightarrow_{\text{Def}} \bar{M} - \bar{N} \geq \bar{A} \text{ \& } M \text{ enthält einen Rest von } N)$. — Ziel der Arbeit ist es, das Verhalten von „ \succ “ ($s \succ$)-Folgen“, das sind Folgen $\{M_v\}$ von A -Teilen, zwischen denen die Beziehung \succ ($s \succ$) besteht, zu untersuchen, insbesondere in Anwendung auf den Fall daß die M_v Wertbereiche von Normalfunktionen sind. Es ergibt sich eine Reihe von Sätzen, die u. a. 1. Verallgemeinerungen bekannter Sätze über die Wertbereiche von Normalfunktionen darstellen, 2. Bedingungen a) für die Einschaltung von A -Teilen in \succ -Folgen und b) für die Möglichkeit von Verlängerungen von \succ -Folgen beinhalten und 3. die schwieriger zu übersehenden Verhältnisse für die unter 2. genannten Bedingungen für singuläres A beleuchten.

G. H. Müller.

Fodor, G.: Generalization of a theorem of Alexandroff and Urysohn. Acta Sci. math. **16**, 204—206 (1955).

Alexandroff und Urysohn haben folgenden Satz bewiesen: Wird jeder Zahl der zweiten Zahlenklasse eine Zahl $\mu(x) < \alpha$ zugeordnet, dann gibt es einen Funktionswert, der überabzählbar oft angenommen wird. — Dieser Satz hat durch verschiedene Mathematiker Verallgemeinerungen erfahren. — Verf. beweist folgenden, alle früheren Verallgemeinerungen in sich fassenden Satz: A sei eine nicht mit ω konfinale Limeszahl und M eine Teilmenge von $W(A) = \{\alpha: \alpha < A\}$. Wenn die Menge $W(A) - M$ keine in $W(A)$ abgeschlossene, mit $W(A)$ konfinale Teilmenge enthält, dann gibt es zu jeder in M definierten transfiniten Funktion f mit $f(\beta) < \beta$ für $\beta \in M$ eine Zahl $\pi < A$ und eine mit $W(A)$ konfinale Teilmenge N von M , so daß $f(x) \leq \pi$ für alle $x \in N$ gilt.

W. Neumer.

Fodor, G.: Some results concerning a problem in set theory. Acta Sci. math. **16**, 232—240 (1955).

S sei eine Menge der Mächtigkeit $m \geq \aleph_0$, Q eine Teilmenge von S mit $\text{kard } S = q \geq \aleph_0$. Jedem $x \in Q$ sei eine Menge $H(x) \subset S$ zugeordnet mit $\text{kard } H(x) < n < q$ für alle x , so daß $\text{kard } \bigcup_{x \in Q} H(x) = q$ gilt. Dann wird, wenn $p \leq m$, einer Teilmenge Γ von Q die Eigenschaft $T(q, p)$ zugeschrieben, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{kard } \bigcup_{x \in \Gamma} H(x) = q, \quad \text{kard } \bigcup_{\Gamma \ni x \neq y \in \Gamma} (H(x) \cap H(y)) < p.$$

Es wird gefragt (Problem (I')): gibt es stets eine Teilmenge I' von Q mit der Eigenschaft $T(q, p)$, wenn $q > n$, $q \geq p$, $p \geq n$? — Verf. zeigt, daß in einer Reihe von Fällen die Antwort bejahend ausfällt, unter anderem stets im Fall $p = q$ (Theoreme 1, 6, 8), wobei die verallgemeinerte Kontinuums-hypothese zu Hilfe genommen wird, wenn q singulär, $\neq \aleph_{\alpha+\omega}$ und Summe von n Kardinalzahlen $< q$ ist. — Ruziewicz hatte folgendes Problem gestellt: Sei E eine Menge der Mächtigkeit $e > \aleph_0$, R eine zweistellige Relation in E , so daß für jedes $x \in E$ die Menge der $y \in E$, $y \neq x$, für die $x R y$ gilt, eine Mächtigkeit $< r < e$ hat, wo $r \geq \aleph_0$ eine feste Kardinalzahl ist. Gibt es dann stets eine Teilmenge F von E mit $\text{kard } F = e$, so daß weder $x R y$ noch $y R x$ für $F \ni x \neq y \in F$ gilt? — Verf. zeigt, daß die Frage im Falle $e > \aleph_1$ zu bejahen ist auf Grund der bejahenden Antwort für (I') im Falle $p = q$. [Bei diesem Beweis sowie dem des Theorems 1 sind einige Reparaturen anzubringen. Ref.] — Erdős hatte gezeigt, daß in folgenden Fällen die Antwort auf das Problem (I') im allgemeinen verneinend lautet: 1. q singulär, $p = (q^*)^+$. 2. $q = \aleph_{\alpha+1}$, $\aleph_\alpha = r$ singulär, $p \leq n = (r^*)^+$, $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ für alle β . (Verf. bezeichnet mit b^* die kleinste Kardinalzahl derart, daß b Summe von b^* Kardinalzahlen $< b$ ist, mit a^+ die nächstgrößere Kardinalzahl zu a). Verf. gibt eigene Beweise für die Resultate von Erdős, von denen jedoch der Beweis im Falle 1. fehlerhaft ist und auch, wenn er in Ordnung gebracht wird, nur die Behauptung für $p \leq q^*$, nicht für $p \leq (q^*)^+$ liefert.

W. Neumer.

Kurepa, Georges: *Sur une classe de continus ordonnés*. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 2283—2284 (1955).

Verf. bezeichnet mit $\alpha(\beta)$ die alphabetisch geordnete Menge der eindeutigen Abbildungen von $I(\beta)$ in $I(\alpha)$ [$I(\alpha)$ = Menge der Zahlen $< \alpha$; α und β sind Ordnungszahlen]. — Verallgemeinerung: $S(E)$ = Menge der eindeutigen Abbildungen der Menge E in die halbgeordnete Menge S . $S(E)$ kann halb-geordnet werden durch die Vorschrift: $f \leq g$ für $f \in S(E) \ni g$, wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in E$. — Einige Sätze werden ohne Beweis angegeben, u. a. diese: Die Mengen $n(\omega_\alpha)$ mit $2 \leq n < \omega$ sind paarweise ähnlich; von zwei Mengen $m(\omega_\alpha)$, wo $2 \leq m \leq \omega_\alpha$, ist jede einer Teilmenge der andern ähnlich.

W. Neumer.

Popadić, Milan S.: *On inductive systems*. Fac. Philos. Univ. Skopje, Sect. Sci. natur., Annuaire 7, (1954), 3—54 [Serbo-kroatisch] und engl. Zusammenfassg. 55—65 (1955).

The yugoslav text (pp. 1—55) of the paper is the same as the author's thesis presented at the beginning of 1954 (the rev. was the mentor); the English text presents some deviations of it. The paper is dealing with general considerations on induction i. e. on exhaustion of a set by means of the elements of a system of sets. The paper is connected with some works of the reviewer. The main aim of the author consists to study the inductive systems as systems of subsets of a set M by means of which, according to a procedure π , one can exhaust M . Roughly speaking, π consists to associate to each considered $D \subset M$ a larger part $fD \supset D$. A system $S M \subseteq P M$ is inductive relative to M if for every set N the relation $M \subseteq N$ is implied by the following two conditions: 1. $(S(M) - \{A\}) \cap P N$ is non vacuous; 2. For every element B of $(S(M) - \{A, M\}) \cap P N$ there exists a $C \in S M \cap P N$ such that $B \subset C$. Then one has this „fundamental theorem“ (first formulation): In order that a $S M \subseteq P M$ covering M be inductive relative to M , it is necessary and sufficient that for every $D \subset M$ the system $S M \cap P D$, provided non void, contains a last element (Th. 3. 3. 1). $P X$ denotes the system of all subsets of X ; $P X$ as well as subsets of $P X$ are meant to be ordered by means of \subseteq . In order that for a chain C the system of its closed intervals [resp. elementary sections] be inductive, it is necessary and sufficient that both S and the dual S^* be well ordered [resp. that C has no gap]. For a chain C , let C^n denote the cardinal ordering of $C \times C \times \dots \times C$ (n times). For any $x = (x_1, \dots, x_n) \in C^n$ let $(-, x|_{C^n})$ denote either the set

$\{y \mid y \in C^n, y \leq x\}$ or the set $\{(y_1, \dots, y_n) \mid y_1 < x_1, \dots, y_n < x_n, (y_1, \dots, y_n) \in C^n\}$. In order that the system of sets $(-, x]_{C^n}$ ($x \in C^n$) be inductive for C^n , it is necessary and sufficient that the chain C has no interior gap (Th. 8.2. 2; this theorem answers a question of the rev.). The author gives two still more general formulations of induction procedures in terms of binary relations and mappings, respectively. Let φ be a binary relation in M i.e. $\varphi \subseteq M^2$. Let $\text{pr}_1 \varphi$ (resp. $\text{pr}_2 \varphi$) be the set of the first (resp. second) components of elements of φ . Let M, N be any sets. A system $S M \subseteq P M$ is inductive for M relative to an „inductor“, $(S_1 M, \varphi)$, where $S_1 M \subseteq P M$ and φ is a binary relation with $\text{pr}_1 \varphi = S M$, $\text{pr}_2 \varphi = P M$, if the relation $M \subseteq N$ is implied by the following ones: 1. $S_N(M) \cap S_1 M \neq \Delta, \{A\}$; here $S_N(M) = S(M) \cap P N$; 2. There exists a $\psi \in P \varphi$ so that $\text{pr}_1 \psi = S M - \{A M\}$, $\text{pr}_2 X \subseteq S_N(M)$ where $X = S_N(M) - \{A, M\}$, $P_N M = P(M) \cap P(N)$. One has a „fundamental theorem“ (second formulation) stating the necessary and sufficient conditions in order that $S M$ be inductive for M relative to such a $(S_1 M, \varphi)$. The paper contains numerous other definitions and statements partly connected with ordered sets.

G. Kurepa.

Ohkuma, Tadashi: Sur quelques relations concernant les opérations P_α et S_α sur les classes d'ensembles. Proc. Japan Acad. **31**, 410—415 (1955).

Sei K eine Klasse von Mengen und $P_\alpha(K)$ (bzw. $S_\alpha(K)$) die Klasse aller Mengen, die Durchschnitte (bzw. Vereinigungen) von weniger als S_α Mengen aus K sind. Anknüpfend an ältere Arbeiten von Sierpiński und Tarski, Fundamenta Math. **15**, 292—300 (1930), Kozniowski und Lindenbaum, ibid. 342—355 und Tarski, ibid. **16**, 181—304 (1930), werden Bedingungen für das Bestehen gewisser Gleichheiten und Ungleichheiten zwischen $P_{\alpha_1} S_{\beta_1}$, $S_{\alpha_2} P_{\beta_2}$, $P_{\alpha_3} S_{\beta_3}$, $S_{\alpha_4} P_{\beta_4} S_{\gamma_4}$, diese Operationen jeweils angewendet auf K , ohne Beweis angegeben. G. H. Müller.

Horn, Alfred: A characterization of unions of linearly independent sets. J. London math. Soc. **30**, 494—496 (1955).

Let X be a vector space over a division ring. A subset S of X is said, to have property R_k (where k is a given cardinal) if for every subset T of S , the cardinal of T does not exceed $k \cdot (\text{rank of } T)$ where by the rank of T is meant the cardinal of a maximal linearly independent subset of T . If S can be divided into k disjoint linearly independent sets, then S has the property R_k . The author proves that the converse is true when k is a finite positive integer and every finite subset of S has the property noted above. He proves the result when S is a finite set and derives the general case by using a known theorem due to R. Rado (this Zbl. **33**, 253).

V. Ganapathy Iyer.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

Finetti, Bruno de: Sulla teoria astratta della misura e dell'integrazione. Ann. Mat. pura appl. IV. Ser. **40**, 307—319 (1955).

Der Verf. schlägt vor, unter einem Integral ein lineares Funktional μ zu verstehen, das in einem linearen Unterraum \mathfrak{Q} des Raumes \mathfrak{F} aller reellen Funktionen über einer festen Menge definiert ist und die folgenden Eigenschaften hat: $\mu(1) = 1$; aus $f > 0$ folgt $\mu(f) > 0$. Diese Auffassung entspricht der Verwendung endlich additiver Maße. Dafür, daß insbesondere sigma-Additivität vorliegt, werden verschiedene Kriterien angegeben. Es ist bekannt, daß μ stets mit den gleichen Eigenschaften auf \mathfrak{F} fortgesetzt werden kann, und es wird untersucht, in welchem Teil von \mathfrak{F} alle möglichen Fortsetzungen von μ zusammenfallen. Weiter finden sich Bemerkungen über invariante Integrale, Beispiele und schließlich Probleme, deren Behandlung der Verf. für wünschenswert hält.

K. Krickeberg.

Austin, Donald G.: An isomorphism theorem for finitely additive measures. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 205—208 (1955).

Dieser Isomorphiesatz bezieht sich auf endlich additive Maße μ über einer

Algebra \mathfrak{M} von Teilmengen einer abzählbaren Menge X mit $\mu(X) = 1$, die auf die folgende Weise entstehen: Es gibt einen \emptyset und X enthaltenden Semiring \mathfrak{P} , auf dem μ strikt positiv ist, so daß jeder Punkt aus X in Mengen aus \mathfrak{P} beliebig kleinen Maßes liegt: \mathfrak{M} besteht aus allen Mengen, die sich dem Maße nach beliebig genau zwischen Mengen aus dem kleinsten Booleschen Ring über \mathfrak{P} einschließen lassen. Z. B. kann man als X eine im Intervall $[0, 1[$ dichte abzählbare Menge D nehmen, als \mathfrak{M} das System aller Teilmengen E von D , deren abgeschlossene Hülle $\text{Cl } E$ Jordan-meßbar ist, und als Maß $\nu(E)$ den Jordanschen Inhalt von $\text{Cl } E$. Ist nun (\mathfrak{M}, μ) irgendein Maßring der oben beschriebenen Art, so gibt es immer eine eindeutige Abbildung T von X auf eine dichte Teilmenge D von $[0, 1[$, so daß TA Jordan-meßbar und $\mu A = \nu TA$ für jedes A aus \mathfrak{M} ist. Einige Anwendungen werden angedeutet, u. a. im Zusammenhang mit Dichten von Mengen ganzer Zahlen.

K. Krickeberg.

Leader, Solomon: On universally integrable functions. Proc. Amer. math. Soc. 6, 232—234 (1955).

\mathfrak{A} sei eine Boolesche Algebra von Teilmengen einer Menge X mit $X \in \mathfrak{A}$. Sind ϱ und ϱ' Zerlegungen von X in endlich viele diskjunkte Mengen aus \mathfrak{A} , so bedeute $\varrho < \varrho'$, daß ϱ' eine Verfeinerung von ϱ bildet. Eine in X definierte reelle Funktion f heißt integrierbar hinsichtlich eines endlich additiven reellen Maßes F auf \mathfrak{A} , wenn der Moore-Smithsche Grenzwert $\lim_{\varrho} \sum_k f(x_k) F(E_k)$ hinsichtlich $<$ existiert, wobei $\varrho = \{E_1, \dots, E_{m_\varrho}\}$ und $x_k \in E_k$, und wenn dieser Grenzwert endlich und unabhängig von der Wahl der x_k ist. f wird universell integrierbar genannt, wenn f hinsichtlich jedes solchen Maßes F integrierbar ist. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn f der gleichmäßige Grenzwert von Treppenfunktionen, d. h. endlichen Linearkombinationen charakteristischer Funktionen von Mengen aus \mathfrak{A} ist.

K. Krickeberg.

Morse, Marston: Bimeasures and their integral extensions. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 39, 345—356 (1955).

Es wird eine Vorschau auf drei im Erscheinen begriffene Arbeiten von M. Morse und W. Transue gegeben, wobei nur die Definitionen und die Sätze ohne Beweis genannt werden. Da diese nicht im einzelnen wiedergegeben werden können, seien wenigstens die Grundbegriffe, auf die sich die Untersuchungen beziehen, charakterisiert. Es sei E ein lokal kompakter, topologischer Raum, R der Körper der reellen Zahlen und R^E der Vektorraum über R aller Abbildungen von E auf R . \mathfrak{A} sei der Unterraum von R^E aller stetigen Abbildungen mit kompaktem Träger in E . Ein Maß μ auf E ist eine lineare Form auf \mathfrak{A} derart, daß für jede kompakte Teilmenge $K \subset E$ die Restriktion von μ auf den Unterraum von \mathfrak{A} der Abbildungen mit einem Träger in K stetig ist für die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf \mathfrak{A} . Zur Einführung der im Titel genannten Bimaße seien zunächst für zwei Räume E' und E'' die vorstehenden Begriffe $R^{E'}$, $R^{E''}$, \mathfrak{A}' , \mathfrak{A}'' definiert. Es sei A eine Abbildung von $\mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}''$ auf R mit den Werten $A(u, v)$, wo $u \in \mathfrak{A}'$, $v \in \mathfrak{A}''$. Für festes u sei $A(u, \cdot)$ die Abbildung von \mathfrak{A}'' auf R , die den Wert $A(u, v)$ in $v \in \mathfrak{A}''$ hat; analog $A(\cdot, v)$. Ein Bimaß auf $E' \times E''$ ist eine Abbildung A von $\mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}''$ auf R mit Werten $A(u, v)$ derart, daß $A(u, \cdot)$ und $A(\cdot, v)$ Maße auf E'' bzw. E' definieren. Hierauf aufbauend wird ein A -Integral als stetige Erweiterung des Bimaßes A definiert und das Analogon der Fréchet'schen Theorie der stetigen bilinearen Funktione (Darstellung durch ein iteriertes Stieltjes-Integral, Fréchet'sche Variation usw.) aufgestellt.

G. Doetsch.

Nikodým, Otton M.: A theorem on infinite sequences of finitely additive real valued measures. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 24, 265—286 (1955).

Man bezeichne mit $(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_p)$ das p -dimensionale Intervall $a_1 < x_1 \leq b_1, \dots, a_p < x_p \leq b_p$ und mit $V(f(x_1, \dots, x_p); a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_p)$ die Vitali-Variation der Funktion f auf dem Intervall $(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_p)$, letztere

wird durch vollständige Induktion mit den Formeln $V(f(x); a; b) = f(b) - f(a)$, $V(f(x_1, \dots, x_{p+1}); a_1, \dots, a_{p+1}; b_1, \dots, b_{p+1}) = V(f(x_1, \dots, x_p, b_{p+1}); a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_p) - V(f(x_1, \dots, x_p, a_{p+1}); a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_p)$ definiert. Die Funktion $f(x_1, \dots, x_p)$ heißt von beschränkter Vitali-Variation auf einem Intervall I , wenn es eine Konstante M gibt, so daß $\sum_k |V(f; I_k)| \leq M$ für jede beliebige endliche Folge

von paarweise fremden Intervallen $I_k \subset I$ gilt. Folgende Verallgemeinerung des bekannten Satzes von Helly wird bewiesen: 1. Die Funktionen $f_n(x_1, \dots, x_p)$ seien von beschränkter Vitali-Variation auf dem Intervall $Q = (0, \dots, 0; 1, \dots, 1)$, 2. setzt man beliebige k Variablen ($k = 1, \dots, p-1$) von den Variablen x_1, \dots, x_p gleich Null, so bekomme man von jeder Funktion f_n eine Funktion (von $p-k$ Variablen) von beschränkter Vitali-Variation, 3. es gelte $|f_n(x_1, \dots, x_p)| \leq K$ für $n = 1, 2, \dots$, dann läßt sich eine Teilfolge $f_{n_m}(x_1, \dots, x_p)$ auswählen, die überall in der abgeschlossenen Hülle von Q gegen eine Funktion $f(x_1, \dots, x_p)$ (ebenfalls von beschränkter Vitali-Variation) strebt. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach p und wird für $p = 2$ ausgeführt; er beruht auf einer Reihe von an sich interessanten Lemmata, die sich mit einer Verallgemeinerung auf Funktionen von zwei Variablen der einseitigen Grenzwerte von Funktionen einer Variablen beschäftigen und folgendermaßen lauten: Es seien $Q = (0, 0; 1, 1)$, Q^0 das Innere von Q , $E \subset Q^0$ überall dicht in Q^0 , $f(x, y)$ eine auf E definierte beschränkte reelle Funktion, $L(f; x_0 +, y_0 +) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 +, y \rightarrow y_0 +, (x, y) \in E}} f(x, y)$, falls der Limes

für gegebenes $(x_0, y_0) \in Q^0$ existiert; und ähnlich werden $L(f; x_0 +, y_0 -)$, $L(f; x_0 -, y_0 -)$ und $L(f; x_0 -, y_0 +)$ definiert. 1. Existieren diese vier Limites in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in Q^0$, und faßt man sie als Funktionen von (x_0, y_0) auf, so bilden ihre Unstetigkeitspunkte eine Punktmenge, die mit einer abzählbaren Folge von achsenparallelen Geraden überdeckbar ist. 2. Hat man für $(x, y) \in E$, $(x', y') \in E$, $x \leq x'$, $y \leq y'$ immer $f(x, y) \leq f(x', y')$, so existieren $L(f; x_0 +, y_0 +)$ und $L(f; x_0 -, y_0 -)$ für beliebiges $(x_0, y_0) \in Q^0$. 3. Erfüllen die Funktionen $f_n(x, y)$ ($n = 1, 2, \dots$) dieselbe Bedingung wie die vorige Funktion $f(x, y)$ unter 2., hat man weiter $|f_n(x, y)| \leq K$ für $(x, y) \in E$, $n = 1, 2, \dots$, und existiert $f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y)$ für $(x, y) \in E$, so existieren die vier Limites $L(f; x_0 +, y_0 +)$, $L(f; x_0 +, y_0 -)$, $L(f; x_0 -, y_0 -)$, $L(f; x_0 -, y_0 +)$ für $(x_0, y_0) \in Q^0$. A. Császár.

Sikorski, R.: On the determination of measure by a function of an elementary figure. *Prace mat.* **1**, 285—290, russ. u. engl. Zusammenfassg. 290, 291 (1955) [Polnisch].

Simple proof of this known statement: For each non-negative additive function Φ of elementary figure in R^k there is a Borel measure μ such that for every closed interval J_0 in R^k we have $(*) \mu J_0 = \inf \Phi(J)$, J running over the system of closed intervals satisfying $\text{int } J \supset J_0$. Remark that $(*)$ could not be replaced by $\mu J_0 = \Phi J_0$. The void set as well as the union of any finite number of closed k -dimensional intervals of R^k is called an elementary figure in R^k . For $k = 1$, the idea of the proof consists to consider the space R^* obtained from R by replacing each point x of R by an ordered pair of points, say $(x, -1)$, $(x, +1)$. Then Φ induces an additive function ν in the field of closed-open sets of R^* ; ν is σ -additive and induces a measure function ν' ; from here, returning to R , one gets the required Borel measure μ .

D. Kurepa.

Marczewski, E.: Remarks on sets of measure zero and the derivability of monotonic functions. *Prace mat.* **1**, 141—144, russ. u. engl. Zusammenfassg. 144 (1955) [Polnisch].

General remarks (made in 1952 in connection with the publication of the book F. Riesz-B. Sz. Nagy, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, cf. this Zbl. **46**, 331) concerning linear sets of measure zero and the Lebesgue theorem on derivability of

monotonic functions. Proof of this statement: For every linear set S of measure 0, there exists a monotonic function f derivable in no point of S and such that $f(b-0) - f(a+0) = \sum_x [f(x+0) - f(x-0)]$, for every $a < x < b$. D. Kurepa.

Reifenberg, E. R.: Parametric surfaces. V. Area II. Proc. London math. Soc., III. Ser. 5, 342—357 (1955).

In alcuni precedenti lavori (questo Zbl. 44, 280; 46, 283; 47, 60; 48, 38) l'A. si era proposto di dare una dimostrazione „elementare“, cioè non dipendente dalla teoria dell'area secondo Lebesgue di una superficie che è stata costruita negli ultimi 20 anni da parte di L. Cesari, T. Rado, H. Federer e altri, di alcuni teoremi, peraltro già conosciuti, di tale teoria. Nelle dimostrazioni date allora furono riscontrate alcune lacune che l'A. si propone di colmare in questi lavoro. Fra i teoremi dimostrati a tale scopo dall'A. in questa nota citiamo i seguenti. Teorema A: Sia H la misura 2-dimensionale sferica secondo Hausdorff nello spazio euclideo 3-dimensionale E_3 , sia $y = f(x)$, $x \in X$ una trasformazione continua di una 2-cella chiusa X del piano E_2 in E_3 , sia S la superficie di Fréchet da essa rappresentata, $[S]$ il sostegno di S , sia $N(f, y)$ il numero (eventualmente $+\infty$) dei continui massimali di $f^{-1}(y)$ che appartengono a X^0 (X^0 è l'insieme dei punti interni a X). Sia $A^2(S^0) = \int N(f, y) dH$, sia $L(S)$ l'area secondo Lebesgue di S . Allora $A^2(S^0) \geq L(S)$, l'uguaglianza valendo se S è una superficie „saddle“. — Teorema B: Per ogni $E \in [S]$, sia $E \subset G \subset [S]$ tale che l'insieme $f^{-1}(G)$ risulti aperto in X , sia $L(G)$ l'area secondo Lebesgue della superficie definita da $y = f(x)$ sull'insieme $f^{-1}(G)$, sia infine $L^*(E) = \inf_{E \subset G \subset [S]} L(G)$. Allora la funzione d'insieme $L^*(E)$ è una misura esterna secondo

Carathéodory. Il teorema A già trovasi in H. Federer (questo Zbl. 42, 284), il teorema B è contenuto in un teorema di L. Cesari [Bull. Amer. math. Soc. 57, 465, Abstract 452 (1951)]. J. Cecconi.

Mickle, Earl J.: Lebesgue area and Hausdorff measure. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 4, 205—218 (1955).

Let $T: x = x(w)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $w = (u, v) \in Q = [0, 1, 0, 1]$, be any continuous mapping (path surface σ) from Q into the x -space S_3 and let $T(Q)$ denote the subset of S_3 covered by σ , and $A(T)$ the Lebesgue area of σ . The present paper gives a remarkably simple affirmative answer to the difficult question of defining a nonnegative integer-valued multiplicity function $K(x, T, Q)$, $x \in S_3$ [$K \geq 0$ in $T(Q)$; $K = 0$ in $S_3 - T(Q)$], such that the area $A(T)$ is equal to the integral of K in S_3 with respect to the 2-dim. Hausdorff measure H^2 ; i. e., (*) $A(T) = \iint_{S_3} K(x, T, Q) dH^2$ (For a previous discussion see H. Federer, this Zbl. 46, 284).

Let Γ denote the collection of all H^2 -measurable sets in S_3 , by Γ_1 [Γ_2, Γ_3] the collection of all those sets $E \in \Gamma$ whose projection on the coordinate plane $\alpha_1 = x_2 x_3$ [$\alpha_2 = x_3 x_1, \alpha_3 = x_1 x_2$] have planar Lebesgue measure zero, and let $\Gamma_4 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $\Gamma_5 = \Gamma_1 \cap \Gamma_3$, $\Gamma_6 = \Gamma_2 \cap \Gamma_3$, $\Gamma_7 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3$. Finally for every $E \in \Gamma$ let $H_i(E) = \inf H^2(E - E_i)$ for all $E_i \subset \Gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, 7$. Then $H_i(E)$, $i = 1, 2, \dots, 7$, is a measure function defined for all $E \in \Gamma$. Let π_i denote the projection of S_3 on α_i , $T_i = \pi_i T$, and $E_i \subset Q$ the union of all Rado's essential maximal model continua (e. m. m. c.) for the plan mapping T_i , $i = 1, 2, 3$. Let $e_1 = E_1 - (E_2 \cup E_3)$, $e_2 = E_2 - (E_3 \cup E_1)$, $e_3 = E_3 - (E_1 \cup E_2)$, $e_4 = (E_1 \cap E_2) - E_3$, $e_5 = (E_1 \cap E_3) - E_2$, $e_6 = (E_2 \cap E_3) - E_1$, $e_7 = E_1 \cap E_2 \cap E_3$. Then the collection $\{\gamma\}$ is defined of all maximal model continua γ for T in Q for which the following properties hold for at least one $i = 1, 2, \dots, 7$: (a) $\gamma \subset e_i$, (b) $T(\gamma)$ is a point of positive upper density in S_3 for the set $T(e_i)$ with respect to the measure H_i . The multiplicity function $K(x, T, Q)$ is then the number (possibly $+\infty$) of the components $T^{-1}(x)$ which are in $\{\gamma\}$. The multiplicity function K is invariant with respect to Fréchet

equivalence and has property (*). This property is first proved for AC mappings having a Jacobian vector almost everywhere and then extended to all mappings T by virtue of a representation theorem of the reviewer. *L. Cesari.*

Radó, Tibor: On multiplicity functions associated with Lebesgue area. *Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser.* 4, 219—236 (1955).

In a previous paper E. J. Mickle (cf. the preceding review, where notions are explained) defines a multiplicity function $K(x, T, Q)$ by means of seven measure functions H_i , $i = 1, 2, \dots, 7$, derived from H^2 . In the present paper it is shown that by using the first three of the functions H_i it is possible to define a class of multiplicity functions analogous to K for which (*) (cf. the preceding review) holds. For every point P of the unit sphere U in S_3 let $S_2(P)$ be the plane through $(0, 0, 0)$ which is perpendicular to the vector OP , π_p the projection of S_3 on $S_2(P)$, E_p the collection of all e. m. m. s. relative to the plane mapping $\pi_p T$, Γ_p the class of all sets $E \in \Gamma$, $E \subset S_3$, whose projection on $S_2(P)$ has planar Lebesgue measure zero. Finally for $E \subset S_3$ let $H_p^2(E) = \inf H^2(E - E_0)$ for all $E_0 \in \Gamma_p$, and $D_p(E)$ the set of all points $x \in E$ having an upper 2-dim. density positive with respect to the measure function $H_p^2(E)$. Now let e_p denote the set $e_p = E_p \cap T^{-1}D_p T E_p$. For any set $\sigma \subset U$ denote by $K_\sigma(x, T, Q)$ the number (possibly $+\infty$) of all maximal continua of constancy γ of T in Q with $\gamma \subset E_p$, $T(\gamma) \in D_p T E_p$ for at least a point $P \in \sigma$. There arises the problem of characterizing those sets $\sigma \subset U$ for which (**)

$$A(T) = \iint_{S_3} K_\sigma(x, T, Q) dH^2.$$
The author shows that (**) holds provided σ

contains the points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ [for instance σ could be the union of these points]. Also (**) holds if σ is countable and its closure contains the three points above. A theorem of the rev. on surfaces with $A(T) < +\infty$ is used in the proof. *L. Cesari.*

McKean jr., Henry P.: Hausdorff-Besicovitch dimension of Brownian motion paths. *Duke math. J.* 22, 229—234 (1955).

Der Verf. verallgemeinert Ergebnisse von P. Lévy durch die Ermittlung der Hausdorff-Besicovitchschen Dimension der Trajektorien $x_\omega(E) = \{x_\omega(t) : t \in E\}$ einer n -dimensionalen Brownschen Bewegung $x_\omega(t)$ mit $0 \leq t < +\infty$, wobei E eine beliebige Borelsche Teilmenge von $[0, +\infty[$ und nicht notwendig von der Form $[0, s]$ oder $[0, +\infty[$ ist. Mit Hilfe eines Satzes von Frostman über die β -dimensionale Kapazität $c_\beta(A)$ einer Borelschen Menge A ergibt sich $\dim(x_\omega(E)) = \min(2 \dim E, 1)$ für fast alle ω , wenn $n = 1$, und $\dim(x_\omega(E)) = 2 \dim E$ für fast alle ω , wenn $n > 1$. Ist $\dim E = \alpha > 0$, $c_\alpha(E) > 0$ und entweder $n > 1$ oder $n = 1$ und $\alpha \leq \frac{1}{2}$, so hat $x_\omega(E)$ für fast alle ω ein positives 2α -dimensionales Hausdorff-Besicovitchsches Maß. *K. Krickeberg.*

Plamenov, I. Ja.: Einige hinreichende Bedingungen für die Existenz eines asymptotischen Differentials. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 105, 416—418 (1955) [Russisch].

Knüpft an Begriffsbildungen und Sätze an, hinsichtlich deren man sich etwa bei Ward, dies. Zbl. 12, 59 orientiere. Es sei Q eine ebene meßbare Menge, $s(z)$ ein Winkelraum mit dem Scheitel z und $s(z, r)$ der entsprechende Sektor mit Radius r . $\lim_{r \rightarrow 0} [M(Q \cap s(z, r))/M(s(z, r))]$ [$M(\cdot) = \text{Maß von}$] heiße äußere (bzw. \lim innere) Dichte von Q in z bez. $s(z)$. $|z_1 - z_2|$ bezeichne den euklidischen Abstand von z_1, z_2 in der Ebene. $F(z)$ sei eine auf einer ebenen meßbaren Menge E definierte meßbare und f. ü. endliche Funktion. $F \subset E$ sei die Menge aller Punkte, für welche $s(z)$ und eine meßbare Menge $E_z \subset E$ existieren, so daß (1) E_z in z bez. $s(z)$ eine innere Dichte $> \frac{1}{2}$ besitzt und

$$(2) \quad \lim_{w \rightarrow z, w \in E_z} \frac{F(w) - F(z)}{|w - z|} < \infty \text{ oder } \lim_{w \rightarrow z, w \in E_z} \frac{F(w) - F(z)}{|w - z|} > -\infty$$

gilt. Dann ist $F(z)$ f. ü. in F asymptotisch differenzierbar. — Dieser Satz braucht nicht mehr richtig zu bleiben, wenn man (1) durch $= \frac{1}{2}$ ersetzt. — Gilt aber (1) kurz gesagt für zwei Winkelräume $s_i(z)$ ohne gemeinsame innere Punkte wenigstens mit 0 statt mit $\frac{1}{2}$ und ist (2) erfüllt, dann bleibt der Satz richtig. — Im wesentlichen durch Umkehrung dieser Sätze werden Aussagen über das Verhalten beliebiger meßbarer Funktionen auch in Punkten gewonnen, in denen sie nicht mehr asymptotisch differenzierbar sind. Keine Beweise. *L. Schmetterer.*

Enomoto, Shizu: Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions. I. Osaka math. J. 7, 69—102 (1955).

Eine ausführlichere und mit Beweisen versehene Darstellung eines Teils früher beschriebener Ergebnisse (dies. Zbl. 57, 45): Das Denjoy-Perronsche Integral einer in einem k -dimensionalen abgeschlossenen Intervall erklärten reellen Funktion wird definiert, und es wird gezeigt, daß es im Fall $k = 1$ mit dem üblichen zusammenfällt und im Fall $k > 1$ durch k -fache eindimensionale Denjoy-Perronsche Integration gewonnen werden kann. *K. Krickeberg.*

Wilkins jr., J. Ernest: The average of the reciprocal of a function. Proc. Amer. math. Soc. 6, 806—815 (1955).

Es wird die bekannte Ungleichung $\frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(\alpha + \beta)^2}{4\alpha\beta}$, wo $f(x)$ meßbar und $0 < \alpha \leq f(x) \leq \beta$ ist (vgl. G. Pólya-G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, 2. Aufl. Berlin 1954, Aufg. 93), für monotone konkave Funktionen zu

$$\frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{[2\beta^2 \ln(\alpha^{-1}\beta) - (\beta^2 - \alpha^2)]^2 [\beta \ln(\alpha^{-1}\beta) - (\beta - \alpha)]}{2\beta(\beta - \alpha)^2}$$

verschärft und bewiesen, daß das Gleichheitszeichen nur bei $f(x) = \beta$ für $a \leq x \leq c$, bzw. $= \beta - (\beta - \alpha)(x - c)(b - c)^{-1}$ für $c \leq x \leq b$

($c = a + \frac{1}{2}(b-a)[1 + \alpha\beta^{-1} + 2\ln(1 - \alpha\beta^{-1})][\ln(\alpha^{-1}\beta) - 1 + \alpha\beta^{-1}]^{-1}$) auftreten kann. *J. Aczél.*

Stoljarov, N. A.: Zu einer Verallgemeinerung des Stieltjesschen Integrals. Doklady Akad. Nauk SSSR 105, 652—655 (1955) [Russisch].

Für das Stieltjes-Integral zweiter Ordnung $\int_a^b f(x) \frac{d^2\varphi(x)}{dx}$ (s. dies. Zbl. 35, 153) wird eine Formel für die partielle Integration bewiesen. Speziell gilt: Wenn das Hellinger-Integral $\int_a^b \frac{df(x)d\varphi(x)}{dx}$ existiert und $\varphi(x)$ in a bzw. b einseitige Ableitungen $\varphi'_+(a)$ bzw. $\varphi'_-(b)$ besitzt, dann existiert $\int_a^b f(x) \frac{d^2\varphi(x)}{dx}$ und ist gleich $f(b)\varphi'_-(b) - f(a)\varphi'_+(a) - \int_a^b \frac{df(x)d\varphi(x)}{dx}$. *L. Schmetterer.*

Ichijō, Yoshihiro: Über die Laplacesche asymptotische Formel für das Integral von Potenzen mit großem Index. J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. Math. 6, 63—74 (1955).

Die Laplacesche Formel für das asymptotische Verhalten von „Funktionen großer Zahlen“, die sich auf einfache Integrale der Form $\int_a^b \varphi(x) [f(x)]^n dx$ bezieht, wird auf mehrfache Integrale verallgemeinert. *G. Doetsch.*

Adachi, Ryuzo: Approximate formulas for definite integrals and differential coefficients. Kumamoto J. Sci., Ser. A 2, 196—209 (1955).

Finite Ausdrücke in $y(a), y(a+h), \dots, y(b)$ für $\int_a^b y(x) dx$ ($n \leq 6$) und $y'(x), y''(x)$ ($n \leq 9$) an den Stellen $a, a+h, \dots, a+nh=b$. *H. Witting.*

Sikorski, R.: Ein Beweis des Satzes von der Monotonie der Umkehrfunktion. *Wiadom. mat.* **1**, Nr. 1, 126 (1955) [Polnisch].

Otto, E.: Über die Ableitung der Exponentialfunktion. *Wiadom. mat.* **1**, Nr. 1, 122—125 (1955) [Polnisch].

Fog, David: A small problem from the theory of surfaces. *Nordisk mat. Tidsskrift* **3**, 157—158 und engl. Zusammenfassg. 183 (1955) [Dänisch].

$z = y^2 - 2x^2y + \frac{3}{4}x^4$ ist ein Beispiel einer Fläche, welche im Nullpunkt kein Minimum hat, obwohl alle Normalschnitte dort ein Minimum haben; denn längs der Kurve, deren Projektion $y = x^2$ ist, ist $z = -\frac{1}{4}x^4$. *H. Gericke.*

• **Dölp, H. und E. Netto:** Differential- und Integralrechnung. 22. verb. Aufl. Berlin: Verlag Alfred Töpelmann 1955. 201 S. brosch. DM. 4,80.

• **Frolov, N. A.:** Differential- und Integralrechnung. Moskau: Staatsverlag für Lehrbücher und Pädagogik des Ministeriums für Bildung der RSFSR 1955. 340 S., R. 5,65 [Russisch].

Erster Teil eines kurzen Leitfadens der mathematischen Analysis, bestimmt als Lehrmittel für die Studierenden der phys.-math. Fakultäten der pädagogischen Institute in der UdSSR. Behandelt werden in ungefähr drei gleich großen Teilen eine Einführung in die Lehre von den Funktionen (reelle Zahlen, Grenzwerte, Stetigkeit), die Differentialrechnung und die Integralrechnung, alles im Bereich der Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen, also der gleiche Stoff wie in dem vor kurzem gleichfalls in russischer Sprache erschienenen Lehrbuch von Tolstov, *Lehrgang der Analysis Bd. I*. Moskau 1954. Der Umfang ist diesem Buch gegenüber wesentlich geringer und geht nicht über die Grundlagen und das Notwendigste hinaus. Beispielsweise sind schon die hyperbolischen Funktionen und die Simpson'schen Regeln zur näherungsweisen Berechnung von bestimmten Integralen nicht mehr erwähnt. Das Buch schließt ab mit einfachen geometrischen und mechanischen Anwendungen. Als Letztes werden die Krümmung ebener Kurven, die Guldinschen Sätze über Umdrehungskörper und die Berechnung von Trägheitsmomenten längs Linien verteilter Massen betrachtet. Numerische und graphische Methoden werden nicht gebracht. Die Darstellungsweise ist die seit längerem übliche und gibt im Rahmen des knappen Umfangs eine gründliche Anleitung zur Einarbeitung in den Stoff. Übungsbeispiele und -aufgaben sind reichlich beigegeben. Sie dienen zur Erläuterung des Stoffes, bleiben aber auch auf denselben Rahmen beschränkt. *E. Svenson.*

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

• **Achiezer, N. J.:** Das Akademiestudent S. N. Bernštejn und seine Arbeiten zur konstruktiven Funktionentheorie. Charkov: Verlag der Staatlichen A. M. Gorkij-Universität zu Charkov 1955. 112 S. R. 3,— [Russisch].

Das Büchlein bietet ein knappes, leicht lesbares Vademecum zum Studium der gesammelten Werke S. N. Bernsteins, Bd. I—II (s. dies. Zbl. **47**, 73; **56**, 60). Inhaltsübersicht: Kurze mathematische Biographie. Bestmögliche Approximation mit Polynomen. Fragen der Interpolation. Ungleichungen für Polynome und trigonometrische Polynome. Extremaleigenschaften ganzer transzendenter Funktionen vom Exponentialtypus. Bestmögliche Approximationen mit ganzen transzendenten Funktionen vom Exponentialtypus auf der ganzen reellen Achse. Interferenzerscheinungen. Bestmögliche gewichtete Approximation durch Polynome auf der ganzen reellen Achse. Extremalpolynome und Orthogonalpolynome. Mechanische Quadratur. Analytische Funktionen im reellen Gebiet. Bibliographie der Werke S. N. Bernsteins. *G. Freud.*

Berman, D. L.: Untersuchung der Konvergenz von Interpolationsprozessen. Doklady Akad. Nauk SSSR **102**, 867—869 (1955) [Russisch].

Nach kurzem geschichtlichen Rückblick werden die von Bernštejn eingeführten Näherungsprozesse $U_n^{(p)}(f, x)$ und $\tilde{U}_n^{(p)}(f, x)$ betrachtet. Für eine auf $[-1, +1]$ stetige Funktion $f(x)$ und für $p = 1$ ist:

$$U_n^{(1)}(f, x) = (l_1^n(x) + l_2^n(x)) f(x_1^{(n)}) + (l_3^n(x) + l_4^n(x)) f(x_3^{(n)}) + \dots, \\ \tilde{U}_n^{(1)}(f, x) = \sum_{k=1}^n l_k^n(x) \frac{f(x_{k-1}^{(n)}) + f(x_{k+1}^{(n)})}{2}.$$

Hier sind $l_k^{(n)}$ die für die Knoten aus $[-1, +1]$ konstruierten Lagrangeschen Polynome; $x_1^{(n)} \leq x_2^{(n)} \leq \dots \leq x_n^{(n)}$ die Knoten; $n = n_0, n_0 + 1, \dots$. Es werden ohne Beweis folgende Sätze formuliert: 1. Für $f(x) = x$ und Knoten gleichen Abstandes a) divergiert $U_n^{(1)}(f, x)$ für alle $x \neq 0$ aus $(-1, +1)$, b) konvergiert $\tilde{U}_n^{(1)}(f, x)$ gegen x für alle x aus $[-1, +1]$ (Beantwortung der Gel'fondschen Frage, ob U und \tilde{U} stets gleichzeitig konvergieren); 2. wird beim Aufbau von $U_n^{(1)}(f, x)$ überall $f(x_k^{(n)})$

durch $\frac{1}{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}} \int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} f(t) dt$ ersetzt, so divergiert $U_n^{(1)}(f, x)$ bei Knoten gleichen

Abstandes und $f(x) = x$ für alle $x \neq 0$ aus $(-1, +1)$ (vgl. Berman, dies. Zbl. **36**, 174); 3. bei Knoten gleichen Abstandes und $f(x) = |x|$ divergiert $\tilde{U}_n^{(1)}(f, x)$ für jedes x aus $(-1, +1)$; 4. für $\tilde{U}_n^{(2)}(f, x)$ mit Tschebyschevskhen Knoten gilt die Abschätzung

$$|\tilde{U}_n^{(2)}(f, x) - f(x)| \leq (12\sqrt{2} + 2,5|T_n(x)|\pi^2)\omega(\pi/n),$$

wo $T_n(x) = \cos n \arccos x$ und $\omega(h)$ Stetigkeitsmodulus von $f(x)$ ist.

H. Bilharz-P. Sagirow.

Schweizer, Berthold: A symmetric generalization of the Lagrange interpolation formula. J. Math. Physics **34**, 157—159 (1955).

Die klassische Lagrangesche Interpolationsformel liefert ein Polynom vom Grade $n - 1$, das in symmetrischer Weise in n Punkten vorgegebene Werte annimmt. Durch Verallgemeinerung wird ein Polynom vom Grade $n(k + 1) - 1$ aufgestellt, dessen Ableitungen bis einschließlich der k -ten Ordnung ebenfalls gegebene Werte haben.

E. J. Nyström.

Kanno, Kôsi: Cesàro summability of Fourier series. Tôhoku math. J., II. Ser. **7**, 110—118 (1955).

The author shows that if $\varphi_\beta(t) = o(t^\gamma)$, $\gamma > \beta > 0$, and $\int_0^t |d(u^\alpha \varphi(u))| = O(t)$, $0 < t < \eta$, then the Fourier series of $\varphi(t)$ is summable (C, α) to zero at $t = 0$, where $\alpha = (A\beta - \gamma)/(A + \gamma - \beta - 1)$ and $A \geq \gamma/\beta$. If $\alpha = 1$, this reduces to the reviewer's convergence test of the Fourier series (this Zbl. **55**, 296). G. Sunouchi.

Mohanty, R. and M. Nanda: Note on the first Cesàro mean of the derived conjugate series of Fourier series. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 594—597 (1955).

$f(t)$ sei eine in $(-\pi, \pi)$ L -integrierbare Funktion der Periode 2π ,

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t).$$

Die Ableitung der konjugierten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$ ist bei $t = x$

$$(1) \quad - \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = - \sum_{n=1}^{\infty} n A_n(x).$$

Es sei $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, $h(t) = \{\varphi(t)/t\} - d$ mit $d = d(x)$ und

$\{t_n\}$ sei die Folge der Cesàro-Mittel der Ordnung 1 von (1). Die Verf. zeigen, daß dann $\frac{t_n}{\log n} \rightarrow \frac{d}{\pi}$ strebt (für $n \rightarrow \infty$), wenn nur die Bedingung $\int_t^\pi \frac{|h(u)|}{u} du = o\left(\log \frac{1}{t}\right)$ (für $t \rightarrow 0$) erfüllt ist. Man vergleiche hierzu M. L. Misra, dies. Zbl. 29, 26.

V. Garten.

Sinval, S. D.: A note on a theorem of F. C. Hsiang. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. 69, 79—84 (1955).

Let $f(x)$ be summable in $(0, 2\pi)$ with period 2π and $F(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]$ and $F_p(t) = \int_0^t F(u) du/u^{1+p}$. Hsiang [Duke math. J. 13, 43—50 (1946)] constructed an example of a function for which $F_p(t)$ converges but for which the $(C, 1/(1-p))$ means of the Fourier series of $f(x)$ have infinity as superior limit at the point x . The author proves that the demonstration of this result given by Hsiang is incorrect.

V. Ganapathy Iyer.

Žak, I. E.: Über einen Satz von Lévy über die absolute Konvergenz der Fourierreihen. Uspechi mat. Nauk 10, Nr. 1 (63), 107—112 (1955) [Russisch].

Beweis und Resultat eines Satzes von Lévy (dies. Zbl. 8, 312) werden auf das Zweidimensionale übertragen: $\varphi(z)$ sei in $a \leq z \leq b$ regulär. $f(x, y)$ möge in einem Rechteck nur Werte aus $[a, b]$ annehmen und sei dort L -integrierbar. Wenn die Fourierreihe von $f(x, y)$ absolut konvergiert, dann gilt dies auch von der Fourierreihe von $\varphi[f(x, y)]$.

L. Schmetterer.

Biernacki, M.: Sur les zéros des polynômes trigonométriques dont la suite des coefficients est monotone. Ann. Polon. Math. 1, 380—387 (1955).

Eine Folgerung des bekannten Satzes von Enestöm-Kakeya ist der Satz von G. Pólya: Die trigonometrischen Polynome

$$a_0 + a_1 \cos \varphi + \dots + a_n \cos n\varphi \quad \text{und} \quad a_1 \sin \varphi + \dots + a_n \sin n\varphi$$

haben genau $2n$ Nullstellen im Intervall $0 \leq \varphi < 2\pi$, wenn $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n$. Diesem Satz stellt Verf. folgende Aussage an die Seite: Die Polynome

$$a_k \cos k\varphi + \dots + a_n \cos n\varphi \quad \text{und} \quad a_k \sin k\varphi + \dots + a_n \sin n\varphi \quad (k < n)$$

besitzen genau $2k$ einfache Nullstellen im Intervall $0 \leq \varphi < 2\pi$, wenn die Koeffizienten a_k, a_{k+1}, \dots, a_n positiv sind und den Bedingungen

$$a_{\nu+1}/a_\nu \leq \left[\sqrt{k}/(\sqrt{k+1}) \right] \cdot (k+\nu)/(k+\nu+1) \quad \text{für} \quad k \leq \nu < n$$

genügen. — Weitere Varianten.

W. Specht.

Albrycht, J.: A generalization of a Zygmund-Bernstein theorem. Ann. Polon. math. 2, 64—66 (1955).

Let \bar{N} denote the class of all complex-valued functions $y(t)$, $(-\infty < t < \infty)$, measurable in every finite interval and such that $\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T N[|y(t)|] dt < \infty$, where N is one of a pair of functions complementary in the sense of Birnbaum-Orlicz. Let \bar{M} be the class of all complex-valued functions $x(t)$, $(-\infty < t < \infty)$, measurable in every finite interval, such that $x(t)y(t)$ is integrable in every finite interval for every $y \in \bar{N}$ and $\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t)y(t) dt \right| < \infty$. For the elements of \bar{M} a pseudo-norm is defined by

$$\|x\| = \sup_E \left\{ \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t)y(t) dt \right| \right\},$$

where E is the set of those elements of \bar{N} which satisfy $\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T N[|y(t)|] dt \leq 1$.

In particular, trigonometric polynomials are elements of \overline{M} . The author has proved the following theorem: If $s_n(t) = \sum_{k=-l}^l a_k e^{i\lambda_k t}$, $(\dots \lambda_{k+1} > \lambda_k > \dots > \lambda_0 > \dots > \lambda_{-k} > \lambda_{-k-1} > \dots; |\lambda_l| = |\lambda_{-l}|)$ then $\|s'_n(t)\| \leq \lambda_l \|s_n(t)\|$. This is an extension of a result of Bellman [Duke math. J. **10**, 649–651 (1943)] which in its turn is a generalization of the Zygmund-Bernstein Theorem known for ordinary trigonometric polynomials. *U. N. Singh.*

Koizumi, Sumiyuki: On integral inequalities and certain applications to Fourier series. Tôhoku math. J., II. Ser. **7**, 119–127 (1955).

Let $\varphi(z)$ be a function regular in the unite circle, then Littlewood-Paley (this Zbl. **15**, 254) introduced the function

$$g^*(\theta, \varphi) = g^*(\theta) = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-\varrho) |\varphi'(\varrho e^{i(\theta+t)})|^2 \bar{P}(\varrho, t) d\varrho dt \right\}^{1/2}$$

where $P(\varrho, t)$ is the Poisson Kernel. On the other hand Zygmund (this Zbl. **19**, 16) proved that for $p > 1$

$$(*) \quad \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(\theta) - \sigma_n(\theta)|^2}{n} \right\}^{p/2} d\theta \leq A_p \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^p d\theta$$

where $\varphi(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\theta}$, and $s_n(\theta) = \sum_{\nu=1}^n c_\nu e^{i\nu\theta}$, $\sigma_n(\theta) = \sum_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) c_\nu e^{i\nu\theta}$ applying another function

$$g(\theta, \varphi) = g(\theta) = \left\{ \int_0^1 (1-\varrho) |\varphi'(\varrho e^{i\theta})|^2 d\varrho \right\}^{1/2}.$$

The present author shows an interesting relation

$$A g^*(\theta) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(\theta) - \sigma_n(\theta)|^2}{n} \leq B g^*(\theta)$$

and gives a simple way of the proof of the relation (*). But another proposition of the author is partially false, since Lemma A (p. 121) is incorrect. *G. Sunouchi.*

Shapiro, Victor L.: Cantor-type uniqueness of multiple trigonometric integrals. Pacific J. Math. **5**, 607–622 (1955).

By using Bochner's circular summability and a more direct attack to the problem the author proves various new uniqueness theorems which improve some of a previous paper of the author on the same subject [Trans. Amer. math. Soc. **77**, 322–339 (1954)]. Here is one of the theorems. Let $u = (u_1, \dots, u_n)$, and $c(u)$, $u \in E_n$, any complex-valued function which is integrable on every bounded domain in E_n . Let $Z \subset E_n$ be a closed set of capacity zero. Suppose that (i) the trigonometrical integral is spherical summable $(C, 1)$ to zero almost everywhere; (ii) the $(C, 1)$ spherical means of rank R , $\sigma_R^{(1)}(x)$, is such that $\lim_{R \rightarrow \infty} |\sigma_R^{(1)}(x)| < \infty$ as $R \rightarrow \infty$ in $E_n - Z$; (iii) $c(u) (|u|^2 + 1)^{-1}$ is integrable in E_n . Then $c(u) = 0$ almost everywhere in E_n . *L. Cesari.*

Spezielle Funktionen:

Koschmieder, Lothar: Orthogonalpolynome einiger ebener Gebiete und Körper. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A **10**, 151–162 (1955) [Spanisch].

Es werden Systeme orthogonaler Polynome für gewisse ebene und räumliche Bereiche konstruiert, und zwar für Ellipse und Ellipsoid, elliptischen Kegel, Parabelsegment und elliptisches Paraboloid. Meist handelt es sich um Polynomsysteme, welche durch „Separation der Variablen“ auf Systeme von Polynomen niedrigerer Variablenzahl zurückgeführt werden können, und dadurch ist dann auch die Belegungsfunktion bestimmt.

K. Prachar.

Henrici, Peter: Addition theorems for general Legendre and Gegenbauer functions. *J. rat. Mech. Analysis* **4**, 983—1018 (1955).

In Fortsetzung früherer Untersuchungen [dies. Zbl. **52**, 68; **52**, 330; **56**, 98; *Pacific. J. Math.* **5**, 725—744 (1955)] gibt Verf. für die Differentialgleichung $\Delta u + (2\mu + 1)x^{-1}\partial u/\partial x + (2\nu + 1)y^{-1}\partial u/\partial y = 0$ Entwicklungen der Klasse C von Lösungen, die im Punkte $x = c \neq 0$, $y = 0$ regulär sind. Er zeigt, daß diese Klasse von Lösungen eine eindeutige konforme Abbildung auf die Klasse der analytischen Funktionen $f(w)$ gestattet, die im Punkte $w = 0$ regulär sind. Wählt man $f(w) = w^n = (1-w)^{\mu-\nu-1}u_n[c/(1-w), icw/(1-w)]$, so kann man die entsprechenden „Normallösungen“ $u_n(x, y)$ durch gewisse Verbindungen von Legendreschen Funktionen und Gegenbauerschen Polynomen (L. G.-Funktionen) darstellen; die Taylorsche Entwicklung für eine gegebene Funktion einer Veränderlichen führt zum Entwicklungssatz einer beliebigen Lösung in C nach diesen L. G.-Funktionen, welche letztere die Rolle der Potenzen in der Taylorentwicklung spielen. In Anwendung dieses Satzes erhält Verf. für die Legendreschen und Gegenbauerschen Funktionen Entwicklungen in L. G.-Funktionen, die die Additionstheoreme der Legendreschen, der Gegenbauerschen und der Besselfunktionen sowie der Heine-Neumannschen Reihen für $(z - \zeta)^{-1}$ verallgemeinern, und Entwicklungen des Produkts zweier Besselfunktionen und der hypergeometrischen Funktion ${}_2F_1(-\alpha, \mu + \nu + \alpha - 1; \nu + 1; y^2/(x^2 + y^2))$. Im Anhang wird eine Anzahl von Integralen ausgewertet, die sich aus den obigen Entwicklungen mittels der Orthogonaleneigenschaft der Gegenbauerschen Polynome ergeben. O. Volk.

Janković, Zlatko: Über die Legendreschen Funktionen. *Soc. Sci. natur. Croatica. Period. math.-phys. astron.*, II. Ser. **10**, 3—33 u. kroatische Zusammenfassg. 33—36 (1955).

Obwohl das Schrifttum über die Kugelfunktionen sehr umfassend ist und obwohl ihre Darstellung in Zusammenhang mit den hypergeometrischen Funktionen klassisch geworden ist und fast allgemein in dieser Weise durchgeführt wird, ist Verf. der Ansicht, daß es empfehlenswert scheint, auch von einem anderen Gesichtspunkt aus ihre Darstellung zu versuchen. Der Gedanke, unmittelbar aus der Differentialgleichung die Rekursionsformeln abzuleiten und für die späteren Folgerungen auszunutzen, erweist sich auch in diesem Fall, ebenso wie bei der Hermiteschen, Laguerreschen und Besselschen Differentialgleichung als sehr fruchtbar (dies. Zbl. **51**, 307; **52**, 65). Verf. erhält eine Reihe von Ergebnissen, die für die Theorie und Anwendung der Kugelfunktionen von großem Interesse sind. Im allgemeinen wird keine explizite Kenntnis der Lösungen vorausgesetzt, sondern die Rekursionsformeln erweisen sich als sehr nützlich, um die Lösungen bei ganzzahligen Werten der Parameter zu ermitteln. Da die Kugelfunktionen eine wichtige Rolle in der theoretischen Physik, insbesondere in der Quantenmechanik, spielen, sind Betrachtungen, die für diese Gebiete von besonderer Bedeutung sind, eingefügt. — Einige Druckfehler sind vorhanden. R. Gran Olsson.

Gjellestad, Guro: Note on the definite integral over products of three Legendre functions. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **41**, 954—956 (1955).

J. A. Gaunt [*Phil. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A **228**, 151—196 (1929)] hat die Dreiecksbedingungen $l_1 + l_2 + l_3 = \text{gerade ganze Zahl}$, $l_2 - l_1 \leq l_3 \leq l_2 + l_1$ dafür aufgestellt, daß das Integral $\int_{-1}^{+1} P_{l_1}^{m_1}(\cos \vartheta) P_{l_2}^{m_2}(\cos \vartheta) P_{l_3}^{m_3}(\cos \vartheta) d\vartheta$ mit $m_1 = m_2 + m_3$ nicht verschwindet. Später haben L. Infeld und T. E. Hull (dies. Zbl. **43**, 386) gezeigt, daß diese Bedingungen nicht hinreichend sind. Verf. gibt zwei Fälle an ($m_1 = m_2 = w$, $m_3 = 0$ und $l_1 = l_2 = n$, $l_3 = 2$ oder 4), in denen für gewisse ganzzahlige n, w das Integral verschwindet. O. Volk.

Ikenberry, Ernest: A system of homogeneous spherical harmonics. *Amer. math. Monthly* **62**, 719—721 (1955).

Lorch, Lee and Peter Szego: A singular integral whose kernel involves a Bessel function. *Duke math. J.* **22**, 407—418 (1955).

Let $J_\nu(t)$ be the Bessel function of order ν and $f(t)$ a function defined in $(0, A]$, $A > 1$, satisfying the following hypotheses: (i) $t^\lambda f(t)$ is integrable over $(0, A)$ for some λ , (ii) $f(1-)$ exists, (iii) $f(t)$ is of bounded variation in $[1, A]$. Then

$$(1) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu \int_0^A f(t) J_\nu(\nu t) dt = \frac{1}{3} f(1-) + \frac{2}{3} f(1+).$$

If $p(\nu) \geq 0$ for sufficiently large ν and $\sigma = \frac{1}{3} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu [2p(\nu)]^{3/2}$, then

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu \int_0^{1+p(\nu)} f(t) J_\nu(\nu t) dt = \frac{1}{3} f(1-) + \frac{1}{3} f(1+) \int_0^\sigma [J_{1/3}(t) + J_{-1/3}(t)] dt.$$

This last result implies that for $\lambda \geq -\frac{1}{2}$ we have

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sup_{x > 0} \nu^\lambda \int_0^x t^{-\lambda} J_\nu(t) dt = \frac{1}{3} \left\{ 1 + \int_0^c [J_{1/3}(t) + J_{-1/3}(t)] dt \right\} = K \sim 1,2473521,$$

where $c \sim 2,3834466$ is the least positive zero of $J_{1/3}(t) + J_{-1/3}(t)$. In particular

$\sup_{x > 0} \left| \int_0^x t^{-\lambda} J_\nu(t) dt \right|$ is bounded for $\lambda \geq -\frac{1}{2}$ as $\nu \rightarrow \infty$; for $\lambda \geq 1$ this was established by Calderon and Zygmund (this *Zbl.* **65**, 41). More exactly

$$(2) \quad \gamma(\lambda, \nu) < \sup_{x > 0} \left| \int_0^x t^{-\lambda} J_\nu(t) dt \right| < \gamma(\lambda, \nu) + A_\lambda \nu^{-\lambda},$$

where $\gamma(\lambda, \nu) = 2 - \lambda \Gamma(\frac{1}{2}(\nu + 1 - \lambda)) / \Gamma(\frac{1}{2}(\nu + 1 + \lambda))$, A_λ depends only on λ , $\nu + 1 > \lambda - \frac{1}{2}$ and either $|\nu| > \frac{1}{2}$, $\lambda \geq -\frac{1}{2}$ or $\nu > -1$, $\lambda \geq 0$. We have $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu^\lambda \gamma(\lambda, \nu) = 1$ and $A_\lambda \geq K - 1 \sim 0,2743521$. The lower bound in (2) is

the best possible since $\sup_{x > 0} \left| \int_0^x t^{-\lambda} J_\nu(t) dt \right| / \gamma(\lambda, \nu) \rightarrow 1$ as $\lambda \rightarrow 1$, $\nu \rightarrow 0$.

Finally if we do not suppose that $f(t)$ satisfies (iii) but only that $f(1+)$ exists, then (1) does not hold necessarily. In fact there exists a function $f(t)$ continuous at $t = 1$, such that the integral in (1) does not converge to $f(1)$; this is a consequence of the

unboundedness of the Lebesgue constante $A_\nu = \int_0^A |J_\nu(\nu t)| dt$. *J. Horváth.*

Carlitz, L.: A note on Hermite polynomials. *Amer. math. Monthly* **62**, 646—647 (1955).

Mittels der Methode der vollständigen Induktion wird die Formel

$$H_m(x) U_\mu(x) = \sum_{r=0}^m z^r r! \binom{m}{r} \binom{\mu}{r} U_{m+\mu-2r}(x)$$

bewiesen, wo $H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} d^m e^{-x^2} / dx^m$ und $U_\mu(x)$ eine beliebige Lösung der Rekursion $U_{\mu+1} = 2x U_\mu - 2\mu U_{\mu-1}$ (μ beliebig) ist; dieser Rekursion genügen auch die $H_m(x)$ ($\mu = m$). Vgl. N. Nielsen, *Recherches sur les polynomes d'Hermite* [Kopenhagen, Vidensk. Selsk. math.-fys. Meddel. I, 6, 80 p. (1918)], insbes. p. 31—33. *O. Volk.*

Dekanosidze, E. N.: Einige Eigenschaften der Lommelschen Funktionen von zwei Veränderlichen. *Vychislit. Mat. vychislit. Techn.* **2**, 97—107 (1955) [Russisch].

Für die durch $U_\nu(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{z}\right)^{\nu+2m} J_{\nu+2m}(z)$ und $V_\nu(w, z) =$

$U_{-\nu+2}(w, z) + \cos\left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w} + \frac{\nu\pi}{2}\right)$ erklärten Funktionen, die von Lommel anlässlich der Behandlung der Lichtbeugung eingeführt worden sind (vgl. z. B. Watson, *Theory of Bessel functions*, Cambridge 1922, Kap. 16), wird eine Reihe von formalen Beziehungen abgeleitet. Es handelt sich dabei um Darstellungen durch

Integrale, in denen neben den Besselschen Funktionen die Bildungen $U_\nu(w, w)$ und $U_\nu(w, 0)$ auftreten. Für $U_\nu(cz, z)$ wird eine asymptotische Entwicklung mitgeteilt, die für große z gilt. W. Hahn.

Gran Olsson, R.: An orthogonal property of the hypergeometric polynomial. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **28**, 59—61 (1955).

Bemerkungen und Berichtigungen zu der von H. Bateman unter dem gleichen Titel in *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **28**, 374—377 (1942) veröffentlichten Abhandlung. O. Volk.

Funktionentheorie:

● **Knopp, K.:** Funktionentheorie. Teil I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. (Sammlung Götschen, Bd. 668.) 8. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1955. 139 S. 8 Abb. DM 2,40.

● **Knopp, K.:** Funktionentheorie. Teil II: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. (Sammlung Götschen, Bd. 703.) 8./9. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1955. 130 S., 7 Fig. DM 2,40.

Bourion, Georges: Sur un mode d'approximation polynomiale d'une fonction holomorphe. *Bull. Sci. math., II. Sér.* **79**, 69—72 (1955).

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine D simplement connexe contenant le cercle $|z| < 1$ mais ne contenant pas le cercle $|z| < r$ si $r > 1$ et soit $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ le développement de $f(z)$ dans le cercle $|z| < 1$ en série de Taylor. Demandons s'il est possible d'approximer $f(z)$ dans le domaine entier D par des polynômes de la forme

$$P_k(z) = a_0 + \dots + a_{n_k} z^{n_k} + b_{n_k+1} z^{n_k+1} + \dots + b_{m_k} z^{m_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

où l'indice n_k tend avec k vers l'infini. L'A. prouve que la réponse est positive si l'on n'impose aucune condition sur la croissance relative des suites $\{n_k\}$ et $\{m_k\}$; mais si l'on impose la condition $m_k/n_k \rightarrow 1$, une approximation du type indiqué n'est possible que si le développement $\sum a_\nu z^\nu$ de $f(z)$ est à structure lacunaire. F. Leja.

Walsh, J. L.: Sur l'approximation par fonctions rationnelles et par fonctions holomorphes bornées. *Ann. Mat. pura appl., IV. Ser.* **39**, 267—277 (1955).

1. Soient $a_1, \dots, a_\mu, b_1, \dots, b_\nu$ des points à distance finie du plan complexe et $m_1, \dots, m_\mu, n_1, \dots, n_\nu$ des nombres positifs qui vérifient $\sum_{j=1}^\mu m_j = \sum_{j=1}^\nu n_j = 1$. Posons $u(z) = (z - a_1)^{m_1} \dots (z - a_\mu)^{m_\mu} / (z - b_1)^{n_1} \dots (z - b_\nu)^{n_\nu}$, et pour $\sigma > 0$ soit E_σ l'ensemble des z tels que $|u(z)| < \sigma$. Soit $f(z)$ une fonction qui est holomorphe dans E_σ mais qui ne l'est dans aucun E_σ avec $\sigma > \varrho$. Alors $f(z)$ peut être représentée à l'aide de la série d'interpolation (1) $f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n u_n(z)$, où $u_0(z) = 1$, $u_n(z) = ((z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n)) / ((z - \beta_1) \dots (z - \beta_n))$, les α_n sont choisis parmi les a_j de façon à ce qu'on ait

$$0 < A_1 < |((z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n)) / ((z - a_1)^{n m_1} \dots (z - a_\mu)^{n m_\mu})| < A_2$$

sur tout compact ne contenant pas de a_j ($A_1, A_2 =$ constantes indépendantes de n) et les β_n sont choisis de manière analogue parmi les b_j . La série (1) converge uniformément sur toute partie compacte de E_ϱ . On a $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = 1/\varrho$ et pour

$\sigma < \varrho$ on a $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\max_{z \in E_\sigma} |f(z) - s_n(z)| \right]^{1/n} = \sigma/\varrho$, où $s_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k u_k(z)$. Si de plus $f(z)$ est bornée sur E_ϱ , on a $|c_n| \leq A_3/\varrho^n$ et $\max_{n \in E_\sigma} |f(z) - s_n(z)| \leq A_4 \sigma^n / \varrho^n$. — Cette

série d'interpolation généralise en un certain sens la série de Taylor. — 2. Soit D un domaine multiplement connexe dont la frontière est formée par les courbes de Jordan $B_1, \dots, B_\mu, C_1, \dots, C_\nu$ deux à deux disjointes. Soit $U(z)$ harmonique dans D , continue sur D , $U(z) = 0$ si $z \in B_j$, $U(z) = 1$ si $z \in C_j$. Pour $0 < \sigma < 1$ soit

$D_\sigma \in D$ l'ensemble des z tels que $0 < U(z) < \sigma$. Soit $f(z)$ holomorphe dans D_σ et continue sur $B = \bigcup B_j$. Alors il existe des $f_n(z)$ holomorphes dans D , continues sur B , tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left[\max_{z \in B} |f(z) - f_n(z)| \right]^{1/n} \leq e^{-\sigma/\tau}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left[\max_{z \in D} |f_n(z)| \right] \leq e^{(1-\sigma)/\tau}$, où $2\pi\tau$ est la variation totale de la conjuguée de $U(z)$ le long de B . — Si $f(z)$ est bornée dans D , où les B_j sont analytiques on peut encore améliorer ce théorème, qui à son tour contient des résultats antérieurs de Nilson et Walsh [Trans. Amer. math. Soc. **55**, 53—67 (1944)]. — Fautes d'impression: P. 268, ligne 3 du bas: au lieu de $\alpha_1 = \alpha_j$, lire $\alpha_1 = a_j$; ligne 2 du bas: au lieu de $\alpha_{n+1} = \alpha_j$, lire $\alpha_{n+1} = a_j$.
J. Horváth.

Dařovitch, Voïn: Sur l'existence des valeurs limites de la résultante des fonctions, appartenant à la classe H_δ , $0 < \delta < 1$, et encore de certaines autres classes de fonctions analytiques. C. r. Acad. Sci., Paris **241**, 1441—1444 (1955).

Es seien die Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ definiert durch die Reihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, wobei $f(z)$ eine Funktion der Klasse H_δ , $0 < \delta < 1$ sei und die Reihe für $g(z)$ im Einheitskreis konvergiert und ihr Realteil durch das Poisson-Stieltjes-Integral

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\vartheta - \varphi) + r^2} dG(\vartheta)$$

dargestellt werden kann; $G(z)$ sei für $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ eine Funktion von beschränkter Schwankung. Dann hat die Funktion $F(z)$, definiert im Einheitskreis durch die Reihe $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$, in fast allen Punkten $|z| = 1$ wohlbestimmte Grenzwerte.
S. Schottlaender.

Ricci, Giovanni: Sull'andamento delle funzioni maggioranti delle serie di potenze. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **40**, 285—306 (1955).

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$, de rayon de convergence ≥ 1 ; l'A. compare pour $r \rightarrow 1 -$ les trois fonctions suivantes: module maximum $M(r)$ de $f(z)$ pour $|z| = r$; moyenne quadratique $M_2(r)$ définie par $[M_2(r)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int |f(re^{i\vartheta})|^2 d\vartheta = \sum |a_n|^2 r^{2n}$; „fonction majorante“ $\mathfrak{M}(r) = \sum |a_n| r^n$. Je signalerai en particulier les résultats suivants: Si $\sum |a_n| = \infty$, on a $\limsup \mathfrak{M}/M_2 \geq \sqrt{2}$; cette constante est la meilleure possible, on peut en effet trouver un $f(z)$ pour lequel $\sum |a_n| = \infty$, $\liminf \mathfrak{M}/M_2 = 1$, $\limsup \mathfrak{M}/M_2 = \sqrt{2}$. — L'existence pour M_2 d'une majoration $M_2(r) < (1-r)^{-\alpha(r)}$ avec un $\alpha(r)$ non croissant pour $0 < r < 1$ et tel que $\alpha(1-) = \beta \geq 0$ entraîne pour \mathfrak{M} les majorations

$\sqrt{1-r} \mathfrak{M}(r) \leq [1 + o(1)] \sqrt{\alpha(r)} + \frac{1}{2} \cdot M_2(r)$ et $\mathfrak{M}(r) \leq [1 + o(1)] K(\beta) (1-r)^{-\alpha(r)-1/2}$; pour $\alpha(r) = \text{const.}$, on retrouve un résultat de Hardy. — Pour terminer, l'A. étudie le cas où $\sum |a_n|^2$ converge, cherchant les conséquences pour les fonctions envisagées de l'existence d'une constante $\lambda \geq 0$ et d'une fonction „lentement oscillante“ $L(x)$ telles que $\sum n^{2\lambda} L^2(n) |a_n|^2 < \infty$.
G. Bourion.

Ricci, Giovanni: Prolungabilità e ultraconvergenza delle serie di potenze. Modulazione del margine delle lacune. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **14**, 602—632 (1955).

Cet article donne les démonstrations des résultats exposés dans une Note antérieure de l'A. (ce Zbl. **64**, 315).
G. Bourion.

Krishnaiah, P. V.: On Kakeya's theorem. J. London math. Soc. **30**, 314—319 (1955).

Eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes von Eneström-Kakeya auf

komplexe Potenzreihen. Die Funktion $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$ genüge den Bedingungen:

$$(1) \quad a_{n-1} - a_n = |a_{n-1} - a_n| \exp(i(\alpha + \vartheta_n)) \quad \text{für } n \geq 1$$

mit festem reellen α und Argumenten ϑ_n , die mit festem ϑ aus $0 \leq \vartheta < \frac{1}{2}\pi$ die Ungleichung $|\vartheta_n| \leq \cos^{-1}(\cos^n \vartheta)$ erfüllen.

$$(2) \quad \lim a_n = \varrho \exp(i(\alpha + \beta)) \quad \text{mit } 0 \leq \varrho < \infty \text{ und } |\beta| \leq \frac{1}{2}\pi.$$

Dann liegen alle Nullstellen von $f(z)$ im Kreisbereich $|z| \geq \cos \vartheta$. — Untersuchungen über die Genauigkeit dieser Einschränkung. W. Specht.

Grunsky, Helmut: Eine funktionentheoretische Integralformel. *Math. Z.* **63**, 320—323 (1955).

Es sei \mathfrak{P} ein ein- oder mehrfach zusammenhängendes, beschränktes, von Polygonen mit Ecken z_ν ($\nu = 1, \dots, n$) berandetes Gebiet und ε_ν der Einheitsvektor der von z_ν ausgehenden und $\varepsilon_{\nu-1}$ der Einheitsvektor der in z_ν einmündenden Polygonseite, bei positiver Orientierung in bezug auf \mathfrak{P} . Ist f analytisch in \mathfrak{P} und stetig auf der abgeschlossenen Hülle von \mathfrak{P} , so folgt aus dem Gauß-Stokesschen Integralsatz

die Formel $\int_{\mathfrak{P}} f'' d\lambda = \sum_{\nu=1}^n \delta_\nu f(z_\nu)$ mit $\delta_\nu = i 2^{-1} (\varepsilon_\nu^{-2} - \varepsilon_{\nu-1}^{-2})$, wobei λ den Flächen-

inhalt bedeutet. Im Fall eines Dreiecks \mathfrak{P} mit Ecken z_1, z_2, z und $f(z_1) = f(z_2) = 0$ wird daher $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(2\lambda(\mathfrak{P}))^{-1} \int_{\mathfrak{P}} f'' d\lambda$. Hieraus folgt u. a.: Ist f analytisch in einem konvexen Gebiet \mathfrak{G} und $f(z_1) = f(z_2) = 0$ und $|f''(z)| \leq 1$ für jedes z in \mathfrak{G} , so gilt $|f(z)| \leq 2^{-1} |z - z_1| |z - z_2|$. K. Krickeberg.

Vekua, N. P.: Über eine Randwertaufgabe der linearen Konjugiertheit für mehrere unbekannte Funktionen mit vorgegebenen Verschiebungen. *Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze* **21**, 169—187 und russ. Zusammenfassg. 187—189 (1955) [Georgisch].

Es sei D^+ ein endliches Gebiet in der Ebene der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$, das von einer einfach geschlossenen, glatten Kurve L begrenzt wird. Als positive Richtung von L nehmen wir diejenige, die D^+ zur Linken läßt. Wir setzen voraus, daß der Winkel, den die Tangente an L mit einer festen Richtung bildet, einer Hölderbedingung genügt. — Die auf L gegebenen Funktionen $\alpha_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, mögen auf L von Null verschiedene Ableitungen haben und einer Hölderbedingung genügen; $\alpha_k(t)$ bilde L eineindeutig unter Umkehrung der Orientierung auf sich ab. — In der vorliegenden Arbeit wird folgende Aufgabe behandelt: es sind zwei in D^+ meromorphe Vektoren $q(z) = (q_1, \dots, q_n)$, $q^*(z) = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ zu bestimmen, die der Randbedingung

$$(1) \quad \varphi_j^+[\alpha_j(t_0)] = \sum_{k=1}^n G_{jk}(t_0) \psi_k^+(t_0) + g_j(t_0) \quad (j = 1, \dots, n)$$

genügen; hierbei sind $G_{jk}(t_0)$, $g_j(t_0)$ auf L gegebene Funktionen, die einer Hölderbedingung genügen, mit auf L nirgends verschwindender Determinante $||G_{jk}(t_0)||$. — Aus dieser Randwertaufgabe erhält man für $\alpha_1(t) = \dots = \alpha_n(t)$ die Aufgabe, die Verf. früher [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **16**, 157—180 (1952)] behandelt hat. Auch die bekannte Randwertaufgabe für mehrere unbekannte Funktionen von Carleman ergibt sich daraus:

$$(2) \quad \varphi^+[\alpha(t_0)] = G(t_0) \varphi^+(t_0) + g(t_0)$$

wobei $G(t_0) = ||G_{jk}(t_0)||$, $g(t_0) = (g_1, \dots, g_n)$. Carleman hat die homogene Aufgabe im Falle $n = 1$, $\alpha[\alpha(t)] = t$ betrachtet, aber nicht ihre vollständige Lösung gegeben. Die Aufgabe (2) ist für $n = 1$, $\alpha[\alpha(t)] = t$ von Kveselava [Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze **16**, 39—80 (1948)] gelöst worden. Für mehrere unbekannte Funktionen hat Verf. (l. c.) die Aufgabe (2) unter der Bedingung (3) $\alpha[\alpha(t)] = 1$ gelöst. — Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit lösen wir die Aufgabe (1), im zweiten geben wir die Lösung der Carlemanschen Aufgabe (2) für den Fall, daß (3) durch die Bedingung (4) $\alpha^m(t) = t$, $m > 0$ gerade, ersetzt wird (wobei $\alpha^m(t) = \alpha[\alpha^{m-1}(t)]$ die m -fache Iterierte von $\alpha(t)$ bezeichnet). — Die Methode besteht darin, daß man die Aufgabe auf bestimmte Systeme singulärer Integralgleichungen von normalem Typus zurückführt; sie führt zur allgemeinen Lösung der betrachteten Aufgaben.

Aus der russ. Zusammenfassg.

Bagemihl, F. and W. Seidel: Regular functions with prescribed measurable boundary values almost everywhere. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **41**, 740—743 (1955).
Sei G ein von k Jordan-Kurven berandetes Gebiet der komplexen Zahlenebene

(hier sei der Einfachheit halber $k = 1$ angenommen). C sei eine Jordankurve im Innern von G und B die Randkurve von G . Von jedem Punkt $\zeta \in C$ gehe eine stetige Kurve J_ζ aus, die unter Einhaltung einer gewissen Monotoniebedingung gegen B strebt. Von der Schar $\{J_\zeta\}$ wird dabei vorausgesetzt, daß sie das von B und C berandete Ringgebiet einfach überdeckt. Dann lautet der erste Satz: Ist M ein F^σ der 1. Kategorie auf C und sind $\alpha(\zeta), \beta(\zeta)$ in M definierte reellwertige Funktionen höchstens von der 1. Baireschen Klasse, so existiert eine in G reguläre Funktion, deren Real- und Imaginärteil längs J_ζ ($\zeta \in M$) gegen $\alpha(\zeta)$ bzw. $\beta(\zeta)$ streben. Der Beweis stützt sich auf Approximationssätze von Keldysh, Lavrentieff und Mergelyan. — Ist insbesondere B rektifizierbar und endet in jedem Punkt ω von B genau eine Kurve J_ζ , die jetzt mit J_ω bezeichnet sei, so gilt: Sind $\lambda(\omega), \mu(\omega)$ meßbare Funktionen auf B , so existiert eine in G holomorphe Funktion, deren Realteil (Imaginärteil) längs J_ω für fast alle $\omega \in B$ gegen $\lambda(\omega)$ ($\mu(\omega)$) strebt. — Es folgen noch einige Folgerungen und Modifikationen zu diesen Sätzen. P. Seibert.

Lokki, Olli: Über analytische Funktionen mit gegebenen Randwerten. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I **202**, 10 S. (1955).

Let $\alpha(\varphi)$ be a given non-negative integrable (in Lebesgue's sense) real function on $|z| = 1$ for which $(1) \int_0^{2\pi} |\log \alpha(\varphi)| d\varphi$ exists and is finite. Then, with the aid of the Poisson integral formula, it is easy to construct a regular function in the unit circle whose absolute value has radial limit $\alpha(\varphi)$ for almost all φ . The author considers the case that the integral (1) diverges. He proves: If $\alpha(\varphi)$ ($0 \leq \alpha(\varphi) < 1$) is an integrable real function on $|z| = 1$ such that $\int_0^{2\pi} \log_v |\log \alpha(\varphi)| d\varphi$ diverges for $v \leq n - 2$ but converges for $v = n - 1$, then there exists a non-vanishing regular function $\Phi(z)$ in $|z| < 1$ such that $\lim_{r \rightarrow 1} |\Phi(re^{i\varphi})| = \alpha(\varphi)$ for almost all φ , where $\log_n a$ denotes the n times repeated logarithm of a . K. Noshiro.

Lehto, Olli: Boundary theorems for analytic functions. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I **196**, 8 S. (1955).

The author studies the distribution of values of functions $f(z)$ meromorphic in $|z| < 1$ by means of the closure E of the set of radial limit values $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$. It is shown that if the set of values assumed by $f(z)$ is dense in the plane, then $f(z)$ can omit at most two values outside E , while if the set of values of $f(z)$ is not everywhere dense in the plane, then $f(z)$ assumes in $|z| < 1$ either every point or no point of an arbitrary component of the complement of E . If, in addition, $f(z)$ is of bounded characteristic in $|z| < 1$, and if the values assumed by $f(z)$ are dense in the plane, then $f(z)$ can omit at most one value outside E . Examples are given to show that the results are best possible. A. J. Lohwater.

Vallée Poussin, C. de la: Le théorème de Picard du point de vue topologique. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. **69**, 37—49 (1955).

Considérations topologiques simples sur les transformations continues du plan fini (z) par une fonction entière. Certains des faits mentionnés ne sont pas exacts en général comme, par exemple, l'énoncé du paragraphe 2, b qui ne tient pas compte de l'existence possible de valeurs asymptotiques finies sur les courbes que l'A. appelle „normales“. — Le rapp. fait remarquer qu'il est impossible de démontrer, en n'utilisant que les propriétés topologiques signalées dans ce travail, le théorème de Picard, comme on s'en rend compte immédiatement en envisageant la transformation $u = \lambda[t(z)]$, où $t = t(z)$ est une transformation topologique du plan fini (z) en $|t| < 1$, et $u = \lambda(t)$ la fonction modulaire définie dans $|t| < 1$. Cette transformation possède toutes les propriétés des fonctions entières considérées par l'A. et admet, cependant, trois valeurs lacunaires.

S. Stoilow.

● Schaeffer, A. C. and D. C. Spencer: Coefficient regions for schlicht functions. With a chapter on the region of values of the derivative of a schlicht function by Arthur Grad. (American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 35) New York: American Mathematical Society 1950. XVI, 311 p. \$ 6.00.

Das Koeffizientenproblem der Schlichten Funktionen hatte am Ende der dreißiger Jahre durch das Auftreten der neuen Methodik der Variationen neuen Auftrieb erfahren: in den USA durch Schiffer, Schaeffer, Spencer, in Rußland durch Goluzin (und deren Kreise) entstanden zahlreiche Einzelarbeiten. Die Verff. haben in dem vorliegenden Werk ebenso wie die Arbeiten der amerikanischen Richtung zusammengefaßt, wie auch eine Fülle neuer Tatsachen aufgeklärt, so daß gewiß ein eindrucksvolles Gebäude errichtet wurde, ohne daß doch trotz des erheblichen Umfangs das ersuchte Hauptziel, der allgemeine Nachweis der Bieberbachschen Vermutung, bzw. einiger ihrer Fortführungen, wirklich schon gelungen wäre. — Das ist bekanntlich in der Zwischenzeit in Arbeiten von Hayman einerseits, Schaeffer und Garabedian andererseits wesentlich weiter verfolgt worden. — Hier handelt es sich darum, den $(2n - 2)$ -dimensionalen Bereich V_n des entsprechenden Euklidischen Raumes der (komplexen) Koeffizienten (a_2, a_3, \dots, a_n) einer schlichten Potenzreihe $w = z + a_2 z^2 + \dots$ abzustrecken und auf seine Eigenschaften abzutasten, soweit diese eben aus der Voraussetzung der Schlichtheit gewonnen werden können. Es handelt sich wirklich um einen Bereich — V_n ist abgeschlossen — und den Randpunkten sind gewisse Extremalfunktionen der Klasse S zugeordnet, die einer typischen Differentialgleichung von der Form

$$\left(\frac{z}{w} \frac{dw}{dz}\right)^2 P(w) = Q(z), \text{ mit } P(w) = \sum_{1}^{n-1} A_\nu w^{-\nu}, \quad Q(z) = \sum_{-n+1}^{n-1} B_\nu z^{-\nu}$$

genügen, wobei $P(w)$ und $Q(z)$ die angedeutete Gestalt haben, und $Q(e^{i\varphi}) \geq 0$ ist, mit mindestens einer Nullstelle von gerader Ordnung. Der Bereich V_n hat ferner die Struktur der Hyperkugel. Die Verff. untersuchen des Näheren die Zusammenhänge um die P, Q , die Singularitäten der Differentialgleichung, greifen den Teichmüller'schen Gedanken der Einführung einer Metrik auf dieser Grundlage auf und verfolgen diese Ideen weiter: Geodätische, Schlußweise Länge-Flächen-Abschätzung, Löwner'sche Kurven. Zwar sind Randpunkte von V_n und Extremalfunktionen eineindeutig zugeordnet, nicht aber solche Funktionen und obige Differentialgleichungen. Das wird nach verschiedenen Richtungen aufgezeigt und belegt. Es folgen Verbindungen zwischen Variationsmethoden und der Löwner'schen Methode, die Untersuchung von Stützflächen K_n , die Untersuchung von Funktionen, die mehr als einer Differentialgleichung obiger Art genügen, die der Randelemente von V_n , die Einschnitten zugehören, und schließlich eine Parameterdarstellung für den Rand von V_n . — Der Rest des Werkes gilt dem Sonderfall des Bereichs V_3 — der als vierdimensionaler in eindrucksvoller Weise auch zeichnerisch durch Querschnitte erfaßt wird: Zwei Farbtafeln lassen erkennen, mit welchen großen Komplikationen man schon in diesem Sonderfall zu tun hat; die Bilder werden mathematische Arbeitszimmer schmücken können. — Auf den Anhang von Grad kann durch Verweis auf seinen Titel zur Genüge hingewiesen werden. E. Ullrich.

Terzioglu, A. Nazim und Suzan Kahramaner: Ein Verzerrungssatz des Argumentes der schlichten Funktionen. *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul. Sér. A* 20, 81—90 (1955).

The authors prove that if $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ is regular and univalent in the unit circle $|z| < 1$, then

$$|\arg f(z)/z| \leq C |z|/(1 - |z|^2) \text{ in } |z| < 1,$$

where C is a constant. To prove this inequality, they use the following approximation: If $F(z) = \frac{1}{4} z/f(z)$ (clearly $0 < |F(z)| < 1$ in $|z| < 1$), then there

exists a sequence of functions

$$E_n(z) = \prod_{v=1}^n \frac{c_v(n) - z}{1 - \bar{c}_v(n)z} \quad (|c_v(n)| < 1)$$

which converges uniformly to $F(z)$ in any circle $|z| \leq r < 1$. K. Noshiro.

Heins, Maurice: Meromorphic functions with assigned asymptotic values. *Duke math. J.* **22**, 353—356 (1955).

Es wird folgender Satz bewiesen: Gegeben eine Riemannsche Fläche F und eine analytische Menge A in der komplexen Zahlenebene. Dann existiert eine analytische, auf F reguläre Funktion, für welche die Menge der endlichen Zielwerte gleich A ist. Damit werden Resultate von Kierst (dies. Zbl. **15**, 307) und vom Verf. (dies. Zbl. **56**, 73) verallgemeinert. Das Problem wird zurückgeführt auf die Frage nach der Existenz einer analytischen Funktion f auf F , für welche jede Komponente des Urbildes $f^{-1}(\Omega)$ eines beliebigen beschränkten Gebietes Ω relativ kompakt ist. Es wird gezeigt, daß zu jeder Fläche F eine solche Funktion f existiert. P. Seibert.

Sario, Leo: Extremal problems and harmonic interpolation on open Riemann surfaces. *Trans. Amer. math. Soc.* **79**, 362—377 (1955).

Verf. behandelt Interpolationsprobleme für harmonische und analytische Funktionen im Zusammenhang mit bestimmten Extremaleigenschaften auf offenen Riemannschen Flächen. Derartige Überlegungen ergeben sich auf verhältnismäßig einfache Weise für den speziellen Fall einer kompakten Fläche W , die von einer endlichen Anzahl analytischer Jordanbögen begrenzt wird. Hingegen erweist sich die Aufgabe für Flächen mit allgemeinerer Berandung, sowie für solche mit unendlich hohem Geschlecht als bedeutend komplizierter. Verf. ist es gelungen, das folgende Reduktionstheorem aufzustellen, durch welches der allgemeine Fall mit dem zuerst erwähnten spezielleren verbunden wird: Vorausgesetzt, daß das minimalisierende Funktional wachsend ist mit dem Gebiet und die minimalisierenden Funktionen auf kompakten Teilgebieten W_n mit analytischer Berandung eine normale Familie bilden, zieht die Lösbarkeit des Extremalenproblems für W_n diejenige für W nach sich. Im folgenden wird die Existenz gewisser minimalisierender Funktionen mit Hilfe des Dirichletintegrals nachgewiesen. H. P. Künzi.

Parreau, Michel: Fonction caractéristique d'une application conforme. Relation avec la notion d'application de type Bl . *C. r. Acad. Sci., Paris* **241**, 1545—1546 (1955).

Enoncés de résultats dérivant du principe classique de Lindelöf, précisé et complété par Heins et par Lehto et étendu par l'A. au cas où, sur les deux surfaces de Riemann R et S , on considère deux domaines relativement compacts F et G et la restriction de l'application conforme f de R dans S à F ; on obtient ainsi la relation

$$G_G^q(f(p), q) = N_F(p, q) - H_{FG}(p, q) + U_{FG}(p, q),$$

où N et H sont des potentiels de Green dans F et U est la moyenne de G_G^q dans F . — L'expression $S_{FG}^q = G_G^q + H_{FG} = N_F + U_{FG}$ est appelée caractéristique de f ; elle se réduit à la fonction $T(r, f)$ de Nevanlinna dans le cas: $R = \{|z| < 1\}$, $S = (w)$, $F = \{|z| < r\}$, $G = \{|w| > 1\}$, $p = 0$ et $q = \infty$. — Le premier théorème de Nevanlinna, le théorème de Frostman et le théorème de Nevanlinna-Frostman sur les fonctions à caractéristique bornée se généralisent. On en déduit une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f de $|z| < 1$ dans le plan complexe (w) , de caractéristique bornée, soit „de type Bl “ (au sens de M. Heins), ainsi que l'inclusion $O_{HB} \subset O_{AM_0}$ concernant les classes de surfaces de Riemann. Les démonstrations paraîtront dans un travail ultérieur. S. Stoilow.

Pirl, Udo: Isotherme Kurvenscharen und zugehörige Extremalprobleme der konformen Abbildung. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg* **4**, 1225—1252 (1955).

Wir nennen $\mu = (1/2\pi) \log R$ den Modul des Kreisinges $1 < |z| < R$. — Gegeben sei ein n -fach zusammenhängender schlichter Bereich B_n ohne punktförmige Randkomponente; sei K ein beliebiges Kontinuum, welches B_n in n zweifach zusammenhängende Gebiete G_v , $v = 1, \dots, n$, zerlegt (genau ein Randkontinuum jedes G_v soll Teilmenge von K sein); dabei wird zugelassen, daß gewisse G_v leer sind (Verschwindungsfall). Sei μ_v der Modul von G_v ; bei gegebenen positiven Zahlen α_v , $v = 1, \dots, n$, sucht man K so, daß $\sum_{v=1}^n \alpha_v^2 \mu_v$ möglichst groß wird. Bewiesen

wird die Existenz und Eindeutigkeit eines Extremalkontinuums K . Dabei erweist sich die Zulassung des „Verschwindungsfalles“ als ganz wesentlich; er ist sogar kein Sonderfall, sondern hängt von derselben Anzahl von Parametern ab wie der allgemeine Fall. — Verwendet wird die Flächenstreifenmethode von Grötzsch, nicht aber die Methode der Extremallänge von Ahlfors und Beurling. Statt der von n Vollkreisen begrenzten Gebieten P'_n (Koebe) werden hier Normalgebiete P_n durch geeignete Verheftung von n (auch von den α_v abhängigen) Rechtecken, oder genauer gesagt von n Zylinderstücken konstruiert. Jedes P_n wird durch sein Extremalkontinuum K wieder in die n Zylinderstücke zerlegt. Eine eindeutige Zuordnung zwischen den P_n und den P'_n wird festgestellt (Kontinuitätsmethode), wodurch obiger Existenz- und Eindeutigkeitssatz vollständig bewiesen wird. — Zunächst wird der Fall $n = 3$ besonders erläutert. — Reduziert sich eine Randkomponente von B_n auf einen Punkt a_v , so entspricht ihr in P_n das Ende eines Halbstreifens. Der Rand von B_n bestehe aus m Punkten a_1, \dots, a_m und $n - m$ nicht punktförmigen Kontinuen. Die zulässigen Kontinuen K zerlegen B_n in n zweifach zusammenhängende Gebiete G_1, \dots, G_n ; G_1, \dots, G_m haben unendlichen, G_{m+1}, \dots, G_n endlichen Modul μ_v . Das Gebiet $G_v \cup a_v$ ($v = 1, \dots, m$) ist einfach zusammenhängend; sei R_v der konforme Radius von $G_v \cup a_v$ im Punkte a_v . Das oben beschriebene Extremalproblem soll jetzt durch folgendes ersetzt werden: Gesucht wird ein zulässiges Kontinuum K , für welches die Summe $\frac{1}{2\pi} \sum_{v=1}^m \alpha_v^2 \log R_v + \sum_{v=m+1}^n \alpha_v^2 \mu_v$

ein Maximum ist. Wie oben werden Existenz und Eindeutigkeit des Extremalkontinuums bewiesen. — Der Fall $m = n$ wird analytisch durch Herleitung einer Differentialgleichung gelöst: man kann das Extremalkontinuum bestimmen. Hier ist der Verschwindungsfall offenbar ausgeschlossen. Einige Spezialfälle wurden schon einerseits von Goluzin, andererseits von J. A. Jenkins (mit der Methode der Extremallänge) gelöst. — Der Fall $m = n - 1$ läßt sich durch Spiegelung auf den eben besprochenen zurückführen. — Auf die Anwendbarkeit der zugrunde gelegten Normalbereiche P_n für die Untersuchung von quasikonformen Abbildungen wird auch hingewiesen (Streckung der Zylinderteile von P_n). *J. Hersch.*

MacLane, Gerald R.: On the Peano curves associated with some conformal maps. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 625—630 (1955).

Salem und Zygmund bewiesen die Existenz einer Funktion $f(z)$, analytisch in $|z| < 1$ und stetig in $|z| \leq 1$, bei der die Kurve $w = f(e^{it})$, $0 \leq t < 2\pi$, ein Quadrat beschreibt [vgl. Duke math. J. **12**, 569—578 (1945)]. Weitere Beispiele dazu geben Piranian, Titus und Young (vgl. dies. Zbl. **49**, 54). Ähnlich wie Ohtsuka (dies. Zbl. **56**, 298) beweist Verf. entsprechende Aussagen unter Benutzung bestimmter Riemannscher Flächen. Im Hauptergebnis wird gezeigt, daß falls D ein Gebiet der w -Ebene darstellt und $f(z)$ eine analytische Funktion in $|z| < 1$ ist (stetig in $|z| \leq 1$), für die der Wertevorrat genau D ist, so existiert unter diesen Voraussetzungen eine Funktion $F(z)$, analytisch in $|z| < 1$ und stetig in $|z| \leq 1$, für die der Wertevorrat gerade D ist und der Wertevorrat von $F(e^{it})$ ($0 \leq t < 2\pi$) gerade D^- beträgt (D^- ist der Rand von D). Weitere Untersuchungen beziehen sich auf die Singularitätenmenge der betrachteten Funktionen. *H. P. Künzi.*

Strebel, Kurt: On the maximal dilation of quasiconformal mappings. Proc. Amer. math. Soc. 6, 903—909 (1955).

Verf. behandelt eine Art quasikonformer Abbildungen, die den von Pfluger und Hersch eingeführten pseudoanalytischen bzw. quasianalytischen Funktionen entsprechen. G und G' seien zwei ebene und offene Punktmengen, $w(z)$ eine topologische Abbildung von G auf G' . Q bedeute irgendein Viereck in G mit dem konformen Modul m . Unter dem maximalen Dilatationsquotienten der Abbildung $G \rightarrow G'$ versteht man die Zahl $K(w(z)) = K = \sup_Q m'/m$, wenn m' den Modul des Bildes

Q' von Q angibt. Ist $K < \infty$, so nennt Verf. die Abbildung quasikonform. Nun wird eine geschlossene Teilmenge $E \subset G$ betrachtet und $K_0(w(z)) = K_0$ für die maximale Dilatation von $G - E$ gesetzt. Verf. interessiert sich für solche E Mengen, für die $K_0 = K$ bleibt. Es wird gezeigt, daß die Antwort verschieden ausfällt, je nachdem $K < \infty$ oder $K = \infty$ ist. Eine Punktmenge E wird als hebbbar (deletable) bezeichnet, falls $K_0 = K$ gilt. Nach Ahlfors ist ein analytischer Kurvenbogen hebbbar für die Klasse der topologischen Abbildungen. Verf. beweist dann mit verhältnismäßig einfachen Modulabschätzungen die folgenden sehr interessanten und aufschlußreichen Resultate: 1. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jede quasikonforme Abbildung $w_0(z)$ von $G - E$ fortsetzbar ist in ganz G mit $K = K_0$, besteht darin, daß jede kompakte Teilmenge von E eine Nullmenge O_{AD} ist. 2. (Erweiterung des zit. Ahlfors'schen Satzes.) Wenn E eine geschlossene Teilmenge von G ist, die sich aus einer abzählbaren Menge von Punktmengen endlichen linearen Maßes zusammensetzt und $w(z)$ irgendeine topologische Abbildung von G bedeutet, so ist die maximale Dilatation von G gleich derjenigen von $G - E$, d. h. E ist hebbbar. 3. Wenn E eine abgeschlossene, zweidimensionale Teilmenge vom Maß Null ist und $w(z)$ eine quasikonforme Abbildung von G bezeichnet, so ist $K = K_0$, d. h. E ist dann hebbbar.

H. P. Künzi.

Potapov, V. P.: Die multiplikative Struktur der J -dehnungsfreien Matrizen. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. 4, 125—236 (1955) [Russisch].

Für analytische Funktionen $w(\zeta)$, die für $|\zeta| < 1$ regulär mit $|w(\zeta)| < 1$ sind, kennt man eine Darstellung

$$w(\zeta) = e^{i\theta_0} \prod \left(\frac{\zeta_k - \zeta}{1 - \bar{\zeta}_k \zeta} \cdot \frac{|\zeta_k|}{\zeta_k} \right) \exp \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + e^{i\theta}}{\zeta - e^{i\theta}} d\sigma(\theta) \right\},$$

wo $\sigma(\theta)$ eine Funktion von beschränkter Variation ist. Der Verf. betrachtet nun eindeutige, analytische Funktionen in $w(\zeta)$ mit $|\zeta| < 1$, deren „Werte“ Matrizen m -ter Ordnung sind. Die Bedingung $|w(\zeta)| < 1$ wird verallgemeinert unter Zugrundelegung einer im allgemeinen Falle indefiniten Hermiteschen Metrik. Es wird für $q \geq 0$, $p + q = m$ die Matrix $J = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ benutzt, wo I_p und I_q die Einheitsmatrizen der durch die Indizes angegebenen Ordnungen sind. Der Matrix $w(\zeta)$ wird nun die Bedingung auferlegt, daß $w(\zeta) J w^*(\zeta) - J$ eine nicht positive Hermitesche Matrix ist. Das Hauptresultat des Verf. besteht darin, daß jede solche Matrix $w(\zeta)$, die nicht identisch in ζ singular ist, die folgende Darstellung zuläßt

$$w(\zeta) = \mathfrak{B}_\infty(\zeta) \mathfrak{B}_0(\zeta) \int_0^{\zeta} \exp \left\{ \frac{\zeta + e^{i\theta(t)}}{\zeta - e^{i\theta(t)}} \right\} dE(t).$$

Dabei gilt

$$\mathfrak{B}_\infty(\zeta) = \prod \mathfrak{U}_k \begin{pmatrix} I_{m-q'_k} & 0 \\ 0 & \frac{1 - \bar{\mu}_k \zeta}{\mu_k - \zeta} \frac{\mu_k}{|\mu_k|} I_{q'_k} \end{pmatrix} \mathfrak{U}_k^{-1},$$

$$\mathfrak{B}_0(\zeta) = \prod \mathfrak{B}_j \begin{pmatrix} \lambda_j - \zeta & |\lambda_j| & I_{p'_j} & 0 \\ 1 - \bar{\lambda}_j \zeta & \lambda_j & 0 & I_{m-p'_j} \end{pmatrix} \mathfrak{B}_j^{-1},$$

wo die Produkte über die Pole μ_k und Nullstellen λ_j von $|w(\zeta)|$ im Einheitskreis

erstreckt werden. $q'_k \leq q$, $p'_j \leq p$ ist und die Matrizen \mathfrak{U}_k und \mathfrak{B}_j den Bedingungen genügen $\mathfrak{U}_k J \mathfrak{U}_k^* = J$, $\mathfrak{B}_j J \mathfrak{B}_j^* = J$. Das Integral ist das multiplikative Matrizenintegral von Volterra-Schlesinger, allerdings verallgemeinert dem Stieltjesschen Integralbegriff entsprechend. Dem Beweis des Satzes wird eine ausführliche Skizze des Beweises im Falle definiter Metrik ($q = 0$) vorausgeschickt. Der Beweis im allgemeinen Falle beginnt mit der Übertragung der Lemmata von Schwarz und Julia auf die betrachtete Matrizenklasse; sodann werden die einzelnen „Elementarfaktoren“ diskutiert, aus denen die „Blaschkeprodukte“ \mathfrak{B}_∞ , \mathfrak{B}_0 zusammengesetzt sind. In einem weiteren Abschnitt wird die Konvergenz der beiden Blaschkeprodukte bewiesen und die Wirkung ihrer Abspaltung diskutiert, worauf für die übrigbleibende Matrizenfunktion ohne Pole und Nullstellen die Integraldarstellung hergeleitet wird. In einem Anhang wird das multiplikative Stieltjesintegral besprochen. In der Einleitung wird auf die Anwendung der Resultate des Verf. Bezug genommen, die von M. S. Livschitz in der Theorie der linearen selbstadjungierten Operatoren gemacht wurde. Die umfangreiche Arbeit ist sehr sorgfältig gegliedert, ohne zu ausführlich zu sein.

A. Ostrowski.

● **Bremermann, Hans-Joachim:** Die Charakterisierung von Regularitätsgebieten durch pseudokonvexe Funktionen. (Schriftenreihe des Math. Inst. d. Univ. Münster, Heft 5.) Münster: Buch- und Steindruckerei Max Kramer 1951. 92 S. Dissertation.

Les fonctions appelées pseudo-convexes par l'A. sont les fonctions plurisousharmoniques [cf. P. Lelong, ce Zbl. 28, 56, 226; Ann. Sci. Ecole norm. sup., III. Sér. 62, 301—338 (1945)]. — Etude de la pseudo-convexité des domaines dans C^2 et dans C^n à l'aide des fonctions plurisousharmoniques. — On établit notamment que si D satisfait au théorème du disque (Kontinuitätssatz), $-\log \delta_A(M)$ est fonction plurisousharmonique de M dans D , $\delta_A(M)$ étant la distance de M à la frontière de D parallèlement à une direction complexe donnée A . Caractérisation des domaines de Hartogs qui sont domaines d'holomorphie (en utilisant le théorème de K. Oka). — Extension d'un théorème de K. Stein aux domaines de C^2 qui sont des domaines d'holomorphie et sont invariants par les translations $z'_2 = z_2 + it$, t quelconque réel. Certains démonstrations, notamment celle de la „propriété de Hartogs“ d'une famille de fonctions sousharmoniques bornées supérieurement dans D ayant une limite supérieure continue dans D sont faites pour les fonctions plurisousharmoniques, elles résultent simplement de ce que la propriété est vraie plus généralement des fonctions sousharmoniques dans R^{2n} (cf. J. Deny et P. Lelong, ce Zbl. 33, 64).

P. Lelong.

Grauert, Hans et Reinhold Remmert: Fonctions plurisousharmoniques dans des espaces analytiques. Généralisation d'un théorème d'Oka. C. r. Acad. Sci., Paris 241, 1371—1373 (1955).

Der von P. Lelong (dies. Zbl. 28, 56 u. 226) und K. Oka [Tôhoku math. J. 49, 15—52 (1942)] herrührende Begriff der plurisubharmonischen Funktion wird in der vorliegenden Note auf komplexe Räume übertragen, in denen Punkte ohne uniformisierbare Umgebungen als innere Punkte zugelassen sind. Sei X ein n -dimensionaler komplexer Raum, D eine abgeschlossene nirgendsdichte Menge in X , $p(x)$ eine in $X - D$ gegebene plurisubharmonische Funktion. Verff. kündigen an: Hinreichend dafür, daß sich $p(x)$ in alle Punkte von D auf genau eine Art zu einer plurisubharmonischen Funktion fortsetzen läßt, ist jede der beiden folgenden Bedingungen: (a) $p(x)$ ist in einer Umgebung jedes Punktes von D von oben beschränkt, und D ist analytisch dünn von der Ordnung 1. (b) D ist analytisch dünn von der Ordnung k , wenn zu jedem Punkt von D eine Umgebung U und eine in U höchstens $(n - k)$ -dimensionale analytische Menge M existiert, derart daß $D \cap U \subset M$ gilt. Es folgt, daß ein unverzweigt über dem C^n liegendes Riemannsches Gebiet R in allen seinen Randpunk-

ten pseudokonvex, nach K. Oka also ein Holomorphiegebiet ist, wenn die Pseudokonvexität nur für die Punkte außerhalb einer Ausnahmemenge mit gewissen Eigenschaften auf dem Rande von R vorausgesetzt wird. *K. Stein.*

Matsuno, Takeshi: On star-like theorems and convex-like theorems in the complex vector space. Sci. Reports Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A **5**, 88—95 (1955).

Eine holomorphe Abbildung $W = W(Z)$ mit $W(0) = 0$, $\partial W / \partial Z \neq 0$ der Einheitshyperkugel $|Z| < 1$ des n -dimensionalen komplexen Zahlenraumes C^n in den C^n heißt sternartig, wenn keine Gerade durch den Nullpunkt $0 \in C^n$ eine der Flächen $\{W(Z), |Z| = r\}$, $0 < r < 1$, tangential schneidet. Der Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Sternartigkeit (und Umkehrbarkeit) von $W = W(Z)$ an. Außerdem wird eine Integralformel für die Anzahl der Nullstellen von $W = W(Z)$ abgeleitet. Am Ende der Arbeit ist schließlich der Begriff der konvexartigen Abbildung eingeführt, und es werden Beziehungen zur sternartigen Abbildung betrachtet. — Die über konforme Abbildungen handelnden Sätze 3, 1' und 4 dürften nicht sehr inhaltvoll sein, da die holomorphen, konformen Abbildungen der Gebiete des C^n , $n \geq 2$, stets komplexe Ähnlichkeitstransformationen sind. *H. Grauert.*

Hasimoto, Keizô, Syôzô Mazauro and Sadao Katô: The expansion of power-series for the functions of several complex variables. Sci. Reports Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A **5**, 62—76 (1955).

Die Verff. untersuchen Taylor- und Laurententwicklungen von holomorphen Abbildungen der Gebiete des k -dimensionalen komplexen Vektorraumes C^k in den C^k ($k \geq 2$). Die Abbildungen werden als Vektorfunktionen betrachtet, die Reihen in Vektorsymbolik ausgedrückt. Eine inkorrekte Aussage einer Arbeit von S. Ozaki und I. Ono (dies. Zbl. **51**, 317) wird korrigiert. Ferner sind in den letzten Paragraphen umfangreiche Untersuchungen über Konvergenzradien durchgeführt. *H. Grauert.*

Michiwaki, Yioshimasa: Several complex variables and Picard's theorem. Sci. Reports Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A **5**, 77—81 (1955).

Bekanntlich gibt es volumentreue analytische Homöomorphismen des C^2 auf echte Teilmengen des C^2 (L. Bieberbach, dies. Zbl. **7**, 215). Verf. gibt hierfür ein weiteres Beispiel an. Anlage und Inhalt der vorliegenden Note weichen nur geringfügig von S. Bochner and W. T. Martin, Several complex variables (dies. Zbl. **41**, 52), 44—48, ab. *E. Schieferdecker.*

Martinelli, Enzo: Sulle intersezioni delle curve analitiche complesse. Rend. Mat. e Appl. **14**, 422—430 (1955).

Si O est point isolé de l'intersection des ensembles $\{f = 0\}$, $\{g = 0\}$, $f(x, y)$, $g(x, y)$ étant holomorphes à l'origine, on peut représenter l'ordre de multiplicité de O au moyen du nombre d'enlacement sur $S^3(O, \varrho)$, hypersphère de centre O , de rayon ϱ suffisamment petit, des lignes L et M , intersections de S^3 avec $\{f = 0\}$ et avec $\{g = 0\}$. *P. Lelong.*

Martinelli, Enzo: Contributi alla teoria dei residui per le funzioni di due variabili complesse. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **39**, 335—343 (1955).

Etude de la formule, généralisant celle de Didon :

$$J(\varphi) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma^2} \varphi(x, y) \frac{df}{f} \wedge \frac{dg}{g}$$

f et g holomorphes dans D , ayant des zéros communs isolés O_k ; on obtient $J(\varphi) = \sum_k N_k r_k \varphi(O_k)$, r_k étant la multiplicité de O_k dans l'intersection des diviseurs $f = 0$ et $g = 0$; N_k est un entier qui dépend du cycle Γ^2 ; le mémoire précise la valeur de N_k dans la classe d'homologie des cycles pris dans $B(O_k, \varrho) - \{f = 0\} - \{g = 0\}$, $B(O_k, \varrho)$ étant une boule de centre O_k , de rayon ϱ assez petit pour que les ensembles $\{f = 0\}$, $\{g = 0\}$, y aient O_k comme unique point commun. *P. Lelong.*

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Fort, Tomlinson: Linear difference equations and the Dirichlet series transform. Amer. math. Monthly **62**, 641—645 (1955).

The author uses Dirichlet series transform as an instrument for the solution of difference equations. Let $f(s) = D\{a(t)\} = \sum_{t=0}^{\infty} m^{-st} a(t)$ ($m > 1$, $s > 1$, t is an integer) be the basic transformation and $\Delta F(t) = F(t+1) - F(t)$. Assuming the series convergent, the author shows that

$$D\{\Delta a(t)\} = -m^s a(0) - (1-m^s) f(s),$$

$$D\{\Delta^2 a(t)\} = -m^s \Delta a(0) + m^s (1-m^s) a(0) + (1-m^s)^2 f(s)$$

$$D\{\Delta^n a(t)\} = -m^s \Delta^{n-1} a(0) + m^s (1-m^s) \Delta^{n-2} a(0) + \dots +$$

$$(-)^{n-1} m^s (1-m^s)^{n-2} \Delta a(0) + (-)^n m^s (1-m^s)^{n-1} a(0) + (-)^n (1-m^s)^n f(s)$$

and prepares a table of transforms for the most frequently occurring functions.

T. Eweida.

Hahn, Wolfgang: Über analytische Lösungen linearer Differential-Differenzengleichungen. Math. Z. **63**, 313—319 (1955).

In der Note werden analytische Lösungen der linearen Differential-Differenzengleichung

$$(1) \quad \sum_{i=0}^p a_i Y^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^q b_i Y^{(i)}(t-1) = 0 \quad (p \geq q)$$

mit komplexen Koeffizienten a_i, b_i betrachtet, und zwar für den Fall $p > q$, in dem die Verhältnisse einfacher sind als in dem allgemeinen Fall $p \geq q$. An Ergebnissen wird erhalten: die unendlichen Reihen vom Dirichletschen Typ $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{s_n z}$,

wo A_n beliebige komplexe Zahlen sind und s_n die Nullstellen der „charakteristischen Funktion“ von (1) mit positivem (negativem) Imaginärteil, sind im wesentlichen (bis auf endlich viele ganze Funktionen) gerade die analytischen Lösungen von (1) und konvergieren, wenn sie nicht eine ganze Funktion darstellen, in einer Halbebene, die durch eine Konvergenzhorizontale nach unten (oben) begrenzt wird. Bei Annäherung an Punkte dieser Geraden gilt ein Satz vom Abelschen Typ und unter Zusatzannahmen über die Koeffizienten ein Satz vom Tauberschen Typ. Unter gewissen Voraussetzungen über die Koeffizienten A_n läßt sich auch die Existenz singulärer Punkte auf der Konvergenzgeraden zeigen. Die allgemeinste Form einer analytischen Lösung von (1) läßt sich dann als Summe einer Reihe nach den Nullstellen s_n mit positivem Imaginärteil und einer Reihe nach den Nullstellen s'_n mit negativem Imaginärteil schreiben; die Gesamtreihe konvergiert nur in einem Horizontalstreifen. Ob die betrachteten Reihen über die Konvergenzhorizontalen analytisch fortsetzbar sind oder nicht, ist aus den abgeleiteten Sätzen nicht zu entnehmen.

S. Schottlaender.

Mitrinovitc, Dragoslav S.: Sur l'équation différentielle d'un problème d'hydrodynamique. C. r. Acad. Sci., Paris **241**, 1708—1710 (1955).

L'équation différentielle indéterminée

$$w''(z)/w(z) = h_3 v'(z)/v(z) + h_2/v^2(z) + h_1 \quad (h_k = \text{const.})$$

reliant $v(z)$ et $w(z)$, intervient dans certains problèmes d'hydrodynamique. L'A. donne un procédé régulier d'obtenir des solutions $\{v(z), w(z)\}$ telles que $w = T(v)$, $T(v)$ étant deux fois dérivable. Application est faite aux équations rencontrées par A. Elliassen, E. Høiland, E. Riis [Publ. of the Inst. for Weather and Climate Research of the Norweg. Acad. Sci. Lett. **1953**, No. 1 (1953)] et E. Palm [Vidensk. Akad. Inst. for Vaer-og Klimaforskning, Oslo **1955**, Nr. 2 (1955)].

C. Iacob.

Czajkowski, J. and T. Tietz: A note on the hypergeometrical differential equations. *Prace mat.* **1**, 162—163, russ. u. engl. Zusammenfassgn. 163, 164 (1955) [Polnisch].

The paper deals with the equation (1) $x y'' + \nu y' + a y = 0$, ν and $a \neq 0$ being constants. It is shown that for $\nu = \frac{3}{2} - n$, $a \neq 0$ and for $\nu = 2(n+1)$, $a = -1$ ($n = 1, 2, \dots$) the equation (1) can be solved explicitly by means of elementary functions. The proof consists in the remark that by the substitution $y = u \cdot x^{\mu-1}$, where $\mu = n + \frac{1}{2}$ resp. $\mu = -2n$, the case considered is reduced to a well known one.

J. Szarski.

Wintner, Aurel: On linear instability. *Quart. appl. Math.* **13**, 192—195 (1955).

Let us consider the differential equation (1) $x'' + f(t)x = 0$ where $f(t)$ is continuous for large $t > 0$; let $2f^+(t) = |f(t)| - f(t)$ and $F^+(t) = \int_{t_0}^t f^+(s) ds$ for some t_0 . It is proved that $\lim_{t \rightarrow +\infty} F^+(t)/t = 0$ as $t \rightarrow +\infty$ implies that at least one solution $x(t)$ of (1) satisfies $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty$ as $t \rightarrow +\infty$. The proof is based on previous results of A. Wintner, (this Zbl. **29**, 186), and of L. Hartman and A. Wintner, (this Zbl. **35**, 182).

L. Cesari.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On a problem of Poincaré concerning Riccati's equation. *Amer. J. Math.* **77**, 791—804 (1955).

On considère l'équation $x'' + f(t)x = 0$, $f(t)$ réelle, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \omega$. Si $x(t)$, $y(t)$ sont deux solutions réelles avec $xy' - x'y = c \neq 0$ on pose $z = x + iy$ et on étudie les conditions qui assurent la relation $\lim_{t \rightarrow \infty} w^2(t) = -\omega$, où $w = z'/z$.

Une condition nécessaire est donnée sous la forme

$$\inf_{0 < s < \infty} \sup_{s+1} \frac{1}{s+1} \left| \int_t^{t+s} [f(u) - \omega] du \right| \rightarrow 0 \text{ pour } t \rightarrow \infty.$$

Si $\omega = 0$ cette condition avec $\lim_{t \rightarrow \infty} |z(t)| = \infty$ devient nécessaire et suffisante.

Si $\omega = 1$ on obtient une condition nécessaire et suffisante si l'on ajoute la condition $\lim_{t \rightarrow \infty} |z(t)| = l$ fini. On démontre encore quelques propositions du même type et on construit quelques exemples.

A. Halanay.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On an oscillation criterion of De La Vallée Poussin. *Quart. appl. Math.* **13**, 330—332 (1955).

If $g(t)$, $f(t)$ are real valued continuous functions of t and $x(t)$ a solution of (1) $x'' + g(t)x' + f(t)x = 0$ with $x(0) = 0$, $x(h) = 0$, $x(t) \neq 0$ for $0 < t < h$, then an oscillation criterion of De La Vallée Poussin (see G. Sansone, *Equazioni differenziali*, Vol. 1, p. 183, this Zbl. **39**, 309) states that (2) $1 < M_1 h + M_2 h^2/2$, where $M_1 = \max |g(t)|$, $M_2 = \max |f(t)|$, $0 \leq t \leq h$. The authors prove the stronger inequality (3) $1 < M_1 h/2 + M_2 h^2/6$ as a consequence of (4) $1 < \int |g(t)| dt + \frac{1}{2} h \int |f(t)| dt$ where the integrals range in $[0, h]$. In turn (4) is a consequence of a slightly more general inequality. Also, in all these inequalities the functions g, f may be supposed complex-valued. It is particularly interesting to note that, for $g(t) = 0$, equation (1) reduces to $x'' + f(t)x = 0$, and inequality (4) to the Liapounoff inequality $4 < h \int |f(t)| dt$. The reasoning is straight forward and may be related to a previous remark of Z. Nehari (this Zbl. **55**, 315).

L. Cesari.

Pinney, Edmund: Nonlinear differential equations. *Bull. Amer. math. Soc.* **61**, 373—388 (1955).

Le procédé d'approximation des solutions qu'indique l'A. s'applique aux équations différentielles non-linéaires, telles que les termes non-linéaires n'affectent pas les dérivées d'ordre maximum. Ce procédé, appliqué à l'équation de van der Pol

(1) $y''(t) + y = \varepsilon(1 - y^2) y'(t)$, où $\varepsilon > 0$ est un paramètre petit, consiste à considérer le second membre comme une fonction connue $f(t)$, ce qui conduit à une équation intégrale, d'où $y(t) = a_+(t) e^{it} + a_-(t) e^{-it}$, avec $a'_\pm(t) = (\varepsilon/2i) e^{\mp it} [1 - y^2(t)] y'(t)$ et $y'(t) = i a_+(t) e^{it} - i a_-(t) e^{-it}$. Les $a_\pm(t)$ vérifient des équations différentielles du premier ordre:

$$(2) \quad a'_\pm(t) = \frac{1}{2} \varepsilon [(1 - a_+ a_-) (a_\pm - a_\mp e^{\mp 2it}) - a_\pm^3 e^{\pm 2it} + a_\mp^3 e^{\mp 4it}].$$

En supprimant au second membre de (2) les termes périodiques, l'A. est conduit à l'équation: (3) $\varrho'_\pm(t) = \frac{1}{2} \varepsilon (1 - \varrho_+ \varrho_-) \varrho_\pm$, d'où $\varrho_\pm(t) = r(t) e^{\pm i\Phi}$, avec $r(t) = (1 + C e^{-\varepsilon t})^{-1/2}$, C et Φ étant des constantes réelles, qui sont choisies telles que $\varrho_\pm(0) = a_\pm(0)$, ce qui comporte la donnée de $y(0)$ et de $y'(0)$. Les $\varrho_\pm(t)$ approximent les $a_\pm(t)$ et moyennant $\varrho_\pm(t)$ on aboutit à une solution approchée de (1) pour $t \geq 0$. Si $|a_\pm(0)| < K$, on a $|\varrho_\pm(t)| < K'$ pour $t \geq 0$ et $|a_\pm(t) - \varrho_\pm(t)| < E(\varepsilon, K) = O(\varepsilon K^5)$. L'existence des solutions bornées de (1), telles que $|a_\pm(t)| \leq K$ est alors liée aux conditions $E(\varepsilon, K) \leq K - K'$, $K' < K$, qu'on peut remplir. Finalement, $y(t) = 2r(t) \cos \{[1 + O(\varepsilon^2)] t - \Phi\} + O(\varepsilon)$. Un procédé analogue est ensuite appliqué à l'équation matricielle (4) $y'(t) = A y + \varepsilon f(y, t)$, avec $y(0) = b$, où $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$, $A = (A_{ij})$, ($i, j = 1, 2, \dots, m$), les A_{ij} étant des constantes, $f(y, t) = (f_1(y, t), \dots, f_m(y, t))$; les $f_i(y, t)$ sont des polynômes en $\sin t$ et $\cos t$, en tant que fonctions de t ; ce sont des polynômes de degré n en y_1, \dots, y_m , en tant que fonctions de y . Moyennant certaines conditions, l'A. obtient une expression approchée de la solution pour $t \geq 0$. Finalement, la même méthode est appliquée à l'équation aux dérivées partielles (5) $V_{XX} - V_{TT} = F(\varepsilon, V, \varepsilon V_T)$, où F est un polynôme de degré N , les conditions aux limites étant $V = V_0 \cos m(1 + \delta) T$ pour $X = 0$, $V = 0$ pour $X = \pi$.
C. Jacob.

McLachlan, N. W.: Two theorems on ordinary non-linear differential equations. Math. Gaz. 39, 200—202 (1955).

Die beiden folgenden Sätze werden bewiesen: I. In der Differentialgleichung $\ddot{y} + g(y) \dot{y} + f(y) = 0$ sei 1. $g(0) \geq 0$, $g(y) > 0$ für $y \neq 0$; 2. $f(0) = 0$, $f(y)$ ungerade Funktion, beschränkt und positiv in $0 < y \leq l$, $\int_0^l f(y) dy > +\infty$, wenn $l \rightarrow +\infty$. Jede Lösung $y = u(t)$ mit $u(0) = y_0$, $\dot{u}(0) = v_0$ und $y_0^2 + v_0^2 > 0$ strebt dann für $t \rightarrow +\infty$ mitsamt ihrer Ableitung gegen Null. II. In der Differentialgleichung $\ddot{y} + 2\kappa \dot{y} + f(y) = 0$ sei 1. $\kappa > 0$; 2. $f(y) = a y + b y^3 + c y^5 + \dots$ mit $a, b, c, \dots > 0$. Ist $\kappa^2 > f'(0)$, dann ist jede Lösung $y = u(t)$ mit $u(0) = y_0$, $\dot{u}(0) = v_0$ und $y_0^2 + v_0^2 > 0$ für hinreichend großes t nicht oszillierend. — Anwendung dieser Sätze auf Schwingungsvorgänge in mechanischen und hydro-elektrischen Systemen.
W. Quade.

Furuya, Shigeru: Periodic solutions of a nonlinear differential equation. Commentarii math. Univ. St. Pauli 4, 47—51 (1955).

In Verallgemeinerung von N. Minorsky wird

$$\ddot{x} + b \dot{x} + x + (a - c x^2) x \cos 2t = e x^3 = 0$$

mit $a = \mu A$, $b = \mu B$, $c = \mu C$, $e = \mu E$, $B > 0$ betrachtet für kleines μ . Entsprechend der Anzahl periodischer Lösungen und ihrer Stabilität werden die 5 Fälle I: $[|A| > 2B, 2|C| > 3|E|, AC > 0]$, II: $[|A| > 2B, 2|C| > 3|E|, AC < 0]$ oder $[|A| < 2B, 2|C| < 3|E|, AC > 0]$, III: $[|A| > 2B, 2|C| < 3|E|]$, IV: $[|A| < 2B, 2|C| > 3|E|]$, V: $[|A| < 2B, 2|C| < 3|E|, AC < 0]$ unterschieden. Ergänzend wird zum Schluß der Fall kleiner B diskutiert.

F. W. Schäfke.

Haber, S. and N. Levinson: A boundary value problem for a singularly perturbed differential equation. Proc. Amer. math. Soc. 6, 866—872 (1955).

Il problema ai limiti $(') \varepsilon y'' = f(x, y, y', \varepsilon)$, $y(0) = a$, $y(1) = b$, viene trattato sotto ipotesi che assicurano l'esistenza per valori di ε vicini a zero di una soluzione

$y = y(x, \varepsilon)$ che per $\varepsilon \rightarrow 0$ tende uniformemente in $[0, 1]$ verso una soluzione del problema (') $f(x, u, u', 0) = 0$, $u(0) = a, u(1) = b$, avente la forma $u = g(x)$ per $0 \leq x \leq x_0$, $u = h(x)$ per $x_0 \leq x \leq 1$, con $g(x_0) = h(x_0)$, $g'(x_0) \neq h'(x_0)$ (e con $g(0) = a$, $h(1) = b$). Allo scopo di illustrare la questione si consideri il problema (') con $f = 1 - (y')^2$, $|a - b| < 1$, che può esser trattato esplicitamente. In tal caso la soluzione di (') esiste per $\varepsilon > 0$, piccolo, e tende uniformemente in $[0, 1]$ verso la soluzione di (') costituita da $u = a - x$ per $0 \leq x \leq (1 + a - b)/2$ e da $u = b - 1 + x$ per $(1 + a - b)/2 \leq x \leq 1$. Il problema (') ammette anche una seconda soluzione, quella definita da $u = a + x$ per $0 \leq x \leq (1 + b - a)/2$ e da $u = b + 1 - x$ per $(1 + b - a)/2 \leq x \leq 1$, ma nessuna soluzione di (') per $\varepsilon > 0$ è prossima a questa.

R. Conti.

Saul'ev, V. K.: Zur Frage der Lösung der Eigenwertaufgabe mit der Differenzenmethode. Vyčislit. Mat. vyčislit. Techn. **2**, 116—144 (1955) [Russisch].

In Analogie zu einer Arbeit von H. Bückner (dies. Zbl. **31**, 49) wird die Schnelligkeit der Konvergenz der Differenzen-Eigenwerte gegen die entsprechenden Differential-Eigenwerte im Fall des allgemeinen selbstadjungierten elliptischen n -dimensionalen Operators bei krummliniger Begrenzung des Gebiets abgeschätzt.

W. Schulz.

Marčenko, V. A.: Aufstellung der potentiellen Energie nach Phasen der gestreuten Wellen. Doklady Akad. Nauk SSSR **104**, 695—698 (1955) [Russisch].

Consider the differential operator $Su = -u'' + V(x)u$, ($x \geq 0$, V real) with the boundary condition $u(0) = 0$. Let $u(\lambda, x)$ and $u(\lambda_k, x) \in L^2$, $k = 1, 2, \dots$, be solutions of $Su = \lambda^2 u$ and $Su = -\lambda_k^2 u$ respectively normalized so that

$$\delta(x - y) = \int_0^\infty u(\lambda, x) u(\lambda, y) d\lambda + \sum u(\lambda_k, x) u(\lambda_k, y).$$

Then for large x , $u(\lambda, x)$ behaves like $\varphi(\lambda, x) = \sqrt{2/\pi} \sin(\lambda x + \eta(\lambda))$, (η is the asymptotic phase) and $u(\lambda_k, x)$ like $\varphi(\lambda_k, x) = m_k e^{-\lambda_k x}$. The converse spectral problem consists in finding V in terms of the functions φ and was solved by e. g. Gel'fand and Levitan (this Zbl. **44**, 93). A variant of their solution is obtained

as follows. Put $f(x) = \sum m_k^2 e^{-\lambda_k x} - (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{2i\eta(\lambda)} - 1) e^{i\lambda x} d\lambda$, solve the in-

tegral equation $f(x + y) + A(x, y) + \int_x^\infty f(y + t) A(x, t) dt = 0$, ($x < y$), for A

and compute $u(\lambda, x) = \varphi(\lambda, x) + \int_x^\infty A(x, t) \varphi(\lambda, t) dt$. The solution presupposes

$\int x |V(x)| dx < \infty$.

L. Gårding.

Marčenko, V. A.: Sätze vom Tauberschen Typus in der Spektralanalyse der Differentialoperatoren. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **19**, Nr. 6, 381—422 (1955) [Russisch].

Let L be the differential operator $-(d/dx)^2 + q(x)$ where q is real and integrable on every closed subinterval of a fixed interval I given by $0 \leq x < a$. Let $w(\lambda, x)$, (λ real), be the solution of $Lw = \lambda w$ satisfying $w = 1$, $w' = \theta$ at the origin, (θ real). It is well known that there exists at least one non-decreasing function ϱ ,

a spectral function, such that $(Tf)(\lambda) = \text{l. i. m.} \int_0^b f(x) w(\lambda, x) dx$, ($b \rightarrow a$), is a unitary mapping from the space of square integrable functions on I to the space H_ϱ of functions defined on the entire axis and square integrable with respect to ϱ .

This mapping has the inverse $(T^{-1}F)(x) = \text{l. i. m.} \int_{-N}^{+N} F(\lambda) w(\lambda, x) d\varrho(\lambda)$, ($N \rightarrow \infty$).

In particular, when $a = \infty$ and $\theta = 0$, there is a unique spectral function $\varrho_0 = 0$

when $\lambda \leq 0$, $\varrho_0 = 2\pi^{-1} |\lambda|$ otherwise, corresponding to the cosine transform T_0 for which $w = w_0 = \cos |\lambda| x$. It is shown that $\lim_{\lambda \rightarrow 0} |\varrho(\lambda) - (\varrho_0(\lambda) - \theta)| \leq 5 \cdot 10^7 / a$, where ϱ is normalized so that $2\varrho(\lambda) = \varrho(\lambda + 0) + \varrho(\lambda - 0)$, $\varrho(-\infty) = 0$ and that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int T f(\lambda) w(\lambda, x) d\varrho(\lambda) - \int T_0 f(\lambda) w_0(\lambda, x) d\varrho_0(\lambda) \right| = 0, \quad (N \rightarrow \infty)$$

uniformly on compact subsets of I when f is square integrable on I (and continued by 0 outside I when $T_0 f$ is computed). [These two theorems have also been proved for $a = \infty$ by Levitan, *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **19**, 33–58 (1955).]

By means of a transformation $f(x) \rightarrow f(x) + \int_0^x K(x, y) f(y) dy$, of the well-known triangular type, the proofs are reduced to the following Tauberian situation. Let $(Sf)(\lambda) = \int e^{-i\lambda x} f(x) dx$ denote the Fourier transform and assume that we have an identity of the following form (1) $\int S f(\lambda) d\tau(\lambda) = \int f^{(n)}(x) G(x) dx$ where f is a function in C^∞ vanishing outside an interval J containing the origin and τ is the difference between two non-decreasing functions ϱ and ϱ_0 one of which, e.g. ϱ_0 satisfies the condition $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\varrho_0(\lambda + \lambda_0) - \varrho_0(\lambda)) |\lambda|^{-n} < \infty$, $(|\lambda| \rightarrow \infty)$, for some $\lambda_0 > 0$. Knowing the properties of G at the origin, it is required to estimate the difference τ for large $|\lambda|$, or, more generally, estimate the expression $\int T_N(\lambda) d\tau(\lambda)$ for large N , where, roughly speaking, T_N approaches 1 as $N \rightarrow \infty$. To do this, the author puts in (1) $f = \varphi S^{-1} T_N$, where $\varphi \in C^\infty$ vanishes outside J and equals 1 in a neighborhood of the origin. Then $\int T_N(\lambda) d\tau(\lambda) = \int (SS^{-1} - S\varphi S^{-1}) T_N(\lambda) d\tau(\lambda) + \int f^{(n)}(x) G(x) dx$. A Tauberian theorem is obtained by estimating the right side under suitable assumptions. The estimates are precise but too complicated to be given here.

L. Gårding.

Lomonosov, M. I.: Über die Entwicklung nach Eigenfunktionen eines Operators.

Doklady Akad. Nauk SSSR **105**, 412–415 (1955) [Russisch].

Some results of Marčenko and others (cf. the preceding review) on the asymptotic properties of the spectral function of the differential operator (1) $-v'' + qv$ are extended to the operator $-(pv')' + qv$, which, if p is only in C^1 , is not transformable to the form (1).

L. Gårding.

Sargsjan, I. S.: Summation der Ableitungen der Entwicklung nach den Eigenfunktionen des Sturm-Liouvilleschen Operators. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **104**, 821–824 (1955) [Russisch].

Asymptotic formulas for the spectral function and the partial sums of the Fourier series associated with a Sturm-Liouville operator $-(d/dx)^2 + q(x)$ on the half-line $x \geq 0$ have been obtained by Levitan [*Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **19**, 33–58 (1955)] and by Marčenko (cf. last review but one). Here, analogous formulas for the Riesz means of order $k > 0$ of the k^{th} derivative of the corresponding quantities are given.

L. Gårding.

Marcus, M.: Some results on the asymptotic behavior of linear systems. *Canadian J. Math.* **7**, 531–538 (1955).

Let (1) $\dot{x} = [A(t) + B(t)]x$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, be a system of n first order linear differential equations. Here $A(t)$, $B(t)$ are $n \times n$ matrices, and the elements of $A(t)$ are supposed to be continuous complex-valued almost periodic functions and those of $B(t)$ continuous complex-valued. If $M[f(t)]$ denotes the usual mean-value of a continuous complex-valued almost periodic function $f(t)$, $R[f(t)]$ the real part of $f(t)$, $\text{tr } A$ the usual trace of a matrix A , let $m(h)$ denote

$$m(h) = \overline{\lim} \int_0^t R \text{tr } A(s+h) ds$$

as $t \rightarrow +\infty$ for any $h > 0$. The main theorem states: If (a) $M[R \text{tr } A(t)] \geq 0$

for large t ; (b) the system $\dot{y} = A(t)y$ has solutions all bounded as $t \rightarrow +\infty$; (c) $\lim m(h) < +\infty$ as $h \rightarrow +\infty$, (d) the elements of $B(t)$ are absolutely integrable functions in $[0, +\infty)$, then all solutions of (1) are all bounded as $t \rightarrow +\infty$. The proof makes recourse to a theorem of J. Favard [Acta math. **51**, 31—81 (1927)]. For the line of the proof reference can be made to V. I. Zubov (this Zbl. **53**, 62). [The rev. conjectures that the hypothesis of the continuity of $B(t)$ is unessential. Cf. L. Cesari, this Zbl. **24**, 35; I. M. Rapoport, Izdat. Akad. Nauk. Ukrain. SSSR, Kiev 1954.]

L. Cesari.

Feščenko, S. F.: Über die asymptotische Zerspaltung eines Systems von linearen Differentialgleichungen. II. (Abschätzung des Fehlers.) Ukrain. mat. Žurn. **7**, 443—452 (1955) [Russisch].

Diese Abhandlung ist die Fortsetzung einer früheren, in der die Theorie der asymptotischen Aufspaltung eines linearen Differentialsystems in unabhängige Differentialsysteme niedrigerer Ordnung aufgestellt wurde (vgl. dies. Zbl. **64**, 88). Dabei wurden als Resultate formale Entwicklungen aufgestellt, die nach Potenzen „kleiner“ Parameters fortschreiten und über deren Konvergenz nichts ausgesagt wurde. Nunmehr wird gezeigt, daß, wenn man jene formalen unendlichen Reihen durch die Approximationen m -ter Ordnung ersetzt, die so entstehenden Näherungslösungen in der Tat gegen die Lösungen des Ausgangsdifferentialsystems konvergieren, wobei die Konvergenz exponentiell in m ist.

A. Ostrowski.

Ljaščenko, N. Ja.: Über einen Satz über die vollständige Zerlegung eines linearen homogenen Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen und einige Eigenschaften der Matrix der Zerlegung. Ukrain. mat. Žurn. **7**, 403—418 (1955) [Russisch].

In two earlier papers the author has established a theorem concerning the reduction of a system of linear homogeneous differential equations of the n -th order in two independent systems of lower order. In the present paper, under the management of Bogoljubov, the author establishes four theorems and two lemmas regarding the total reduction of a certain system of equations in n independent differential equations of the first order which can be integrated by quadratures. It is assumed that the coefficients change slowly and that the characteristic roots of the matrix satisfy also certain conditions. The reduction can be executed by the reductive matrix $B(t)$, whose coefficients on the main diagonal are equal to 1. This matrix has some properties — the almost periodicity (in the H. Bohr sense) and analyticity. — 1° Let be given the system of the equations (1) $\dot{x} = P(t)x + L(t)x$ where $x = (x_1, \dots, x_n)$ is a vector, $P(t)$ a diagonal matrix, whose elements satisfy the conditions (2) $\operatorname{Re} p_1(t) \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \operatorname{Re} p_2(t) \leq \dots \leq \operatorname{Re} p_{n-1}(t) \leq \gamma_{2n-3} < \gamma_{2n-2} \leq \operatorname{Re} p_n(t)$, $\gamma_i = \text{const.}$; $L(t)$ is a matrix whose elements $L_{ik}(t)$ are continuous and bounded functions determined on the whole real axes of t and $|L_{ik}(t)| \leq L$. Then there exists the theorem of total reduction: „If for all real t the condition $|L_{ik}(t)| \leq L < 2\gamma/9n$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, $\gamma = \inf \operatorname{Re}[p_{j+1}(t) - p_j(t)]$, is satisfied, then there exists a continuous and bounded matrix $B(t)$, with $B_{ii}(t) = 1$, such that the transformation $x = B(t)\eta$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, reduces the system (1) into n independent equations of the first order (3) $\dot{\eta}_i = p_i(t)\eta_i + \sum_{k=1}^n L_{ik}(t)B_{ki}(t)\eta_k$, $i = 1, \dots, n$, which can be solved by quadratures“. Supposing $x_i(t) = B_{ik}(t)\eta_k(t)$, then the $B_{ik}(t)$ can be determined by means of the system of $n(n-1)$ differential equations of the first order

$$\dot{B}_{ik} = p_i B_{ik} - B_{ik} p_k - B_{ik} L_{kk} - B_{ik} \sum L_{kj} B_{jk} + \sum L_{ij} B_{jk} + L_{ik},$$

for $j \neq k$. The proof reduces further to the system of integral equations, which can be solved by means of successive approximations supposing $B_{ik}^{(0)}(t) = 0$. If $Ln/\gamma \leq Q(1+Q)^{-2}$, $Q = \text{const} > 0$, then there exists the valuation $|B_{ik}^{(m)}(t)| < Q$,

$m = 1, 2, \dots$, for all t . In this way the problem is transformed to the examination of the convergence of the series $\sum_{m=1}^{\infty} [B_{ik}^{(m)}(t) - B_{ik}^{(m-1)}(t)]$, $i \neq k$, which can be majorized with the infinite geometric series $\sum 2^{m-1} Q^m$, convergent if $Q < 1/2$. 2° If the conditions of the first theorem are satisfied and the coefficients of (1) are almost periodic functions (in the H. Bohr's sense) then the $B_{ik}(t)$ are also almost periodic functions (in the same sense). Two auxiliary lemmas are previously demonstrated. a) Let be given two systems $\dot{x} = p(t)x$, $\dot{y} = p(t+T)y$, where T is a number. Re $p(t) < -\gamma = \text{const.}$, $-\infty < t < +\infty$. If for every real t exists the relation $|p(t+T) - p(t)| < \delta$, then the valuation $|y(t) - x(t)| = 2(\delta/\gamma) |x_0| \exp[-\frac{1}{2}(t-t_0)]$, $-\infty < t_0 < t < +\infty$ is valid. The result represents the analogue to the Floquet's theory regarding the equations with periodic coefficients. b) In the case of $\dot{y} = A(t)y$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, with $|pE - A(t)| = 0$, it is shown that there exists such nonsingular matrix $V(t)$ with bounded derivative $\dot{V}(t)$ for all t that $y = V(t)x$ transforms the above system on the form (1). In this case $P(t)$ is the diagonal matrix of the eigenvalues of $A(t)$: $L(t) = V^{-1}\dot{V}$ is bounded for all t . The proof of this transformation is given by Levinson (this Zbl. 40, 194; see also Diliberto, this Zbl. 39, 94). 3° Let $\dot{x} = Ax + \varepsilon L(t)x$, $a_{ik} = \text{const.}$, ε is a small complex parameter with $\varepsilon_0 = 2\gamma/9nL$. For all real t and $\varrho = |\varepsilon| < \varepsilon_0$ there exists such matrix $B(t, \varepsilon)$, bounded, continuous in t and analytical with regard to ε , in the circle of the convergence with $\varrho = |\varepsilon| < \varepsilon_0$, that $x = B(t, \varepsilon)\eta$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, transforms the above system in n independent differential equations of the first order (4) $\dot{\eta}_i = [p_i + \varepsilon \sum_k L_{ik}(t) B_{ki}(t, \varepsilon)] \eta_i$, $i = 1, \dots, n$, which can be solved by quadratures. The proof is also based on the integral equations. 4° The first theorem has very large use in the theory of differential equations with slowly changing coefficients. Let $\dot{y} = A(\tau)y$, $\tau = \varepsilon t$ where ε is a small real parameter. It is shown that in this case there exists the matrix $B(t, \varepsilon)$ such that $x(t) = B(t, \varepsilon)\eta(t)$ transforms the above system in the system of the equations of first order of the same form as in the case 3° only with $p_i(\tau)$ and $L_{ik}(\tau)$. — Very improper nomenclature and marks make the reading pretty difficult. D. Rašković.

Andreev, A. F.: Untersuchung des Verhaltens der Integralkurven eines Systems von zwei Differentialgleichungen in der Umgebung eines singulären Punktes. Vestnik Leningradsk. Univ. 10, Nr. 8 (Ser. mat. fiz. chim. Nr. 3), 43—55 (1955) [Russisch].

Let $\dot{x} = y + X(x, y)$, $\dot{y} = Y(x, y)$, where X, Y are power series beginning with second order terms: Y may be written $f(x) + y\varphi(x) + y^2 Y_1(x, y)$, where $f(x) = ax^\alpha f_1(x)$, $\varphi(x) = bx^\beta \varphi_1(x)$, $a, b \neq 0$, $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 1$, $f_1(0) = \varphi_1(0) = 1$. A complete discussion of the behavior of the integral curves is given, which is very difficult to summarize because of the great number of possible different singularities, some of which are not easily describable. Indications for the numerical computation of the solutions are derived. The methods used are essentially Frommer's [Uspechi mat. Nauk Nr. 9 (1941)]. J. L. Massera.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: Asymptotic integrations of ordinary nonlinear differential equations. Amer. J. Math. 77, 692—724 (1955).

On considère le système $y' = Jy + F(t, y)$ où J est une matrice constante à coefficients complexes, $F(t, y)$ est continue et $\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ |y| \rightarrow 0}} |F(t, y)| = 0$. On démontre

que pour toute valeur propre de J à partie réelle μ négative on peut trouver des familles de solutions avec $\log |y(t)| = [\mu + o(1)]t$ et pour lesquelles les coordonnées qui correspondent en quelque sorte aux valeurs propres dont la partie réelle est égale à μ décroissent moins vite que les autres. Sous des conditions supplémentaires pour $F(t, y)$ on donne le comportement asymptotique plus précis des solutions. L'énoncé

des théorèmes est trop long et demande trop de notations spéciales pour le reproduire ici.

A. Halanay.

Charlamov, P. V.: Über eine Abschätzung der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen. Ukrain. mat. Žurn. 7, 471—473 (1955) [Russisch].

Soient y_i et z_i les solutions des systèmes

$$dy_i/dt = f_i(t, y_1, \dots, y_n) + \eta_i, \quad dz_i/dt = f_i(t, z_1, \dots, z_n) + \zeta_i, \quad |\eta_i| \leq \varepsilon(t), \quad |\zeta_i| \leq \varepsilon(t),$$

$$E(t) = \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau, \quad |f_i(t, a_1, \dots, a_n) - f_i(t, b_1, \dots, b_n)| \leq L(t) \sum |a_k - b_k|,$$

$\delta = \max_i |y_i(t_0) - z_i(t_0)|$. L'A. établit de la manière habituelle l'inégalité

$$\sum_{i=1}^n |y_i(t) - z_i(t)| \leq n[\delta + 2E(t)] + n^2 \int_{t_0}^t [\delta + 2E(\tau)] L(\tau) \exp \left\{ \int_{\tau}^t n L(\sigma) d\sigma \right\} d\tau.$$

A. Halanay.

Gröbner, W.: Über Streuungs- und Stabilisierungsfunktionen bei Differentialgleichungen der theoretischen Mechanik. Ann. Mat. pur. appl., IV. Ser. 39, 11—14 (1955).

In questo Nota l'A. dopo aver ricordato che dalle equazioni dinamiche di Lagrange dei sistemi dinamici olonomi a vincoli indipendenti dal tempo e soggetti a forze conservative $M_i(u) = d(\partial L / \partial \dot{u}_i) / dt - \partial L / \partial u_i = 0$ segue che la derivata temporale dell'energia totale E è identicamente nulla, perchè $\dot{E} = \sum \dot{u}_i M_i(u)$, considera due casi in cui il sistema è soggetto a forze non conservative. Le equazioni dinamiche corrispondenti sono del tipo $M_i(u) = K_i$ ($i = 1, \dots, n$) essendo i secondi membri funzioni delle coordinate e delle velocità lagrangiane u, \dot{u} , che possono essere chiamate funzioni dissipative quando, per es., sono del tipo $K_i = -\varepsilon_i \dot{u}_i$. In codesto caso, se le ε sono costanti positive, si ha $\dot{E} = -\sum \varepsilon_i \dot{u}_i^2 < 0$. L'energia va continuamente diminuendo fin quando diviene nulla in corrispondenza ad uno stato di quiete del sistema. Il secondo caso su cui l'A. richiama l'attenzione è espresso da funzioni K_i del tipo $K_i = \dot{u}_i \Phi(E)$ essendo $\Phi(E)$ una funzione dell'energia totale. Allora la E deve soddisfare all'equazione $\dot{E} = \Phi(E) \sum \dot{u}_i^2$. Potrebbe essere ad es. $\Phi(E) = 1 - E/E_0$. Secondo che è $E > E_0$ oppure $E < E_0$ il sistema cede o assorbe energia, mentre per $E = E_0$ valgono le equazioni del sistema non perturbato. Si può dire che le funzioni K_i sono stabilizzatrici perchè esse hanno per effetto che il sistema rimane stabile in corrispondenza al valore E_0 dell'energia (livello energetico). Se attraverso azioni esterne viene ceduta o sottratta energia al sistema, le funzioni stabilizzatrici agiscono in guisa che entro brevissimo tempo viene ripristinato lo stato stabile $E = E_0$. L'A. annunzia un lavoro in collaborazione con F. Cap in cui si esaminerà se le considerazioni matematiche espresse nella Nota siano suscettibili di applicazioni alla Fisica teorica.

G. Lampariello.

Ljaščenko, N. Ja.: Zur Frage der asymptotischen Stabilität der Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungssysteme. Doklady Akad. Nauk SSSR 101, 177—179 (1955) [Russisch].

Let $\dot{x} = A(t)x + \varphi(t) + f(t, x)$, where x, φ, f are n -vectors, A matrix. 1: If A satisfies certain conditions stated in a previous work by the author (this Zbl. 56, 87) among which $\operatorname{Re} p_i(t) < -\gamma < 0$, $-\infty < t < +\infty$, where p_i are the characteristic roots of A , if φ is bounded continuous, $f(t, 0) = 0$, f satisfies a Lipschitz condition with respect to x uniformly in t , and if the Lipschitz constant is sufficiently small, then there is a unique asymptotically stable solution. 2: If moreover A, φ, f are almost periodic in t , the frequency modulus of f being independent of x , the above mentioned solution is almost periodic in t . Explicit bounds for the constants involved are given.

J. L. Massera.

Magnus, K.: Ein Beitrag zur Berechnung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungs-Systeme. Z. angew. Math. Mech. **35**, 332—333 (1955).

Magnus, Kurt: Über ein Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungs-Systeme. VDI-Forschungsh. **21**, Nr. 451, 32 S. (1955).

Für ein dynamisches System mit den Differentialgleichungen $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, n$) kann man unter Verwendung der von Krylow und Bogoljubow eingeführten Methode der harmonischen Balance ein lineares Ersatzsystem von der Form $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\nu=1}^n \left(a_{i\nu} x_{\nu} + a_{i\nu}^* \frac{dx_{\nu}}{dt} \right)$ ($i = 1, \dots, n$) angeben.

Dieses unterscheidet sich in zwei Punkten von dem nach der Methode der kleinen Schwingungen erhaltenen Ersatzsystem: 1. die Koeffizienten sind nicht konstant, sondern Funktionen einer Hilfsvariablen A , die als Amplitude der Bewegungen des Systems gedeutet werden kann; 2. es sind Glieder mit den zeitlichen Ableitungen der Variablen enthalten, deren Mitnahme die Erfassung von Funktionen f_i vom Hysterese-Typ ermöglicht. Der Stabilitätsbereich des Ersatzsystems im Raum der Koeffizienten wird im wesentlichen durch die Fläche $R = 0$ begrenzt [R ist die $(n-1)$ -te Hurwitz-Determinante], und ein bestimmtes dynamisches System wird in diesem Raume durch einen Bildpunkt charakterisiert, der mit der jeweiligen Amplitude A wandert und dabei eine „ A -Kurve“ beschreibt. Aus der gegenseitigen Lage von „ R -Fläche“ und „ A -Kurve“ sind die wichtigsten Eigenschaften des dynamischen Systems abzulesen; folgende Sätze werden darüber angegeben: 1. Liegt die A -Kurve ganz im Bereich $R > 0$, so ist das zugehörige System asymptotisch stabil im Großen. 2. Liegt die A -Kurve ganz im Bereich $R < 0$, so ist das zugehörige System labil. 3. Jeder Schnittpunkt der A -Kurve mit der R -Fläche repräsentiert eine mögliche periodische Bewegung. Die Amplitude dieser Bewegung kann am A -Maßstab der A -Kurve, die Frequenz aus einem ω -Netz der R -Fläche abgelesen werden. 4. Die durch 3. definierte periodische Bewegung ist stabil für $\left(\frac{dR}{dA} \right)_{R=0} =$

$\sum_i \left(\frac{dR}{da_i} \right)_{R=0} \frac{da_i}{dA} > 0$, sie ist labil, wenn dieser Ausdruck negativ wird. — Weiterhin lassen sich Sätze über Gefährlichkeit bzw. Ungefährlichkeit der Stabilitätsgrenzen, über weiche oder harte Erregung in selbstschwingenden Systemen und über die Existenz von Grenzzyklen im Phasenportrait eines Systems ableiten. In der ausführlichen Darstellung werden außerdem noch die praktische Handhabung des Verfahrens an Beispielen (van der Polsche Differentialgleichung für einen Röhrengenerator, Stabilität einer Kreisel-Einschienenbahn, automatische Kursregelung von Schiffen) sowie die (allgemein noch nicht mögliche) Fehlerbestimmung diskutiert. Die erheblichen Vorteile des neuen Verfahrens gegenüber der bisher verwandten Methode der kleinen Schwingungen sind hierbei deutlich zu erkennen. Ein reichhaltiges Literaturverzeichnis weist auf neuere russische Arbeiten auf dem Gebiet der nichtlinearen Schwingungen hin.

S. Schottlaender.

Hahn, Wolfgang: Über Stabilität bei nichtlinearen Systemen. Z. angew. Math. Mech. **35**, 459—462 (1955).

Für das System $\dot{x}_i(t) = X_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, n$) wird mit Hilfe der Matrizenmethode eine quadratische Form (Ljapunov-Funktion) $V(x_1, \dots, x_n)$ gebildet, die die von Ljapunov geforderten Eigenschaften (V positiv definit, \dot{V} negativ definit) besitzt. In V geht die Matrix P des vom Ausgangssystem abgespaltenen linearen Teilsystems sowie eine variierende Matrix Q ein. Aus den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für negative Definitheit von \dot{V} folgen dann n Ungleichungen, die zwischen den Elementen der Matrix Q erfüllt sein müssen. Diese Bedingungen definieren im Raume der n^2 Größen q_{ij} einen „Stabilitätsbereich“. Wenn es nun gelingt, die X_i durch

$$\sum_{j=1}^n (p_{ij} - v_{ij}) x_j < X_i < \sum_{j=1}^n (p_{ij} + w_{ij}) x_j$$

abzuschätzen derart, daß die v_{ij} und w_{ij} dem Stabilitätsbereich im Raume der q_{ij} angehören, dann ist die asymptotische Stabilität des Ausgangssystems gesichert. Sind r der Funktionen N_i nichtlinear, so sind die q_{ij} aus n Ungleichungen vom Grade $2r$ zu bestimmen. Sind die Ungleichungen nicht für alle Anfangsbedingungen erfüllbar, dann lassen sich die Bereiche der Anfangswerte, die zu stabilen Lösungen führen, aus V abschätzen.

K. Magnus.

Bleelman, I. I.: Zur Frage der Stabilität der periodischen Lösungen quasilinearer Systeme mit vielen Freiheitsgraden. Doklady Akad. Nauk SSSR **104**, 809—812 (1955) [Russisch].

Let (1): $\dot{x}_s = \lambda_s x_s + f_s(t) + \mu F_s(x_1, \dots, x_p, \mu, t)$, $s = 1, \dots, p$, where $\lambda_s = 0$ for $s = 1, \dots, k$; $= i M_s$ for $s = k+1, \dots, k+2m$, M_s integers; $= i N_s$ for $s = k+2m+1, \dots, k+2m+2n$, N_s and their differences being non-integers; $\operatorname{Re} \lambda_s < 0$ for $s > k+2m+2n$. F_s are analytic with respect to x , F_s and f_s periodic in t with period 2π , developpable in uniformly convergent Fourier series.

Assume $\int_0^{2\pi} f_s e^{-\lambda_s t} dt = 0$, $s = 1, \dots, k+2m$, so that for $\mu = 0$ there are periodic solutions x^0 depending on $k+2m$ parameters α_r . To find periodic solutions of (1) we write according to Poincaré

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+2m}) = \int_0^{2\pi} F_s(x_1^0, \dots, x_p^0, 0, t) e^{-\lambda_s t} dt = 0.$$

If the Jacobian matrix of the P_s and the matrix having the elements

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial F_s(x_1^0, \dots, x_p^0, 0, t)}{\partial \alpha_r} dt$$

have characteristic roots with negative real parts, for sufficiently small μ , (1) has a unique periodic solution near x^0 , analytic in μ and asymptotically stable. If at least one of these characteristic roots has a positive real part, the solution is unstable.

J. L. Massera.

Amerio, Luigi: Soluzioni quasi-periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **39**, 97—119 (1955).

Zwecks Verallgemeinerung eines von J. Favard (dies. Zbl. **7**, 343) angegebenen Resultats betreffend lineare fastperiodische Differentialgleichungssysteme betrachtet Verf. das nichtlineare System $X' = F(t, X)$ mit in t — gleichmäßig in bezug auf X — fastperiodischem F . Weiterhin betrachtet er alle Gleichungssysteme $X' = L(t, X)$, wobei $L(t, X)$ ein beliebiges Element der abgeschlossenen Hülle der Familie $\{F(t+h, X)\}$ mit $-\infty < h < +\infty$ bedeutet. Es wird bewiesen, daß, wenn die Lösungen eines jeden dieser Gleichungssysteme in näher präzisiertem Sinne separiert sind (insbesondere wenn sie einzig sind), diese Lösungen fastperiodisch sind. Als Anwendung wird die nichtlineare Schwingungsgleichung $X'' = -AX - \Phi(X') + F(t)$ ausführlich behandelt, ohne und mit der zusätzlichen Bedingung $\{\Phi(U+V) - \Phi(V)\} \times V \geq 0$ für jedes Vektorenpaar $U, V (V \neq 0)$. Unter mannigfachen anderen Resultaten gelangt Verf. zu einer Ergänzung eines von R. Caccioppoli und A. Ghizzetti (dies. Zbl. **27**, 398) bewiesenen Satzes. M. J. De Schwarz.

Šimanov, S. N.: Über ein Verfahren, Existenzbedingungen für periodische Lösungen nicht-linearer Systeme zu erhalten. Priklad. Mat. Mech. **19**, 225—228 (1955) [Russisch].

In dem System (1) $\dot{z} = Az + f(t, z, \mu)$ sei der Vektor f bezüglich z und μ analytisch, bezüglich t stetig und mod 2π periodisch. Weiter sei $f(t, 0, 0) \equiv 0$. Nach Poincaré hat (1) periodische Lösungen, wenn die konstante Matrix A keine „kritischen“ Eigenwerte iN ($N = 0, 1, 2, \dots$) hat. Verf. setzt voraus, daß A in (1) k verschiedene kritische Eigenwerte mit den Vielfachheiten m_j ($j = 1, \dots, k$) habe.

Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür hergeleitet, daß (1) eine für $\mu \rightarrow 0$ gegen $z = 0$ strebende periodische Lösung hat. Dazu müssen k Gleichungen zwischen μ und k geeignet einzuführenden Parametern erfüllt sein. Die Arbeit enthält einige Druckfehler.

W. Haacke.

Hirasawa, Yoshikazu: On singular perturbation problems of non-linear systems of differential equations. II. Commentarii math. Univ. St. Pauli 4, 15—23 (1955).

Viene ripreso lo studio (cfr. questo Zbl. 64, 341) del sistema di equazioni differenziali contenenti il parametro ε

$$(a) \quad dx/dt = f(x, y, t; \varepsilon), \quad \varepsilon dy/dt = g(x, y, t; \varepsilon),$$

ove x e f sono vettori a m dimensioni, mentre y e g sono vettori a n dimensioni. Nel presente lavoro l'A. fa uso della funzione $S(x)$ di Kamke, la quale è definita e continua in tutto lo spazio R_μ a μ dimensioni; per ogni numero reale positivo λ verifica l'uguaglianza $S(\lambda x) = \lambda S(x)$; per ogni coppia di punti x, y appartenenti a R_μ soddisfa alla disuguaglianza $S(x - y) \leq S(x) + S(y)$; è tale che, se è $S(x) = 0$, necessariamente deve essere $x = (0, \dots, 0)$. Ciò premesso, per ogni ε con $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, le funzioni $f(x, y, t; \varepsilon)$, $g(x, y, t; \varepsilon)$ sono definite e continue nel campo D : $S_1(x - X(t)) \leq a$, $S_2(y - Y(t)) \leq a$, $0 \leq t \leq b$, dove $S_1(x)$ e $S_2(x)$ sono due funzioni S di Kamke definite in R_μ , ove è rispettivamente $\mu = m$, e $\mu = n$, e $x = X(t)$, $y = Y(t)$ è per $0 \leq t \leq b$ una soluzione del sistema degenerato (b) $dx/dt = f(x, y, t; 0)$, $0 = g(x, y, t; 0)$, dedotto da (a) per $\varepsilon = 0$. Si suppone:

(I) per ogni coppia di punti (\bar{x}, \bar{y}, t) , (x, y, t) di D è

$$S_1(f(\bar{x}, \bar{y}, t; 0) - f(x, y, t; 0)) \leq L \{S_1(\bar{x} - x) + S_2(\bar{y} - y)\} \quad \text{con } L = 0,$$

e in ogni punto (x, y, t) di D e per $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ è $S_1(f(x, y, t; \varepsilon) - f(x, y, t; 0)) < \Omega(\varepsilon)$, ove $\Omega(\varepsilon) \rightarrow 0$ tende a zero con ε ; (II) per ogni coppia di punti (\bar{x}, \bar{y}, t) , (x, y, t) di D è $S_2(g(\bar{x}, \bar{y}, t; 0) - g(x, y, t; 0)) \leq L S_1(\bar{x} - x)$, e per ogni coppia di punti (x, \bar{y}, t) , (x, y, t) di D è

$$S_2[\bar{y} - y - \tau \{g(x, \bar{y}, t; 0) - g(x, y, t; 0)\}] \leq (1 - \tau \sigma) S_2(\bar{y} - y),$$

ove σ è una costante positiva e τ è un arbitrario numero positivo (sufficientemente piccolo), e in ogni punto (x, y, t) di D è $S_2(g(x, y, t; \varepsilon) - g(x, y, t; 0)) < \Omega(\varepsilon)$. Sotto questo ipotesi l'A. dimostra che, per $\varepsilon \rightarrow 0$ sufficientemente piccolo, il sistema (a) ammette almeno una soluzione $x = x(t; \varepsilon)$, $y = y(t; \varepsilon)$, $(0 \leq t \leq b)$, la quale soddisfa alla condizione iniziale $x(0; \varepsilon) = X(0) + p(\varepsilon)$, $y(0; \varepsilon) = Y(0) + q(\varepsilon)$, dove $p(\varepsilon)$ e $q(\varepsilon)$ sono due vettori che tendono a zero assieme a ε ; inoltre per $\varepsilon \rightarrow 0$ tale soluzione converge uniformemente alla soluzione $x = X(t)$, $y = Y(t)$ del sistema degenerato (b).

S. Cinquini.

Flatto, L. and N. Levinson: Periodic solutions of singularly perturbed systems. J. rat. Mech. Analysis 4, 943—950 (1955).

Betrachtet werden die reellen Differentialgleichungssysteme (1) $x'(t) = f(t, x, y, \varepsilon)$, $\varepsilon y'(t) = g(t, x, y, \varepsilon)$ mit $\varepsilon \neq 0$ und (2) $x'(t) = f(t, x, y, 0)$, $0 = g(t, x, y, 0)$. Dabei sind x, f n_0 -Vektoren, y, g n_1 -Vektoren. f, g seien in t von der Periode T und mitsamt den Funktionalmatrizen f_x, f_y, g_x, g_y stetig in (t, x, y, ε) für kleines $|x - \theta(t)| + |y - \chi(t)| + |\varepsilon|$ und $0 \leq t \leq T$, wobei $x = \theta(t)$, $y = \chi(t)$ für eine T -periodische Lösung von (2) ist. Man setze abkürzend $g_y(t) = g_y(t, \theta(t), \chi(t), 0)$, analog für $f_x(t)$, $f_y(t)$, $g_x(t)$. — Vorausgesetzt wird nun: Es existiere eine in $[0, T]$ stetig differenzierbare invertierbare (n_1, n_1) -Matrix $P(t)$, derart, daß $P^{-1}(t) g_y(t) P(t) = \begin{pmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & C(t) \end{pmatrix}$ wird, wo $B(t)$ (m, m) -Matrix ist, deren Eigenwerte negative Realteile haben, und $C(t)$ (n, n) -Matrix $(m + n = n_1)$, deren Eigenwerte positive Realteile haben. Weiter: Die Differentialgleichung $\xi'(t) = A(t) \xi(t)$ mit $A(t) = f_x(t) - f_y(t) g_y^{-1}(t) g_x(t)$ habe außer $\xi \equiv 0$ keine T -periodische Lösung. — Dann gilt: (1) hat für kleine ε eine einzige T -periodische Lösung $x = p(t, \varepsilon)$, $y = q(t, \varepsilon)$ mit $|p(t, \varepsilon) - \theta(t)| + |q(t, \varepsilon) - \chi(t)| \rightarrow 0$ gleichmäßig in t für $\varepsilon \rightarrow 0$. F. W. Schäfke.

- Tomson, M. A.: Zur Frage der Untersuchung der orbitalen Stabilitätsbereiche. Vyčislit. Mat. vyčislit. Techn. 2, 151—208 (1955) [Russisch].
- Tomson, M. A.: Über einen Fall der Untersuchung der orbitalen Stabilität der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen. Vyčislit. Mat. vyčislit. Techn. 2, 209—229 (1955) [Russisch].

In dem Differentialgleichungssystem (1) $\ddot{x} = 2n\dot{y} + U_x$, $\ddot{y} = -2n\dot{x} + U_y$ sei n eine Konstante und $U = U(x, y)$ eine gegebene Funktion. $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(U + h)$ sei das Jacobische Integral von h . Eine ungestörte Trajektorie T_0 sei bekannt. Ihre Stabilität soll untersucht werden, δF sei die normal zu T_0 gemessene Abweichung der Störung, s die Bogenlänge auf T_0 . Dann mögen neue Veränderliche durch

$$\delta f = [2(U + h)]^k \delta F \text{ und } d\sigma = [2(U + h)]^{2k - (1/2)} ds$$

eingeführt werden. Dabei ist k eine willkürliche Konstante. Nach diesen Substitutionen lautet die erste Näherung der Störungsgleichung $d^2\delta f/d\sigma^2 = D\delta f$. Das Zeichen des von Moisseev eingeführten Koeffizienten $D = D(x, y, \varphi, k)$ mit $\tan \varphi = \dot{y}/\dot{x}$ gibt Aufschluß über die Stabilität. T_0 heißt orbital stabil (instabil), wenn $D < 0$ ($D > 0$) gilt. Da D im allgemeinen von φ abhängt, ist diese Größe nicht nur ortsabhängig. Gebiete in der (x, y) -Ebene, in denen $\text{sign } D$ unabhängig von φ ist, heißen Gebiete orbitaler Stabilität (Instabilität). Orbitale Stabilitätsgebiete für $k = 0$ (nach Jacobi), $k = \frac{1}{2}$ (Žukovskij) und $k = \frac{3}{2}$ (Moisseev) werden untersucht. Für das Hillsche Mondproblem [$U = \frac{3}{2}x^2 + (x^2 + y^2)^{-1/2}$] werden diese Stabilitätsgebiete berechnet und durch ausführliche Tabellen und Figuren erläutert. Besonders interessiert das Überlappen der Stabilitätsgebiete, die zu verschiedenen k gehören. Hauptsächlich in der zweiten Arbeit werden Bahnkurven mit den Perioden $2\pi m$ für verschiedene m berechnet. Im Mondfall ist $1/m = 12,3682$. Auch die Ergebnisse dieser Bahnberechnungen werden übersichtlich in Tabellen dargestellt.

W. Haacke.

Kac, A. M.: Erzwungene Schwingungen nicht-linearer Systeme mit einem Freiheitsgrad, die von konservativen Systemen wenig verschieden sind. Priklad. Mat. Mech. 19, 13—32 (1955) [Russisch].

Die Funktion f in (1) $\ddot{x} + F(x) = \varepsilon f(x, \dot{x}, \varepsilon, t)$ verschwinde mit ε und sei bezüglich t periodisch. Die Lösung $x_0 = x_0(t + \tau, \omega)$ von (2) $\ddot{x}_0 + F(x_0) = 0$ sei bekannt und mod ω periodisch. Der Parameter τ werde später bestimmt. Verf. setzt eine Lösung von (1) nach Poincaré und Krylov-Bogoljubov in der Gestalt (3) $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots$ an. Es sei unter Berücksichtigung von (3): $F(x) = F_0 + \varepsilon F_1 + \dots$ und $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \dots$. Die x_i lassen sich rekursiv bestimmen. Dann

ist bei $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (4) $\int_0^T f_0 \dot{x}_0 dt = 0$ eine Funktion von τ . Ist τ eine einfache Nullstelle von (4), so ist (3) periodisch. Verschwindet die linke Seite von (4) identisch,

so ist τ aus $\int_0^T (f_0 \dot{x}_1 + f_1 \dot{x}_0) dt = 0$ zu bestimmen.

W. Haacke.

Drozdoj, Ju. M.: Erzwungene Schwingungen nicht-linearer Systeme mit einem Freiheitsgrad, die von konservativen Systemen wenig verschieden sind. (Beispiele.) Priklad. Mat. Mech. 19, 33—40 (1955) [Russisch].

Beispiele zu der in der vorstehend besprochenen Arbeit entwickelten Theorie.

W. Haacke.

Kononenko, V. O.: Über die Schwingungen nicht-linearer Systeme mit vielen Freiheitsgraden. Doklady Akad. Nauk SSSR 105, 664—667 (1955) [Russisch].

Es wird ein Verfahren zur Bestimmung von periodischen Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen von n Freiheitsgraden angegeben, dessen Koeffizienten langsam veränderliche, nahezu periodische Funktionen sind und dessen nichtlineare Anteile mit einem kleinen Parameter ε multipliziert sind. Das Verfahren ist anwendbar, wenn die im System möglichen stationären Schwingungen im wesentlichen

mit einer Frequenz erfolgen. Nach Umformung des Ausgangssystems, die einer Hauptachsentransformation des linearen Teilsystems entspricht, wird die Lösung in Form einer asymptotischen Reihe nach Potenzen von ε angesetzt. Entsprechende Reihen findet man für die langsam veränderlichen Phasen und Amplituden der gesuchten Lösung. Die Koeffizienten der Reihenentwicklungen ergeben sich als trigonometrische Doppelreihen. Sind diese bestimmt, dann ist das Problem auf die Integration der Bestimmungsgleichungen für Phase und Amplitude reduziert, eine Aufgabe, die auf einfache Quadraturen zurückgeführt werden kann, falls Amplitude und Phase in trennbarer Form eingehen. Schwach nichtlineare Systeme mit rein periodischen Koeffizienten sind als Sonderfall in dem betrachteten Ausgangssystem enthalten und ergeben gewisse Vereinfachungen des Lösungsverfahrens.

K. Magnus.

Nejmark, Ju. I.: Über Eigenschwingungen und erzwungene Schwingungen von Relaisystemen mit Totzeiten. *Avtomat. Telemekh.* **16**, 225—232 (1955) [Russisch].

Der lineare Teil des Regelkreises enthält mehrere Totzeitglieder; der Relais-Verstärker ist von einfachem Typ (keine Totzone, aber Hysteresis). Auf die durch das Relais erzeugte „Rechteckwelle“ reagiert der lineare Teil mit einer wohlbestimmten Ausgangsgröße, die in geschlossener Form dargestellt werden kann. Das Studium der Überlagerung dieser Ausgangsgröße mit der Rechteckwelle und der äußeren Störung führt zu Bedingungen für stationäre Schwingungen. Für die Rechnungen gibt Verf. ein einfaches Beispiel mit nur einem Totzeitglied. — Die Arbeit ist ohne Kenntnis einer früheren Arbeit des Verf. [*Avtomat. Telemekh.* **14**, 556—569 (1953)] nicht in allen Einzelheiten verständlich.

W. Hahn.

Kislov, B. D.: Konstruktion von Stabilitätsbereichen und der Linien gleicher Werte von Phase und Amplitude mit Hilfe von Nomogrammen für Systeme der automatischen Regelung. *Avtomat. Telemekh.* **16**, 508—529 (1955) [Russisch].

Der Frequenzgang $K W(p) = K W_0(p) W_\lambda(p)$ (mit dem Verstärkungsfaktor K) eines linearen Regelungssystems hänge von zwei Parametern ab, die nur in $W_\lambda(p)$ auftreten mögen. Für verschiedene einfache Typen für $W_\lambda(p)$ werden Nomogramme hergestellt, mit deren Hilfe man die logarithmische Charakteristik konstruieren kann, die Darstellung der charakteristischen Gleichung $K W(p) + 1 = 0$ in einer Ebene mit den Koordinaten $\varphi_0 = \arg K W_0(i\omega)$ und $20 \log |K W_0(i\omega)|$ mit ω als Parameter. Die Grenzen der sich so ergebenden Stabilitätsbereiche für verschiedene Werte des Verstärkerkoeffizienten K ergeben eine Kurvenschar, von der Teile unter hier nicht auszuführenden Bedingungen als „Linien gleicher Amplitudenwerte“ bezeichnet werden. Weiter werden Hinweise gegeben, wie diese nomographischen Methoden auf nichtlineare Regelungssysteme übertragen werden können.

W. Haacke.

Kac, A. M.: Bestimmung der Parameter des Reglers nach der vorgegebenen charakteristischen Gleichung des Regelungssystems. *Avtomat. Telemekh.* **16**, 269—272 (1955) [Russisch].

Sind $A(p)/B(p)$ und $X(p)/Y(p)$ die Übertragungsfunktionen der Regelstrecke bzw. des Reglers und ist $F(p)$ das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises, so ist bekanntlich $F = B Y - A X$. Die Aufgabe, X und Y bei gegebenen A, B, F zu bestimmen, läßt sich mit elementar algebraischen Hilfsmitteln lösen.

W. Hahn.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie.

Friedrichs, K. O.: Differential forms on Riemannian manifolds. *Commun. pure appl. Math.* **8**, 551—590 (1955).

Utilisant certains travaux antérieurs, dus à lui-même [Trans. Amer. math. Soc. **55**, 132—151 (1944); ce Zbl. **29**, 170, 266] et d'autres (principalement M. P. Gaffney,

ce Zbl. 64, 343), l'A. donne ici un important exposé de synthèse sur l'application des méthodes de Hilbert à l'étude des formes différentielles sur une variété riemannienne. La variété M est supposée admettre un recouvrement par des cartes P_σ , homéomorphes à la boule $\sum |x_i|^2 < 1$ de R^m , telles que si R_σ désigne le noyau défini par $\sum |x_i|^2 \leq R^2$ (R fixé, $0 < R < 1$) chaque point de M soit contenu dans un R_σ au moins, et dans au plus 1 d'entre eux; on suppose aussi l'existence d'une partition de l'unité, soit η_σ , subordonnée au recouvrement par les R_σ , et celle d'une métrique riemannienne sur chaque carte P_σ . Toutes les fonctions ainsi introduites ainsi que les composantes des formes différentielles étudiées, sont supposées satisfaire seulement à une condition de Lipschitz d'ordre 1, ce qui constitue l'un des progrès les plus importants réalisés par cette étude. Les normes utilisées ici sont légèrement différentes des normes habituelles: $\hat{v} G v$ désignant le produit scalaire, dans la métrique de P_σ , des tenseurs correspondant aux deux formes différentielles v et \hat{v} , et $d\tau$ l'élément de volume dans P_σ , on pose: $(\hat{v}, v) = \int \hat{v} * v = \sum_{\sigma} \int_{P_\sigma} \hat{v} G v d\tau$, la co-différentielle

v restant définie par $\int du * v = - \int u * \delta v$; et surtout l'A. utilise l'intégrale de Dirichlet „complète“, définie par:

$$D_c(v) = \sum_{\sigma} \|\nabla v\|_{R_\sigma}^2 \quad \text{avec} \quad \|\nabla v\|_R = \left[\int_R |\nabla v|^2 d\tau \right]^{1/2}$$

$|\nabla v|^2$ désignant le carré scalaire du tenseur ∇v obtenu, dans le système de coordonnées x_i , en dérivant chaque composante du tenseur associé à v , par rapport à chacune des variables x_i (les expressions obtenues ne sont pas invariantes, mais on peut les rendre invariantes par une légère modification, et l'essentiel est de considérer la dérivée complète du tenseur associé à v , et non seulement sa partie antisymétrique). La quantité $D_c(v)$ satisfait à une inégalité, due à M. P. Gaffney et à l'A., de la forme (1) $D_c(v) \leq C_0 G(v) + C H(v)$ ($C_0, C = \text{constantes}$) où $G(v) = \int dv * dv + \int \delta v * \delta v$ et $H(v) = \int v * v$. Ceci étant posé, l'A. établit d'abord l'identité de l'extension faible des opérateurs d et δ (obtenue par dualité) avec leur extension forte (obtenue par limite forte) et il en déduit le théorème de décomposition de Kodaira sous sa forme faible. L'inégalité (1) lui permet alors de montrer que si les différentielles dv et δv existent au sens fort, alors les composantes de v sont dérivables au sens fort. La complète continuité de la forme $H(v)$ par rapport à la forme $G(v) + H(v)$, déjà utilisée par M. G. Gaffney, lui permet de prouver que l'espace des formes harmoniques est de dimension finie, et que les formes orthogonales à cet espace satisfont à une inégalité plus précise, de la forme (2) $D_c(v) \leq C' G(v)$, d'où résulte finalement le théorème de décomposition „forte“. La méthode des équations intégrales est ensuite appliquée à des problèmes de continuité; l'A. prouve ainsi que si dv et δv sont mesurables et bornés, la forme v elle-même est continue; il résout une difficulté, signalée par H. Weyl, en démontrant que si v est l'extension forte d'une différentielle du , les périodes de v sont nulles; et il établit l'équivalence des théorèmes de Hodge et de Rham sur les périodes. Enfin, il étend des résultats obtenus, aux formes définies sur une variété à bord, distinguant 2 sortes de périodes. Cette dernière extension utilise la méthode de P. E. Conner, qui consiste à doubler la variété, méthode qui est rendue utilisable ici grâce à la grande généralité des hypothèses sur la métrique.

J. Lelong.

● Bernstein, Dorothy L.: Existence theorems in partial differential equations. (Annals of Mathematics Studies vol. 23.) Princeton, N. J.: Princeton University Press 1950. 240 p.

Cet ouvrage tire son origine d'une vaste enquête sur les problèmes de calcul par machines, menée par l'„Engineering Research Associates, Inc.“ pour l'„Office of Naval Research.“ Tompkins, qui en avait été chargé, rappelle dans sa préface certains faits parfois méconnus lorsqu'on substitue à une équation aux dérivées

partielles une équation aux différences ordinaires, puis introduit le travail de l'auteur. Il s'agit d'un exposé d'ensemble des théorèmes d'existence relatifs aux systèmes différentiels, où l'on se préoccupe surtout des possibilités d'application effective au calcul, mais sans se borner étroitement à ce point de vue. Cet exposé comprend quatre chapitres: introduction (18 pp.): problème de Cauchy pour équations et systèmes d'équations du premier ordre (66 pp.): équations de deuxième ordre (113 pp.): équations d'ordre supérieur (19 pp.). Peut-être pourrait-on regretter que les systèmes du premier ordre à plusieurs fonctions inconnues n'aient pas été rattachés plutôt aux équations d'ordre deux au moins: on sait en effet que la nature réelle ou imaginaire des multiplicités caractéristiques est essentiellement à mettre en évidence pour ces systèmes, et que, à moins de se limiter aux données analytiques, on ne peut espérer obtenir des résultats indépendants d'une telle classification. La bibliographie (11 pp.) qui termine le volume n'a pas, bien entendu, la prétention d'épuiser le sujet: elle pourra, comme l'ensemble de l'ouvrage, rendre de grands services: par l'intermédiaire de certains des articles qui y sont cités, on pourra retrouver les titres d'ouvrages intéressants que l'auteur n'a pas jugé utile de mentionner explicitement.

M. Janet (M. R. 12, 262).

Ezra, Jacques: Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles quasi linéaires. II. C. r. Acad. Sci., Paris **241**, 537—539 (1955).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **64**, 93) erläutert Verf. an dem Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_x - v_y &= A(x, y, u, v), \quad u_y + v_x = B(x, y, u, v) \quad \text{in } D, \\ u l(s) + v m(s) &= r(s) \quad \text{auf } C (= \text{Rand von } D), \end{aligned}$$

wie er sich die Bestimmung von Lösungen des Systems

$$\frac{\partial}{\partial x} X^i(x, y, u, v) = \frac{\partial}{\partial y} Y^i(x, y, u, v) + Z^i(x, y, u, v) \quad (i = 1, 2)$$

denkt. Dabei wird eine Lösung (u, v) als Fixpunkt einer Transformation $T(u, v) = (U, V)$ aufgefaßt, wobei sich U, V aus

$$\begin{aligned} U_x - V_y &= a(x, y) \equiv A(x, y, u, v), \\ U_y + V_x &= b(x, y) \equiv B(x, y, u, v), \quad U l(s) + V m(s) = r(s) \end{aligned}$$

bestimmen. Allerdings setzt Verf. dabei voraus, daß das Problem für U, V bei beliebigen Funktionen $a(x, y)$, $b(x, y)$ eindeutig lösbar sei, was die möglichen Funktionen l, m, r einschränken soll. Ob das überhaupt möglich ist, scheint Ref. fraglich. Denn bekanntlich (vgl. z. B. Vekua, dies. Zbl. **48**, 337) hat für $l^2 + m^2 > 0$ das Randwertproblem entweder nur dann Lösungen, wenn a, b gewisse Integralbedingungen erfüllen, oder es hat für jede Wahl von a, b eine Lösung, die dann aber von einem oder mehreren Parametern abhängt.

Joachim Nitsche.

Smirnov, M. M.: Über die Integration eines Systems von Differentialgleichungen. Priklad. Mat. Mech. **19**, 127—128 (1955) [Russisch].

Die in der Theorie des Wärmeübergangs auftretenden Gleichungen $\partial \theta(x, y) / \partial x = b(T - \theta)$, $\partial T(x, y) / \partial y = -a(T - \theta)$, $T(x, 0) = 1$, $\theta(0, y) = 0$, a, b konstant, werden in einfacherer Weise als bei W. Nusselt [Z. Verein. Deutsch. Ing. **55**, (1911)] gelöst.

W. Schulz.

Herriot, John G.: The solution of Cauchy's problem for a third-order linear hyperbolic differential equation by means of Riesz integrals. Pacific J. Math. **5**, 745—763 (1955).

The differential equation in question is $\partial^3 u / \partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 = f$, the solution of Cauchy's problem is elementary and the paper is an exercise in Riesz's method rather than a piece of research.

L. Gårding.

Vasilache, Sergiu: Sur une nouvelle équation des télégraphistes. Acad. Républ. popul. Romaine, Revue math. phys. **2**, 33—50 (1955).

Verschiedene Anfangsrandwertaufgaben für die Telegraphengleichung werden behandelt im Fall, wo Kapazität und Induktion sich von Konstanten um kleine $\cos \omega t$ -Summanden unterscheiden, deren Produkte vernachlässigt werden, während Widerstand und Erdableitung konstant sind. Die klassische Methode (Einführung der Charakteristiken und Riemannsche Funktion) werden herangezogen, führen aber nicht zu geschlossen angebbaren Ergebnissen. Der Fall räumlich-periodischer Lösungen wird durch Entwicklung in eine sin-Reihe gesondert behandelt; die entstehende gewöhnliche Differentialgleichung wird durch Iteration $W''_{n+1} + \delta^2 W_{n+1} + g(t) W_n = f(t)$ gelöst, was aber nur durch Verwendung der Laplace-Transformierten beschrieben wird.

D. Morgenstern.

● **Fourier, Joseph: The analytical theory of heat.** Translated, with notes, by Alexander Freeman. New York: Dover Publications Inc. 1955. XXIII, 466 p. 20 Fig. \$ 1,95.

Diese neue Ausgabe der berühmten „Théorie analytique de la chaleur“ aus dem Jahre 1822 ist ein Wiederabdruck der erstmals 1878 erschienenen englischen Übersetzung. Einige Berichtigungen wurden im Text vorgenommen.

Zolotarev, G. N.: Zur Frage der Eindeutigkeit der Lösung des Cauchyschen Problems für die Wärmeleitungsgleichung. Doklady Akad. Nauk SSSR 104, 349—351 (1955) [Russisch].

A. N. Tichonov (questo Zbl. 12, 355) ha stabilito che la soluzione del problema di Cauchy (1) $\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2$, $u(x, 0) = \varphi(x)$ non è univocamente determinata dalla $\varphi(x)$ assegnata e precisamente ha dimostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono soluzioni di (1) con $\varphi \equiv 0$ che non sono nulle e per le quali, posto $f(x) = \max_{0 \leq t \leq t_0} |u(x, t)|$, si ha $f(x) \exp(-x^{2+\varepsilon}) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$. In questa Nota l'A. dà una condizione necessaria e sufficiente di unicità nella classe $T(z^\Phi)$ delle soluzioni del problema suddetto. Per la definizione di tale classe si veda I. M. Gel'fand-G. E. Šilov (questo Zbl. 52, 116).

R. Conti.

Giorgi, Ennio de: Un teorema di unicità per il problema di Cauchy, relativo ad equazioni differenziali lineari a derivate parziali di tipo parabolico. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 40, 371—377 (1955).

On considère l'équation (1) $\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{h=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{[\alpha(m-h)]} c_{hk}(x, t) \frac{\partial^{h+k} u}{\partial x^k \partial t^h}$ dont les coefficients sont continus dans le rectangle $R = [a_1 \leq x \leq a_2, t_1 \leq t \leq t_2]$ et admettent les dérivées de tous les ordres par rapport à x ; α est un nombre positif, inférieur à l'unité. Soit $u(x, t)$ une solution de (1), définie dans R et satisfaisant aux conditions initiales (2) $\partial^h u / \partial t^h|_{(x, t_1)} = 0$ ($h = 0, 1, \dots, m-1$) pour $a_1 \leq x \leq a_2$. S'il existe un nombre $\varrho > 0$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho^n}{n!} \frac{\partial^n c_{hk}}{\partial x^n} = 0$ ($0 \leq h \leq m-1, 0 \leq k \leq \alpha(m-h)$) uniformément dans R , on a $u(x, t) \equiv 0$ dans R .

M. Krzyżański.

Pini, Bruno: Sulla regolarità e irregolarità della frontiera per il primo problema di valori al contorno relativo all'equazione del calore. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 40, 69—88 (1955).

On appelle l'arc régulier un arc $x = \chi(y)$, $0 \leq y \leq a$, la fonction $\chi(y)$ admettant la dérivée du premier ordre continue pour $0 \leq y \leq a$. Soit $U(x, y; \xi, \eta)$ la solution fondamentale de l'équation de la chaleur (1) $u''_{xx} = u'_y$. L'intégrale (2) $u(P) = u(x, y) = \int_0^y \mu(\eta) U(x, y; \chi(\eta), \eta) d\eta$ constitue une solution de (1) s'annulant pour $y = 0$. L'A. détermine la fonction $\mu(y)$ de sorte que l'on ait $u(\chi(y), y) = 1$ pour $0 \leq y \leq a$. La fonction $\mu(y)$ étant ainsi choisie, l'A. appelle l'intégrale $v(P) = \int_0^a \mu(\eta) U(x, y; \chi(\eta), \eta) d\eta$ potentiel conducteur parabolique. La notion du po-

tentiel parabolique s'étend au cas d'un arc continu. Soit C un contour composé de deux arcs réguliers $x = \chi_1(y)$ et $x = \chi_2(y)$, $0 \leq y \leq b$ ($b > a$) et du segment $\chi_1(b) \leq x \leq \chi_2(b)$ de la caractéristique $y = b$. L'intégrale $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_C (v dx + v'_x dy)$,

appelée capacité parabolique de l'arc γ , est indépendante du choix du contour C . La définition du point régulier par rapport au premier problème aux limites pour (1) dans un domaine D est analogue à celle du point régulier par rapport au problème de Dirichlet. Soit $v_r(P)$ le potentiel parabolique relatif à la partie γ_r de l'arc continue γ , comprise entre $y = y_0 - r$ et $y = y_0$. L'A. démontre un théorème analogue à celui de Kellog: Pour que le point $P_0(x_0, y_0)$ de l'arc γ de la frontière du domaine D soit régulier par rapport au premier problème aux limites pour (1) dans D , il faut et il suffit que l'on ait $\lim_{P \rightarrow P_0} v_r(P) = 1$. En introduisant la capacité parabolique,

l'A. établit une condition suffisante pour la régularité et une condition suffisante pour l'irrégularité du point P_0 . [Remarque: D'après les calculs du réc. la dérivée $\partial H / \partial z$ (voir p. 71) est continue elle-même.] M. Krzyżański.

Gagliardo, Emilio: Problema al contorno generalizzato per l'equazione del calore. Ricerche Mat. 4, 74—94 (1955).

Denoti D un dominio generalmente regolare definito dalle disuguaglianze:

$$c \leq y \leq d, \quad \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), \quad [\alpha(y) < \beta(y)],$$

le funzioni $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ essendo di classe C^1 . Con riferimento ad alcuni lavori di Stampacchia (cf. questo Zbl. 42, 428; 44, 316; 51, 81) e ad alcuni risultati da lui precedentemente stabiliti [Ricerche Mat. 3, 166—171; 202—219 (1954)], l'A. dimostra il seguente teorema di esistenza e di unicità per un problema al contorno per l'equazione del calore: esiste ed è unica, nella classe delle funzioni assolutamente continue rispetto alle variabili separatamente e con le derivate $p(x, y)$, $q(x, y)$, $r(x, y)$ di quadrato sommabile in D , la funzione $u(x, y)$ che in D soddisfa alla equazione $u_{xx} - u_y = f(x, y)$, con $f(x, y)$ di quadrato sommabile in D , e alle condizioni $\lim_{y \rightarrow c} u(x, y) = w_1(x)$; $\lim_{x \rightarrow \alpha(y)} u(x, y) = w_{21}(y)$; $\lim_{x \rightarrow \beta(y)} u(x, y) = w_{22}(y)$,

essendo le $w_1(x)$, $w_{21}(y)$, $w_{22}(y)$ assolutamente continue, con le derivate di quadrato sommabile e tali che $w_1[\alpha(c)] = w_{21}(c)$, $w_1[\beta(c)] = w_{22}(c)$. G. Sestini.

Montaldo, Oscar: Sul primo problema di valori al contorno per l'equazione del calore. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 25, 1—14 (1955).

L'A. étend les résultats de B. Pini (ce Zbl. 57; 327, 328) à l'équation de la chaleur à plusieurs variables indépendantes. M. Krzyżański.

Pounder, J. R. and J. L. Synge: Note on the initial-value problem for the wave equation in N dimensions. Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A, 57, 151—159 (1955).

Cauchy's problem for the wave operator $(\partial/\partial x_1)^2 + (\partial/\partial x_2)^2 + \dots + (\partial/\partial x_n)^2$ is solved by means of the complex potential kernel

$$((x_1 + i\alpha_1)^2 - (x_2 + i\alpha_2)^2 - \dots)^{1/n/2}$$

which has no singularities if the parameter α is time-like. The solution is obtained explicitly by letting $\alpha \rightarrow 0$ in Green's formula. L. Gårding.

O'Keeffe, J.: The initial value problem for the wave equation in the distributions of Schwartz. Quart. J. Mech. appl. Math. 8, 422—434 (1955).

Der Verf. behandelt das Anfangswertproblem der Wellengleichung in einer beliebigen Anzahl von Raumdimensionen mit Hilfe der Elementarlösungen. Die für die Anwendung dieses Verfahrens gegebene Begründung (über den klassischen Greenschen Satz) stellt unnötig große Anforderungen an die vorgegebenen Anfangswerte. Die Konstruktion der Elementarlösungen selbst geschieht mit Hilfe einer Fouriertransformation nur über die räumlichen Variablen. Die allgemeinere Arbeit von L. Schwartz, Théorie des noyaux (dies. Zbl. 48, 351), scheint dem Verf. nicht bekannt gewesen zu sein. F. Penzlin.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On the local behavior of solutions of non-parabolic partial differential equations. III. Approximation by spherical harmonics. Amer. J. Math. **77**, 453—474 (1955).

In Erweiterung früherer Untersuchungen (vgl. dies. Zbl. **52**, 322) betrachten Verff. die Differentialgleichung

$$\Delta u + a \cdot \nabla u + \gamma u = 0 \quad \left(\Delta = \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad a \cdot \nabla = \sum_1^n a^i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

für $n \geq 3$. Der 1. Teil der Arbeit beschäftigt sich mit den Nullstellen von Lösungen. Sind $a^i(x)$ und $\gamma(x)$ in einer Kugelumgebung von $x = 0$ stetig und ist $u(x)$ daselbst eine stetig differenzierbare Lösung mit $u(0) = 0$, so gilt entweder in dieser Umgebung $u = 0$ oder es gelten mit einem geeigneten ganzzahligen $N > 0$ die Beziehungen

$$u(x) = r^N S_N(e) + o(r^N), \quad \nabla u(x) = \nabla r^N S_N(e) + o(r^{N-1}),$$

wobei $x^i = r e^i \left(\sum_1^n (e^i)^2 = 1 \right)$ und $S_N(e)$ eine Kugelfunktion N -ten Grades in n Variablen ist (Satz 1). Daraus folgt insbesondere, daß sich für eine nicht identisch verschwindende Lösung im Innern eines Regularitätsgebietes die Nullstellen nirgends häufen können. Die Beweise werden durch Approximation einer Lösung durch endliche Summen der Entwicklung nach Kugelfunktionen und Abschätzung der Differenzen sowie deren Ableitungen gewonnen. — Im 2. Teil werden Lösungen betrachtet, die in einer punktierten Umgebung von $x = 0$ stetig differenzierbar sind, in $x = 0$ jedoch singulär sein können. Gilt bei den Voraussetzungen des Satzes 1 über $a^i, \gamma: u(x) = o(1/r)$ für $r \rightarrow 0$ in 3 Dimensionen, so ist $x = 0$ eine hebbare Singularität (Satz 2). Weiter werden die Fälle $u(x) \rightarrow \infty$ und $u(x) = o(r^{-N-2})$, $\nabla u(x) = o(r^{-N-3})$ mit ganzzahligem $N \geq 0$ behandelt. *Joachim Nitsche.*

Douglas, Avron and Louis Nirenberg: Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. Commun. pure appl. Math. **8**, 503—538 (1955).

A completely new method of solution of the Dirichlet problem in the case of a linear elliptic equation with variable coefficients was given by Schauder in 1934 (this Zbl. **8**, 255). The essential idea of this method is to utilize „a priori estimates“ of the solutions of the equation at interior points, and at points near the boundary. These estimates were obtained by Schauder by long, tedious, methods and constituted the most valuable of his results. In the paper under review, the authors consider elliptic systems of linear partial differential equations with a definition of ellipticity which is a little more general than the standard one. They extend to such systems the method of Schauder but establish their theorems about „interior estimates“ and „estimates near the boundary“ by a method which, although very similar to that of Schauder, yet, in the particular case of one equation, brings about a notable simplification. Section 1 introduces the elliptic systems studied by the authors and gives the main definitions. Section 2 treats of Hölder's conditions and norms of the function spaces utilized in the following sections. A certain number of elementary but useful lemmas are established; it looks as if the notations of the authors are little too complicated. Section 3, devoted to the ordinary type of one equation, serves as a welcome introduction to the more complex treatment of elliptic systems. Schauder's methods are clearly sketched and an integral representation of the solutions of the linear equation yields an improvement of the method used by Schauder to get his bounds. The purpose of section 4 is only to state the main theorem, theorem 1, of the paper. Its detailed proof is developed in section 6. This theorem is about the estimates of solutions of an elliptic system and may be expressed in terms almost identical to those of Schauder's theorem. It is astonishing to see how not only theorems but also demonstrations follow closely, to a few welcome simplifications, the path indicated by Schauder. Most of the proofs rest on Potential

theoretical propositions which are direct generalizations of the known theorems about estimates in the classical theory. These are to be found in section 5. Section 7 establishes a general differentiability theorem and the last section deals with elliptic systems written in integral form. The proofs which in many cases are only sketched are easy and only an application of classical methods in the theory of partial differential equations. The complexity of the notations as well as the length of the calculations makes it difficult to give a detailed account of the theorems stated and proved in this paper. It may be that further simplifications of Schauder's methods are still to be found. At any rate the results so far obtained are undoubtedly of great importance and are likely to be the forerunners of new and far reaching developments in a theory whose every progress has always influenced astonishingly the growth of various other mathematical theories.

C. Racine.

Bers, Lipman: Local behavior of solutions of general linear elliptic equations. Commun. pure appl. Math. 8, 473—496 (1955).

This paper generalizes results due to Carleman, the author himself, Morrey, Nirenberg and others, and establishes some very important propositions about the behaviour at $x = 0$ of solutions of the linear partial differential equation in n variables, of order $m \geq 2$ and of elliptic type:

$$(1) \quad L\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^m \sum_{i_1+\dots+i_n=\nu} a_{i_1\dots i_n}(x) \frac{\partial^\nu \Phi}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = 0.$$

The assumption made about the coefficients of this equation is that they are simply Hölder continuous, or that their derivatives of a certain order are Hölder continuous. The proofs are simple applications of fundamental a priori estimates, generalizing those of J. Schauder and due to Douglis and Nirenberg (cf. the preced. review). Section 2 introduces notations and inequalities relative to Hölder conditions. It shows that the equation

$$L_0\Phi = \sum_{i_1+\dots+i_n=m} a_{i_1\dots i_n}(0) \frac{\partial^m \Phi}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = 0$$

has a uniquely determined, fundamental solution which naturally serves to construct generalized potentials. Section 3 establishes, in particular, useful potential theoretical lemmas about functions of the form $\psi(x) = \int_{|\xi| \leq R} J(x - \xi) f(\xi) d\xi$ where $f(x)$

is measurable and such that the integral converges absolutely for $0 < |x| \leq R$, $J(x)$ being defined and analytic for $x \neq 0$ and positively homogeneous of degree $m - n$, where $0 < m < n$. As usual such propositions and in particular estimates of ψ and of its derivatives call for long and tedious computations. But once this preliminary work is done the main theorems, found in section 4, are proved with an extreme simplicity. The first of these theorems states that if the coefficients of the derivatives of order m in (1) are Hölder continuous with an exponent ε , $0 < \varepsilon < 1$, and if $\Phi(x)$ is solution of (1), vanishing at $x = 0$, but not of infinite order, there exists a homogeneous polynomial of degree N , $p_N(x)$, not identically 0, such that $\Phi(x) = p_N(x) + O_m(|x|^{N+\varepsilon})$. $O_m(|x|^A)$ means that the function in the left hand member is $O(|x|^A)$ and its derivatives of order k , $k = 1, 2, \dots, m$, are $O(|x|^{A-k})$. A second theorem establishes that if the above mentioned coefficients have Hölder continuous derivatives up to the order k , the other coefficients being Hölder continuous if $k = 1$ and having Hölder continuous derivatives of order $k - 1$ otherwise, $\Phi(x) = p_N(x) + O_{m+k}(|x|^{N+\varepsilon})$. Section 5 shows that there exists a change of coordinates which removes the coefficients of order 0 and 1 of (1) in a certain vicinity of the origin. The last two sections are about removable and fundamental singularities. They are straightforward generalizations of well known theorems of Potential theory. They are easily proved. The author has given a rich bibliography and this

alone is a valuable contribution when the subject is one which, although of recent origin, is daily growing. C. Racine.

Nitsche, Johannes: Untersuchungen über die linearen Randwertprobleme linearer und quasilinear elliptischer Differentialgleichungssysteme. I. Math. Nachr. 14, 75—127 (1955).

This paper is the first part of an important memoir systematizing and extending results due to G. Hellwig, W. Haack, I. W. Vekua and others. The introduction points to the difficulties met in solving, in a domain T of boundary S and of type Ah , a non linear differential equation of the form

$$\Delta \Phi + a(x, y) \Phi_x + b(x, y) \Phi_y + c(x, y) \Phi = f(x, y, \Phi, \Phi_x, \Phi_y)$$

where Δ is the usual laplacian and when the boundary conditions are of the form $d\Phi/dn + k(s) \Phi = h(s)$ on S . The main difficulty comes from the necessity to discuss the „ramifications“. In the case of an equation $\Delta \Phi = 0$, F. Noether had shown that it is much more natural to study it in the form of the system $u_x - v_y = u_y + v_x = 0$, with boundary conditions $p \cdot u + q \cdot v = h$, $(p^2 + q^2 > 0)$. Instead of equations of ramification, one has to discuss an index n , given by

$$(1) \quad n = \frac{1}{2\pi i} \int_S d \log (p + i q).$$

If $n \geq 0$, there are $2n+1$ linearly independent solutions, none otherwise. Noether's idea has been recently extended to more general equations by a number of authors: the bibliography given here consists of 71 references! The main results of the memoir, whose table of contents is to be found at the beginning of its first part, will undoubtedly be those of Part II, which will treat the non linear, particularly the quasi-linear, case. Part I, under review, is mainly concerned with preliminary theorems. As can be expected these theorems deal with: (1) what may be called the Hölder theory of the solutions: estimates of these solutions, of their derivatives and of the Hölder constants; (2) the linear boundary problem. In addition to these questions the author studies a fundamental representation of the solutions of a non linear boundary problem which is given by a „similarity theorem“. It is applied to the study of the zeroes of the solutions which play a very important part. The quasi-linear system

$$\begin{aligned} u_x - v_y + a(x, y) u + b(x, y) v &= f(x, y, u, v), \\ u_y + v_x + c(x, y) u + d(x, y) v &= g(x, y, u, v) \end{aligned}$$

is written in the condensed form

$$w_{\bar{z}} + A w + B \bar{w} = F(z, w), \quad w = u + i v, \quad \partial/\partial \bar{z} = \frac{1}{2} (\partial/\partial x + i \partial/\partial y),$$

and the author considers specially the case of an equation of the form (2) $w_z = \sum_{\alpha+\beta=1}^{\infty} A_{\alpha\beta} w^\alpha \bar{w}^\beta$ where the $A_{\alpha\beta}$'s are continuous and the series is uniformly convergent. The author's similarity theorem states that a solution of (2) may be written: $w(z) = r(z) \cdot e^{w(z)}$, where $r(z)$ is uniform and analytic in T . This representation is extremely useful to prove that the number of zeros of $w(z)$ is bounded and to extend to such functions the classical theorems of Blaschke, Vitali and Fatou. The same representation makes it easy to write the boundary conditions in the form $R^\sigma(w) = h(s)$, $R^\sigma(w) = \operatorname{Re} \{e^{-i\sigma(s)} w[z(s)]\}$ where (3) $e^{-i\sigma(s)} = [p(s) + i q(s)] / \sqrt{p^2 + q^2}$. The treatment of the linear case (4) $w_z + A w + B \bar{w} = F(z)$, $R^\sigma(w) = h(s)$, depends on the existence of „generalized Green's functions“, of an integral representation of the solution of (4) and on a theorem of equivalence proving that all the solutions of (4) are given, each one once, by the formula for integral representation. The existence of the generalized Green's functions is proved by showing that their finite part (in the sense of Hadamard) is solution of an integral equation of the Fredholm type. Two cases must be distinguished according as an index, the analogue

of (1) is non negative or negative. This index is given by: $2\pi n = \sigma(s_0 + L) - \sigma(s_0)$, where σ is defined by (3) and S is a curve defined parametrically by periodic functions of its arc s , the period being L . If $n \geq 0$, the solution w is subject to the condition $\int_S h_j(s) R^\tau(w) ds \neq 0$; $j = 0, 1, 2, \dots, 2n$ where $\tau(s) \equiv \sigma(s) \pmod{\pi}$ and the $h_j(s)$'s are periodic, of period L and satisfy some simple conditions concerning their zeros. If $n < 0$, the solution does not exist in the general case. It always exists provided $h(s)$ has a Fourier series with respect to a complete orthogonal set, whose $2(|n| - 1)$ first terms vanish. It is not difficult to show that the Green's functions relative to the first case and those relative to the second case are connected by a simple condition: The Green's functions of the first equation, $n \geq 0$, are linear functions of those determined by the adjoint equation when the index is $-(n + 1)$. The existence of these generalized Green's functions is first proved in the case of the equation $w_z = F(z)$ with the boundary condition $R^\sigma(w) = h(s)$. Then, as the infinite parts of these Green's functions for the equation just mentioned and for (4) are the same, the difference between them is easily shown to satisfy a system of integral equations of the Fredholm type. Existence and uniqueness theorems follow at once.

C. Racine.

Ladyženskaja, O. A.: Einfacher Beweis für die Lösbarkeit der fundamentalen Randwertaufgaben und der Eigenwertaufgabe für lineare elliptische Gleichungen. Vestnik. Leningradsk. Univ. 10, Nr. 11 (Ser. mat. fiz. chim. 4), 23—29 (1955) [Russisch].

Es wird die folgende Verallgemeinerung der bekannten Ungleichung der Verf. (s. dies. Zbl. 44, 127) bewiesen:

$$(1) \|u\|_{\dot{W}_2^2(\Omega_n)}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_n} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} |D^\alpha u|^2 dx \leq \text{const} \int_{\Omega_n} |L_\tau u(x)|^2 dx;$$

$D^\alpha u \stackrel{\text{def}}{=} \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$; $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; wobei

$$Lu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j} a_{ij}(x) \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j + \sum_i b_i(x) \partial u / \partial x_i - a(x) u,$$

$L_\tau = \Delta + \tau(L - \Delta)$, ($0 \leq \tau \leq 1$) für jede Funktion aus $\dot{W}_2^2(\Omega_n)$; $\dot{W}_2^2(\Omega_n)$ ist die Abschließung der auf dem zweimal stetig differenzierbaren Rande $\partial\Omega_n$ von Ω_n verschwindenden Funktionen der Klasse $C^3(\overline{\Omega_n})$ in der $\|\cdot\|_{\dot{W}_2^2(\Omega_n)}$ -Norm. Von den Koeffizienten des Operators L wird folgendes vorausgesetzt: a_{ij} sind stetig in $\overline{\Omega_n}$ und besitzen beschränkte schwache Ableitung nach x_i ; $a_i, a(x) > a_0 > 0$ sind meßbar und beschränkt; $\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_i \xi_i^2$, $\alpha > 0$ (Elliptizität!). Aus der Ungleichung

(1) folgt durch die Fortsetzung nach τ die eindeutige Existenz der verallgemeinerten Lösung u (d. h. $u \in \dot{W}_2^2(\Omega_n)$) des Dirichletschen Problems. Durch die übliche Zurückführung auf die Fredholmsche Gleichung wird das entsprechende Eigenwertproblem gelöst. Da die (1) analoge Ungleichung auch in L^p (vgl. das nachstehende Referat) — resp. für starkelliptische Systeme (s. e.) (s. Guseva, dies. Zbl. 64, 97) — gilt, erhält man analoge Sätze in L^p — resp. für s. e. Systeme. Es folgen Existenzsätze für Gleichungen (resp. Gleichungssysteme) vom Typus $\partial u / \partial \tau = L u$, $u|_{\partial\Omega_n} = 0$, wo L elliptisch (resp. s. e.) ist.

K. Maurin.

Košelev, A. I.: Über die Beschränktheit in L^p der Ableitungen der Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 38 (80), 359—372 (1956) [Russisch].

Der Verf. beweist die folgende Verallgemeinerung — in L^p — der Ungleichung von Ladyženskaja (vgl. das vorstehende Referat): Wenn die Koeffizienten des elliptischen Operators (1) $Lu = f$ stetig und beschränkt sind im beschränkten Gebiet Ω_n , $f \in L^p(\Omega_n)$, $p > 1$, dann gilt für die verallgemeinerte Lösung des Dirichletschen Problems: $Lu = f$, $u|_{\partial\Omega_n} = 0$ (wegen Definitionen vgl. das vorstehende

Referat) die Ungleichung

$$\|u\|_{W_2^p(\Omega_n)} \leq G \|f\|_{L^p(\Omega_n)} + C_2 \sup_{\Omega_{n-1}} \int_{\Omega_{n-1}} |u| d\Omega_{n-1},$$

wobei die Integration über alle $(n-1)$ -dimensionalen ebenen Schnitte des Gebietes Ω_n erstreckt ist. (Im Falle des formal selbstadjungierten Operators erhält man die Ungleichung (2) $\|u\|_{W_2^p(\Omega_n)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega_n)}$). Mit Hilfe des bekannten Satzes von Giraud wird die Existenz der verallgemeinerten Lösung des Dirichletschen Problems für die selbstadjungierte Gleichung bewiesen. [Bem. des Ref.: Wie in der vorstehend besprochenen Abh. von Ladyženskaja gezeigt wurde, folgt der Existenzsatz augenblicklich aus (2) durch die Fortsetzung der Lösung nach dem reellen Parameter, ohne Berufung auf Giraud.]

K. Maurin.

Košev, A. I.: Differentiell korrespondierende Räume und Existenzsätze. Doklady Akad. Nauk SSSR **105**, 22–25 (1955) [Russisch].

Der Verf. setzt hier seine Untersuchungen über die Anwendbarkeit der Newtonschen Methode von Kantorovič in der Theorie der Randwertaufgaben für quasilineare elliptische Gleichungen fort (vgl. dies. Zbl. **52**, 329). Es sei:

$$P u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + f \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$a_{ik} = a_{ik}^0(x) + \lambda_0 a_{ik}^1(x, \partial u / \partial x); \quad f = f^0(x) + \lambda_0 f^1(x, \partial u / \partial x).$$

Es gilt der folgende Satz 1. Vor.: 1. a_{ik}, f sind stetig; $a_{ik}(x, \cdot, \cdot), f(x, \cdot, \cdot) \in C^2$; 2. die ersten Ableitungen von a_{ik} sind beschränkt und meßbar; $f^0 \in L^p(\Omega)$, $p > n$; 3. der Rand $\partial\Omega$ von $\Omega \in C^2$; 4. $\sum a_{ik} \xi_i \xi_k \geq c \sum \xi_i^2$ (Elliptizität!). Beh.: Die Randwertaufgabe: $Pu = 0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ hat eine einzige verallgemeinerte Lösung u für $|\lambda| < \varepsilon(\Omega, a_{\mu\nu}, f)$: $u \in W_p^{(2)}(\Omega)$ ($p > n$) [u besitzt also alle ersten und zweiten schwachen Ableitungen, die $\in L^p(\Omega)$ sind]. Für die Gleichung

$$0 = \Pi u \stackrel{\text{def}}{=} \sum \alpha_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum \beta_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma(u) - f(x, \partial u / \partial x)$$

beweist man den Satz 2. Vor.: 1. $\partial \alpha_{ik} / \partial x_\nu, \beta_i, \gamma$ sind beschränkt und meßbar; 2. $f \in C$, $f(x, \cdot) \in C^2$, $\|f\|_{C(\bar{\Omega})} \leq N(\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} + K)^r$, $0 \leq r < 1$; 3. $\gamma \leq 0$. Beh.: Die Randwertaufgabe: $\Pi u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ besitzt die einzige verallgemeinerte Lösung $u \in W_p^{(2)}(\Omega)$, ($p > n$).

K. Maurin.

Levitan, B. M.: Über das asymptotische Verhalten der Spektralfunktion und die Entwicklung nach Eigenfunktionen der Gleichung $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, x_3)\} u = 0$. Trudy Moskovsk. mat. Obsč. **4**, 237–290 (1955) [Russisch].

Let Ω be a region in R^n and let A be a self-adjoint restriction of the weak differential operator $-\Delta + q(x)$ on $L^2(\Omega)$, (q real and continuous). Let $A = \int \lambda dE(\lambda)$ be the spectral resolution of A . Then $E(\lambda)$ is given by a kernel $e(\lambda, x, y)$, the spectral function of A and $e_0(\lambda, x, y) = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|^2 \leq \lambda} e^{i(x-y)\xi} d\xi$ corresponds to the case $\Omega = R^n, q = 0$ where the differential operator itself is self-adjoint and is diagonalized by the Fourier transform. Let $I^s g(\lambda) = \int_0^\lambda \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)^s d\mu$ be the Riesz mean of order s of g . When $\Omega \subset R^3$ is bounded, q is positive and A is determined by the Neumann boundary condition, it is shown that $I^s e(\lambda, x, y) - I^s e_0(\lambda, x, y) = O(\lambda^{1-s/2})$ when $0 \leq s \leq 1$, uniformly on compact subsets of $\Omega \times \Omega$. When $1 < s \leq 2$, the same quantity is of the form $O(1)$ plus $\sqrt{\lambda} q(x)$ times an explicit bounded function of s, λ, x and y , and a similar estimate is given also when $s \geq 3$. Analogous estimates for $I^s e(\lambda, f, y) - I^s e_0(\lambda, f, y)$ where $f \in L^2$ and $e(\lambda, f, y) = \int e(\lambda, x, y) f(x) dx$. Corresponding results when $\Omega \subset R^2$. In the last chapter, it is assumed that $\Omega = R^3$, the growth of q being unrestricted. In this case, let e be a limit of spectral functions referring to bounded regions. It is shown that $e(\lambda, x, y) -$

$e(0, x, y) - e_0(\lambda, x, y) = O(\lambda)$ and that, under a supplementary condition on $\Gamma \in L^2$, $\Gamma^1 e(\lambda, f, y) - e(0, f, y) - \Gamma^1 e_0(\lambda, f, y) = o(1)$. L. Gårding.

Magenes, Enrico: Sui problemi di derivata obliqua regolare per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 40, 143—160 (1955).

Der Verf. löst verschiedene Probleme (für die Laplace-Gleichung) mit der schrägen Ableitung („derivata obliqua“), und zwar: das gemischte Problem, die Umkehrformel, Vollständigkeitssätze für Eigenfunktionen, die die Anwendbarkeit der Piconeschen Methode sichern. (Wegen Definitionen vgl.: Miranda, Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, dies. Zbl. 65, 85). Definitionen: Ω_3 ist das endlichzusammenhängende Gebiet mit stetig gekrümmtem Rande $\partial\Omega_3$; $l(x)$ ein schräges (nicht tangentiales) Vektorfeld auf $\partial\Omega_3$; $n(x)$ die innere Normale im Punkte $x \in \partial\Omega_3$; $|n(x)| = |l(x)| = 1$. $l^*(x)$ ist die zu $l(x)$ (in bezug auf $n(x)$) symmetrische Achse. Die verallgemeinerte Greensche Formel hat die folgende Gestalt: (mit einer passend gewählten, von l abhängenden Funktion $\beta^{(l)}$ des Punktes $x \in \partial\Omega_3$)

$$\int_{\Omega_3} \{u \Delta v - v \Delta u\} = \int_{\partial\Omega_3} \{\cos^{-1}(l, n) [u \partial v / \partial l^* - v \partial u / \partial l] + \beta^{(l)} u v\}.$$

Γ ist die Menge der Funktionenpaare (μ, δ) , für welche $\mu, \delta \in L^2(\partial\Omega_3)$ und für die die folgende Gleichung gilt:

$$F(\mu, \delta, \Omega_3)(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega_3} \left\{ \frac{\partial |x-y|^{-1}}{\partial l^*(x)} \mu(x) - \frac{\delta(x)}{|x-y|} + \frac{\beta^{(l)}(x) \mu(x)}{|x-y|} \right\} \frac{d\omega(x)}{\cos(l(x), n(x))} = 0, \text{ für } y \notin \bar{\Omega}_3.$$

Aus vielen von dem Verf. bewiesenen Sätzen heben wir die folgenden hervor:

1. Die Klasse Γ ist charakterisiert durch die Gleichungen:

$$\lim_{y \rightarrow x \text{ (auf } n(x))} u(y) = \mu(x), \quad \lim_{y \rightarrow x \text{ (auf } n(x))} \partial u(y) / \partial l(x) = \delta(x), \quad x \in \partial\Omega_3,$$

wobei $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\Omega_3} \varphi(x) H(x, y; l(x)) d\omega(y)$, $\varphi \in L^2(\partial\Omega_3)$; (wegen der Definition des

Kernes vgl. Giraud, dies. Zbl. 21, 404). 2. Wenn $(u, \delta) \in \Gamma$, dann ist $w(y) \stackrel{\text{def}}{=} F(\mu, \delta, \Omega_3)(y)$ 1° harmonisch in Ω_3 ; 2° es existieren die Grenzwerte:

$$(G) \quad \lim_{y \rightarrow x \text{ (auf } n(x))} w(y) \stackrel{\text{f. ü.}}{=} \mu(x), \quad \lim_{y \rightarrow x \text{ (auf } n(x))} \partial w(y) / \partial l(x) \stackrel{\text{f. ü.}}{=} \delta(x).$$

3. Die gemischten Probleme (G) sind eindeutig, z. B. Vor.: $\partial\Omega_3 = F_1 \cup F_2$ (das Maß von $F_i > 0$, $i = 1, 2$); $(\mu, \delta) \in \Gamma$, $\mu = 0$ f. ü. auf F_1 , $\delta = 0$ f. ü. auf F_2 . Beh.: $\mu = \delta = 0$ f. ü. auf $\partial\Omega_3$. Aus 3. folgen entsprechende Vollständigkeitssätze für Eigenfunktionen (vgl. Fichera, dies. Zbl. 35, 438), die die Anwendbarkeit der Piconeschen Methode auf die Probleme mit der schrägen Ableitung sichern. [Bemerkung des Ref.: In letzter Zeit beschäftigte sich Lions mit den Problemen mit der schrägen Ableitung für elliptische Gleichungen beliebiger Ordnung in Gebieten mit beliebig oft differenzierbarem Rande (vgl. dies. Zbl. 64, 100).] *K. Maurin.*

Magenes, Enrico: Sulla teoria del potenziale. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 24, 510—522 (1955).

Verf. untersucht die Flächen- und Dipolpotentiale bei sehr schwachen Voraussetzungen (Integrierbarkeit!) über die Belegungsdichten. Es sei Ω_3 ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit stetig gekrümmtem Rande $\partial\Omega_3$;

$$u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\Omega_3} \varphi(y) |x-y|^{-1} dy \quad \text{mit } \varphi \in L^1(\partial\Omega_3).$$

Es gelten folgende wichtige Sätze: 1. Für f. a. $p \in \partial\Omega_3$ (genauer: für alle Lebesgueschen Punkte von φ) ist die Existenz der Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow p \text{ (auf } \pm n(p))} \frac{du(x)}{dl(p)} \quad \text{und} \quad \int_{\partial\Omega_3}^* \varphi(y) \frac{dp - y}{dl(p)} dy$$

(\int^* ist der Cauchysche Hauptwert) äquivalent. Die Differenz der beiden Grenzwerte

beträgt $\int_{\partial\Omega_3} 2\pi \varphi(p) \cos(n(p), l(p))$. 2. Es gilt ein analoger Satz für das Dipolpotential

$$\int_{\partial\Omega_3}^* \varphi(y) \frac{d}{dl(y)} |x-y|^{-1} dy \quad (\text{mit auf } \partial\Omega_3 \text{ integrierbarem } \varphi).$$

3. Der Satz 3 der vorstehend besprochenen Abhandlung des Verf. gilt auch für $\mu, \delta \in L^1(\partial\Omega_3)$. 4. Es sei $G(x, y)$ eine Grundlösung der allgemeinen elliptischen Gleichung

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = 0.$$

Dann gilt der zu 1. analoge Satz für das verallgemeinerte Potential $\int_{\partial\Omega_n} \varphi(y) G(y, x) dy$.

Für fast alle $x \in \partial\Omega_n$ existiert der Hauptwert $\int_{\partial\Omega_n}^* \varphi(y) \frac{dG(x, y)}{dl(x)} dy$. [Bem. d. Ref.:

Auf diese Weise wurde von dem Verf. ein wichtiges Problem der Theorie der singulären Integrale (vgl. Calderón-Zygmund, dies. Zbl. 65, 41) gelöst.]

K. Maurin.

Marić, Vajislav: On the Green's function of the biharmonic operator. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 8, 59–66 (1955).

Sei S ein beschränkter Bereich mit genügend glatter Berandung S' , so daß die Existenz der Greenschen Funktion $G(P, Q; \lambda)$ des Randwertproblems

$$(1) \quad \Delta \Delta u - \lambda u = 0, \quad [u]_{S'} = [\partial u / \partial n]_{S'} = 0$$

gesichert ist. — Durch Modifikation einer von V. Avakumović benutzten Methode (erscheint demnächst in der Math. Z.) gelingt es dem Verf., eine Ungleichung anzugeben, welcher $G(P, Q; -\lambda)$ in der ganzen komplexen λ -Ebene mit Ausnahme der negativen Halbgeraden genügt. Verf. zieht hierzu die (explizit angegebene) Grundlösung $R(P, Q; -\lambda)$ der Gleichung (2) $\Delta \Delta u + \lambda u = 0$ und eine den Bedingungen $[\gamma]_{S'} = [R]_{S'}$, $[\partial \gamma / \partial n]_{S'} = [\partial R / \partial n]_{S'}$ genügende reguläre Lösung $\gamma(P, Q; -\lambda)$ von (2) heran. — Das Problem läuft dann auf eine Abschätzung von $\gamma(P, Q; -\lambda)$ hinaus. Bei der Durchführung betrachtet der Verf. die Ausdrücke

$$\int_S |G(P, Q; -\lambda)|^2 dF_P, \quad \int_S |\Gamma(P, Q; -\lambda)|^2 dF_Q$$

[wo $\Gamma(P, Q; -\lambda)$ eine aus $R(P, Q; -\lambda)$ durch den $\Delta \Delta$ -Prozeß erzeugte Funktion darstellt], für welche er unter Heranziehung eines Ergebnisses von Å. Pleijel (dies. Zbl. 23, 124) über die Eigenwerte und Eigenfunktionen von (1) die benötigten Ableitungen gewinnt.

H. Pachale.

Brownell, F. H.: An extension of Weyl's asymptotic law for eigenvalues. Pacific J. Math. 5, 483–499 (1955).

Es sei Ω_2 ein einfach zusammenhängendes Gebiet (in der Ebene) mit beliebig oft differenzierbarer Berandung $\partial\Omega_2$. Es wird die Asymptotik der Eigenwerte des Problems: $\Delta u + \lambda u = 0$, $u|_{\partial\Omega_2} = 0$ untersucht. Durch Anwendung der folgenden Abschätzung von Pleijel (vgl. dies. Zbl. 48, 80):

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n(\lambda_n + \omega)]^{-1} = |\Omega_2| \frac{\lg \omega}{4\pi \omega} + \frac{C}{\omega} + \frac{|\partial\Omega_2|}{8\omega^{3/2}} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$$

(wobei $\omega \geq 1$, $|\Omega_2|$ das Lebesgue-Maß von Ω_2 , $|\partial\Omega_2|$ die Länge von $\partial\Omega_2$ bedeutet) beweist der Verf. die folgende Verschärfung des Weylschen Gesetzes:

$$N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_n \leq t} 1 = |\Omega_2| \frac{t}{4\pi} - |\partial\Omega_2| \frac{t^{1/2}}{4\pi} + \tilde{O}(\lg t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Genauer: Mit $F(t) \stackrel{\text{def}}{=} N(t) - [|\Omega_2| (4\pi)^{-1} t - |\partial\Omega_2| (4\pi)^{-1} t^{1/2}]$ hat man:

$$\int_{\lambda_1/2}^{\infty} \exp\left[-\frac{\varrho^2}{2} \left(\frac{\lg u}{t}\right)^2\right] dF \leq M(\lg u) \exp\left(\frac{\pi^2 \varrho^2}{2} + \frac{1}{2\varrho^2}\right)$$

für alle reellen $u \geq e$, $\varrho > 0$; wobei M eine positive Konstante bedeutet. Es wurde

auch die Unrichtigkeit einer Vermutung von Minakshisundaram (vgl. Proc. Sympos. Spectral Theory and differential Problems, Oklahoma agric. and mech. College, Stillwater, Okla., 1951, p. 325—332, insbes. p. 331) erwiesen. *K. Maurin.*

Tsuji, Masatsugu: On a positive harmonic function in a half-plane. *J. math. Soc. Japan* **7**, 76—78 (1955).

Es sei $u(z) = u(x + iy)$ in $x > 0$ regulär harmonisch und dort positiv. Auf Grund einer bekannten Darstellung von u mit Hilfe eines Stieltjesschen Integrals wird gezeigt: Es sei C ein Jordansches Kurvenstück in $x > 0$, das in den Punkt $z = 0$ mündet, und das in einem in bezug auf $x = 0$ symmetrischen Winkelraum von der Öffnung $< \pi/2$ liegt. Ist dann u beschränkt auf C , so trifft das auch in jedem Gebiet $|z| \leq 1$, $\arg z \leq q_0 < \pi/2$ zu. Daraus folgt ein bekannter Satz von Loomis [Trans. Amer. math. Soc. **53**, 239—250 (1943)] über die Existenz der Grenzwerte $\lim_{r \rightarrow 0} u(re^{i\varphi})$ gleichmäßig in jedem Winkelraum $|\arg z| < \pi/2$.

A. Dinghas.

Zoller, Konrad: Das Newtonsche Potential einer Kreisfläche. *Z. angew. Math. Mech.* **35**, 475—476 (1955).

Durch direkte Umformung der Integraldarstellung des Newtonschen Potentials einer gleichmäßig mit Masse von der Dichte 1 belegten Kreisfläche

$$V(q, z) = 2 \int_{R=0}^a \int_{\omega=0}^{\pi} \frac{R dR d\omega}{\sqrt{q^2 + z^2 + R^2 - 2Rq \cos \omega}},$$

(R, ω Polarkoordinaten in der Kreisfläche) erhält Verf. die Darstellung

$$\begin{aligned} V(q, z) = & 2 \left[(a - q) \left(\sqrt{q^2 - z^2 - a^2} \right)' / (q - a)^2 + z^2 \right] K(k) \\ & + 2 \sqrt{(q + a)^2 + z^2} E(k) + \pi z (A_0(\xi, k) - A_0(\beta, k) - 1), \\ & z \geq 0, \quad k^2 = 4a q / [(q + a)^2 + z^2], \quad \xi = \arcsin \left[(\sqrt{q^2 + z^2} - a) / (\sqrt{(q - a)^2 + z^2}) \right], \end{aligned}$$

$\beta = \arcsin \left[(\sqrt{q^2 + z^2} - q) / z \right]$, K, E die vollständigen elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung, A die vertafelte Heuman'sche Lambdafunktion. Vgl. Hj. Tallquist, dies. Zbl. **5**, 215.

O. Volk.

Mitchell, Josephine: Potential theory in the geometry of matrices. *Trans. Amer. math. Soc.* **79**, 401—422 (1955).

Let $z = (z^k)$ ($1 \leq j, k \leq n$) be a n rowed matrix with complex elements, z^* the conjugate transpose of z , and 1 the identity n -rowed matrix. Let D be the set of z such that $1 - z z^*$ is positive definite. The domain D is metricalized by $ds^2 = \sigma((1 - z z^*)^{-1} dz (1 - z^* z)^{-1} dz^*)$ where $\sigma(x)$ denotes the trace of x . This space admits a transitive group of analytic mappings. The adjoint operator

$$\Delta = \sigma((1 - z z^*) \partial_{\bar{z}} (1 - z^* z) \partial_z)$$

is isometric. A function v is defined to be harmonic, if $\Delta v = 0$. Let \mathfrak{U} be the set of all unitary matrices. Write $H(t, z^*) = \det^{-n} (1 - t z^*)$. It is known [Bochner, Ann. of Math., II. Ser. **45**, 686—707 (1944)] that $f(z) = \frac{1}{V} \int_{\mathfrak{U}} H(z, u^*) f(u) \dot{u}$ where

\dot{u} denote the volume element on \mathfrak{U} . Putting $f(z) = g(z) H(w^*, z)$ we have, by setting $w = z$, $g(z) = \frac{1}{V} \int_{\mathfrak{U}} P(z, u) g(u) \dot{u}$, where $P(z, u) = H(z, u^*) H(z^*, u) / H(z^*, z^*)$

and V is the total volume of the unitary group. This is called the Poisson's formula. The Poisson kernel $P(z, u)$ is positive for $z \in D$ and $u \in \mathfrak{U}$ and $\Delta_z P(z, u) = 0$. By means of this formula, the author treats a problem analogous to Dirichlet problem: Let $u(z)$ be a continuous function defined on \mathfrak{U} and $u(z) = u(1)$ whenever $\det(1 - z) = 0$. There exists a function $f(z)$ harmonic in D with the property $\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = u(1)$ as $t \rightarrow 1$, $t \in D$. Such a function $f(z)$ is given by $V^{-1} \int_{\mathfrak{U}} P(z, u) f(u) \dot{u}$.

There is at most one $f(z)$ which is the real part of an analytic function. She then introduces the definition of Green's and Neumann's functions of D . She determines that the Green's function is uniquely equal to $G(z, t) = 2^{-1} \log \det (1 - z t^*) (z^* - t^*)^{-1} (z - t)^{-1} (1 - t z^*)$ for $t \in D$ and $z \in \bar{D}$, and that the Neumann's function is uniquely equal to $N(z, t) = -\frac{1}{2} \log \det (z - t) (z^* - t^*) (1 - z t^*) (1 - t z^*)$.

L. K. Hua.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Krejn, M. G.: Über eine neue Methode zur Lösung linearer Integralgleichungen erster und zweiter Art. Doklady Akad. Nauk SSSR **100**, 413—416 (1955) [Russisch].

L'A. considère l'équation intégrale

$$(1) \quad \int_0^a K(x, s) \varphi(s) ds - \mu \varphi(x) = f(x), \quad (0 \leq x \leq a).$$

Si $g(x, a)$ est la solution de (1) pour $f \equiv 1$, $\Gamma_a(x, s)$ le noyau résolvant de (1),

$M(a) = \int_0^a g(s, a) ds$, $g^*(x, a)$ la solution correspondant au noyau $K(s, x)$, on trouve (théorème A) que $M'(a) = -\mu g(a, a) g^*(a, a)$ ($0 < a < A$) et que la solution de (1) pour $f \in C(0, a)$ est donné par

$$\varphi(x) = \frac{1}{M'(a)} \left[\frac{d}{da} \int_0^a g^*(s, a) f(s) ds \right] g(x, a) - \int_x^a g(x, u) \frac{d}{du} \left(\frac{1}{M'(u)} \frac{d}{du} \int_0^u g^*(s, u) f(s) ds \right) du.$$

Pour $H(t)$ mesurable dans $[0, 2A]$, si $\mu \neq 0$ est tel que l'équation

$$(2) \quad \int_{-a}^a H(|x-s|) g(s, a) ds - \mu g(x, a) = 1, \quad x \in [-a, a]$$

admet une solution unique, alors l'équation intégrale

$$(3) \quad \int_{-a}^a H(|x-s|) \varphi(s) ds - \mu \varphi(x) = f(x), \quad f \in C(-a, a),$$

admet une solution donnée (théorème B) par

$$(4) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2M'(a)} \left[\frac{d}{da} \int_{-a}^a g(s, a) f(s) ds \right] g(x, a) - \frac{1}{2} \int_x^a g(x, u) \frac{d}{du} \left(\frac{1}{M'(u)} \frac{d}{du} \int_{-a}^u g(s, u) f(s) ds \right) du - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{g(x, u)}{M'(u)} \left(\int_{-u}^u g(s, u) df(s) \right) du.$$

S. Vasilache.

Evgrafov, M. A.: Ein Analogon der Fredholmschen Theorie für Operatoren in Räumen von analytischen Funktionen und eine Verallgemeinerung eines Satzes von Poincaré über Differenzengleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR **101**, 597—599 (1955) [Russisch].

L'A. considère les opérateurs

$$A(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} K(z, t) F(t) dt, \quad A^*(\Phi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} K(t, \zeta) \Phi(t) dt,$$

$$\text{où } K(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n,k} \frac{z^k}{\zeta^{n+1}}, \quad |z| < \varrho < |\zeta|, \quad R_0 < \varrho < R_1,$$

$$\sup_{0 \leq n < \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\varepsilon_{n,k}| r^{k-n} = \vartheta_1(r), \quad \overline{\lim}_{k=0}^{\infty} |\varepsilon_{n,k}| r^{k-n} = \vartheta(r),$$

$$\sup_{R_0 < r < R_1} \vartheta_1(r) = \vartheta_1, \quad \sup_{R_0 < r < R_1} \vartheta(r) = \vartheta,$$

$A(F)$ et $A^*(\Phi)$ étant des opérateurs linéaires continus respectivement dans les espaces $\mathfrak{A}(|z| < r)$ et $\mathfrak{A}(|\zeta| > r)$. Il énonce ensuite, sans démonstration, neuf

théorèmes concernant l'existence des opérateurs inverses donnés par

$$(E + \lambda A)^{-1} F = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} R(z, t; \lambda) F(t) dt, \quad (E + \lambda A^*)^{-1} \Phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} R(t, \zeta; \lambda) \Phi(t) dt,$$

l'existence des solutions des équations homogènes

$$\varphi(z) + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{|t|=r} K(z, t) \varphi(t) dt = 0, \quad \varphi(\zeta) + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{|t|=r} K(t, \zeta) \varphi(t) dt = 0, \quad R_0 < r < R_1,$$

et l'existence des solutions de l'équation non homogène $F(z) + \lambda A(F) = G(z)$.
S. Vasilache.

Ringrose, J. R.: Compact linear operators of Volterra type. Proc. Cambridge philos. Soc. **51**, 44—55 (1955).

Soient: B un espace de Banach, B^* son dual, \mathfrak{N}^* un sous-espace de B^* qui soit total dans B^* [c. à d. que $f(x) = 0$ pour $f \in \mathfrak{N}^*$ implique $x = 0$]. Soit $\{E_\lambda\}$ une famille de projections dans B définie pour $0 < \lambda < 1$, et telle que l'on ait: (A) $E_0^* = 0$, $E_1^* = I^*$; (B) $E_\lambda^* E_\mu^* = E_\mu^* E_\lambda^* = E_\mu^*$ ($\lambda \geq \mu$); (C) $\|E_\lambda^* - E_\mu^*\| \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow \mu$ quelle que soit $f \in \mathfrak{N}^*$ (continue en λ); (D) il existe $M < \infty$ telle que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\|E_\lambda^*\| \leq M$. L'A. appelle opérateur généralisé de Volterra un opérateur A vérifiant les conditions suivantes: (i) A est un opérateur linéaire et compact de B en lui même; (ii) $A E_\lambda = E_\lambda A E_\lambda$ ($\lambda \in [0, 1]$); c. à d. que A est réductible par le sous-espace $\mathfrak{M}_\lambda = E_\lambda(B)$ ($\lambda \in [0, 1]$); (iii) $A^*(\mathfrak{N}^*) \subseteq \mathfrak{N}^*$ (c. à d. que A^* est réductible par \mathfrak{N}^*). Moyennant deux lemmes préliminaires, l'A. montre que l'opérateur A ainsi défini est quasi-nilpotent, c. à d. que $|A^n|^{1/n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (théorème 2.31). Si B est un espace de Banach, $\{E_\lambda\}$ une famille de projections dans B , définie pour $\lambda \in [0, 1]$ et telle que (A') $E_0 = 0$, $E_1 = I$; (B') $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\mu$, ($\lambda \geq \mu$) (C') ($f \in B$, $\lambda \in [0, 1]$) $\Rightarrow \|(E_\mu - E_\lambda)f\| \rightarrow 0$ lorsque $\mu \rightarrow \lambda$; (D') il existe $M < \infty$ telle que $\|E_\lambda\| \leq M$ pour $\lambda \in [0, 1]$. Dans ces conditions si A est un opérateur compact, tel que $A E_\lambda = E_\lambda A E_\lambda$, ($\lambda \in [0, 1]$), alors A est quasi-nilpotent (théorème 2.4). Si A est un opérateur linéaire et compact de $L^p(a, b) \rightarrow L^p(0, 1)$ tel que pour tout $c \in]0, b[$ et $f \in L^p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$, la

condition $\int_a^c |f(x)|^p dx = 0$ implique $\int_0^c |A f(x)|^p dx = 0$ alors A est quasi-nilpotent (théorème 3.12). Si $\kappa(x, t)$ est un noyau tel que

$$\int_a^b dx \left(\int_a^x |\kappa(x, t)|^q dt \right)^{p/q} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{et où pour } p = 1, \quad \left(\int_a^x |f(t)|^q dt \right)^{1/q} \text{ est considérée comme } \inf \{M: |f(t)| \leq M \text{ p. p. t. dans } [a, x]\},$$

alors, si $g(x) \in L^p(a, b)$ l'équation intégrale $f(x) = g(x) + \mu \int_a^x \kappa(x, t) f(t) dt$ admet dans $L^p(a, b)$ une solution unique donnée par

$$f(x) = g(x) + \mu \int_a^x \kappa^{(1)}(x, t) g(t) dt + \mu^2 \int_a^x \kappa^{(2)}(x, t) g(t) dt + \dots$$

la série étant convergente en moyenne d'ordre p , presque partout et où

$$\kappa^{(1)}(x, t) = \kappa(x, t), \quad \kappa^{(n)}(x, t) = \int_t^x \kappa(x, y) \kappa^{(n-1)}(y, t) dy. \quad \text{D'autres théorèmes con-}$$

cernant la solution de l'équation intégrale (x) $f(x) = g(x) + \lambda \int_0^x \kappa(x-t) f(t) dt$ qui, pour $g(x) \in L^p(0, 1)$ et $\kappa(x) \in L(0, 1)$ admet une solution unique $f \in L^p(0, 1)$ (théorème 4.22) et pour $g; \kappa \in L(0, \infty)$, il existe une valeur de λ pour laquelle l'équation (x) n'admet pas de solution $f(x) \in L(0, \infty)$.
S. Vasilache.

Schaefer, Helmut: Neue Existenzsätze in der Theorie nichtlinearer Integralgleichungen. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturwiss. Kl. **101**, Nr. 7, 40 S. (1955).

This paper makes a partial survey of a number of problems in the theory of non-linear integral equations. Further it states and proves certain new existence theorems. A first section introduces the fixed point theorem of Tychonoff and some of its well known applications to the theory of functional equations. By means of a very elementary lemma the author gives a simple proof of the known theorem that the functional equation $x - \lambda F(x) = 0$, where F is a completely continuous mapping of a Banach space into itself, has at least one solution for every $\lambda \in [0, 1]$ provided there exists an a priori limitation of its possible solutions for $0 < \lambda < 1$. The second section is devoted to non linear integral equations of types already studied by Hammerstein [Acta math. **54**, 117—176 (1930), Iglisch (this Zbl. **6**, 313) and Jentzsch [J. reine angew. Math. **141**, 135—146 (1912)]. Two interesting existence theorems are obtained in the case of a positive kernel and also, in a particular case, a uniqueness theorem. These are the main results of this paper. A short mention is made of the case of a singular kernel and a theorem, generalizing to a certain extent, a theorem of Schauder [Studia math. **2**, 171—180 (1930)] is proved. The third section treats summarily of algebraic integral equations in the sense of Schmeidler (this Zbl. **47**, 101). The particular case of equations of the Volterra type are considered. It is only under very restrictive conditions that existence theorems are obtained. Equations of the form

$$\Phi(x) = \int_{\Omega} K(x, y) \sum_{v=0}^m c_v(y) \Phi^v(y) dy$$

are solved, under certain conditions, by a skilful method of successive approximations
C. Racine.

Citlanadze, E. S.: Untersuchung einer Klasse nicht-linearer Integralgleichungen durch ein topologisches Analogon der direkten Methoden. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze **21**, 125—143 (1955) [Russisch].

Par une méthode analogue à celle d'un travail antérieur (v. ce Zbl. **52**, 348), l'A. étudie une équation de la forme $f(r, x(r), I_1, \dots, I_n, \dots) = \lambda |x(r)|^{p/q} \text{sign } x(r)$, où

$$I_n = \int_0^1 \dots \int_0^1 K_n(r, t_1, \dots, t_n, x(t_1), \dots, x(t_n)) dt_1 \dots dt_n$$

et f est une opération de L_p à L_q , satisfaisant à certaines conditions lipschitziennes, de différentiabilité et de positivité. On démontre l'existence d'une infinité de solu-

tions sur la sphère unité de L_p . On utilise la fonctionnelle $F(x) = \int_0^1 \langle x, f(t x) \rangle dt$, dont f est le gradient, et les solutions de l'équation différentielle $dx/dt = N^{-1} f(x) - \langle N x, N^{-1} f(x) \rangle$, où $N x(r) = |x(r)|^{p/q} \text{sign } x(r)$.
G. Marinescu.

Vasil'ev, V. V. : Lösung des Cauchyschen Problems für eine Klasse linearer Integro-Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR **100**, 849—852 (1955) [Russisch].

Faisant suite à son étude antérieur (ce Zbl. **45**, 375) l'A. étudie le problème de Cauchy pour l'équation

$$(1) \quad \sum_{i=0}^n z^{(n-i)}(x) a_i(x) + \lambda \int_a^b \sum_{v=0}^m K_v(x, y) z^{(v)}(y) dy = 0.$$

Ce même problème a été résolu auparavant par divers auteurs: V. I. Nikolenko (ce Zbl. **49**, 80); T. L. Vigranenko [Zapisk. Leningradsk. gorn. Inst. **26**, 141 (1952)]; S. Vasilache (ce Zbl. **45**, 54). La solution générale de (1) étant

donnée par

$$(2) \quad z(x) = \sum_{i=1}^n C_i z_i(x) + \int_{x_0}^x \frac{1}{\Delta(\eta)} \left[\sum_{i=1}^n \Delta_i(\eta) z_i(x) \right] F(\eta) d\eta$$

avec $(z_i(x))_{1 \leq i \leq n}$ système fondamental de $\sum_{i=1}^n a_i(x) z^{(n-i)}(x) = 0$; $(\Delta_i(\eta))_{1 \leq i \leq n}$ mineurs du wronskien $\Delta(\eta)$ et $F(\eta)$ solution de

$$(3) \quad F'(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{v=0}^m G_v(y) K_v(x, y) - \int_x^y \sum_{v=0}^m H_v(\eta, y) K_v(x, y) F(\eta) \frac{d\eta}{\Delta(\eta)} \right] dy = 0$$

où $G_v(y) = \sum_{i=1}^n C_i z_i^{(v)}(y)$; $H_v(\eta, y) = \sum_{i=1}^n \Delta_i(\eta) z_i^{(v)}(y)$. En appliquant la méthode de Fredholm à l'équation (3) l'A. montre que si λ n'est pas racine du déterminant de Fredholm correspondant, le problème de Cauchy pour (4) admet une solution unique (théorème 1). Si λ est racine de ce déterminant de rang q , le problème de Cauchy pour l'équation (1) dépend de q constantes arbitraires (théorème 2).

S. Vasilache.

● Pol. Balth. van der and H. Bremmer: **Operational calculus based on the two-sided Laplace integral**. 2nd ed. Cambridge: At the University Press 1955. XIII, 415 p. 60 s. net.

Die erste Auflage dieses Buches wurde in dies. Zbl. 40, 204 ausführlich besprochen. Die zweite Auflage unterscheidet sich von ihr nur durch Verbesserung kleinerer Versehen. Die in der obigen Besprechung angeführten grundlegenden mathematischen Unzulänglichkeiten treten unverändert auch in der zweiten Auflage auf.

G. Doetsch.

● Herschel, Rudolf (zusammengestellt von): **Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung in der Regelungstechnik** (Beihefte zur „Regelungstechnik“ Nr. 1). Vorträge, gehalten bei einer Tagung d. Gesellsch. f. angew. Math. u. Mech. (GAMM), Fachausschuß Regelungsmathematik, in Essen vom 6. - 8. 10. 1954. München: Verlag R. Oldenbourg 1955. 142 S., 64 Abb. Hlw. DM 12,80.

Zweck der Vortragsreihe ist, den Regelungstechnikern eine einfache Einführung in die Laplace-Transformation und ihre Anwendung zur Lösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen zu geben. Ein im Einführungsvortrag gegebenes Beispiel wird nach einer übersichtlichen und klaren Herleitung der Laplace-Transformation von den einzelnen Vortragenden zur Einübung zahlenmäßig durchgerechnet, wobei es nicht zu vermeiden ist, daß sich die Darstellungen teilweise überschneiden. Diese unterscheiden sich aber oft in der Einstellung zum Thema, wobei vielfach die den Hörern gebräuchliche Sprache der Elektrotechnik (Frequenzgang, Gegenkopplung u. ä.) benutzt wird. Einige Vorträge gehen über das anfängliche Beispiel hinaus, indem sie neue Effekte, z. B. den Einfluß einer Laufzeit oder einfache nichtlineare Regelglieder erfassen. Neue Ergebnisse findet der Leser in dem Buch nicht, was aber auch nicht beabsichtigt ist. Im einzelnen handelt es sich um folgende Vorträge:

W. Oppelt: Ableitung der Gleichungen eines Regelvorganges aus dem technischen Aufbau einer Regelanlage. G. Doetsch: Einführung in die Laplace-Transformation. R. Herschel: Einüben der Laplace-Transformation an Beispielen (Einzelne Gleichungen). St. Schottlaender: Einüben der Laplace-Transformation an Beispielen (Systeme von Differentialgleichungen). J. Dörr: Einüben der Laplace-Transformation an einem komplizierteren Beispiel. A. Leonhard: Die Frequenzgangdarstellung, gezeigt an einem Beispiel eines Regelvorganges. O. Schäfer: Die Laplace-Transformation, angewandt auf das Beispiel eines Regelvorganges. K. Küpfmüller: Regelvorgänge mit Laufzeit. R. C. Oldenbourg: Anwendung der Laplace-Transformation bei abschnittsweise linearen Regelvorgängen. H. F. Schwenkhagen: Zur anschaulichen Deutung der Laplace-Transformation. J. Peters: Behandlung des Regelkreises mit den Methoden der Nachrichtentechnik.

H. Molitz.

Toscano, Letterio: Nuove regole di calcolo simbolico. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 541—543 (1955).

Für die Laplace-Transformation $\varphi(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$, symbolisch $f(t) \supset \varphi(p)$, und für die mit der Whittakerschen Funktion $W_{k,m}(x)$ gebildete Meijer-Transformation gilt die Regel ($D_t = d/dt$):

$$t^n (1-u) (t^u D_t)^n f(t) \supset (-1)^n (p^u D_p)^{n-1} p^{n-(n-1)u} D_p \varphi(p).$$

G. Doetsch.

Stanković, B.: Inversion et invariants de la transformation généralisée de Hankel. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 8, 37—52 (1955).

Die Transformation $G(x) = \int_0^\infty \Phi(\mu+1, \nu; -x^\nu y) y^\mu g(y) dy$ mit dem Kern $\Phi(\mu, \nu; z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(\mu+\nu k)}$, die für $\nu=1$ mit der Hankel-Transformation zusammenfällt, läßt sich umkehren durch

$$x^{\mu+1} (y-1)^{1/\nu} g(x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{\mu+1}{\nu}, \frac{1}{\nu}; -x^{1/\nu} y\right) y^\mu G(y) dy,$$

wenn dieses Integral konvergiert und $x^\mu g(x)$ eine Laplace-Transformierte besitzt. Ferner werden explizite Darstellungen der Invarianten der Transformation angegeben.

G. Doetsch.

Gardner jr., A. O.: Functions completely monotonic with respect to a sequence. Proc. Amer. math. Soc. 6, 919—928 (1955).

Es sei a_1, a_2, \dots eine Folge von reellen Zahlen $\neq 0$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = \infty$ und $\{A_k\}_{-m}^n$ eine Teilfolge $A_{-m} < \dots < A_{-1} < 0 < A_1 < \dots < A_n$. Eine Funktion $f(x)$ heißt vollmonoton (A) bezüglich der Folge a_k im Intervall $a < x < b$, wenn

$$g_{m,n}(x) = \sum_{-m}^n \left(1 - \frac{D}{A_k}\right) f(x) \geq 0 \text{ für alle Teilfolgen } \{A_k\}_{-m}^n \text{ ausfällt. (Es wird noch}$$

eine zweite, hiermit äquivalente Definition angegeben.) Satz: Die Funktionen $u_1(x), u_2(x), \dots$ seien vollmonoton (A) in $-\infty < x < +\infty$. Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ gegen eine Funktion $f(x)$ in $-\infty < x < +\infty$ konvergiert, so ist $f(x)$ vollmonoton (A). Satz: Die Folge $u_n(x)$ konvergiere gegen eine Grenzfunktion $f(x)$. Jedes $u_n(x)$ sei darstellbar als Faltungstransformierte mit einem total positiven, aus den a_k konstruierten Kern $G(t)$ (siehe I. I. Hirschman und D. V. Widder,

dies. Zbl. 35, 193): $u_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t) d\beta_n(t)$, und es sei $f(x) = o(e^{\alpha x})$ für $x \rightarrow \infty$ mit $\alpha = \min a_k$. Dann gibt es eine nichtabnehmende Funktion $\beta(t)$, so

daß $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t) d\beta(t)$ in $-\infty < x < +\infty$ ist. G. Doetsch.

Henstock, R.: The efficiency of convergence factors for functions of a continuous real variable. J. London math. Soc. 30, 273—286 (1955).

In der Arbeit werden Integraltransformationen $S(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^\omega a(x, u) ds(u)$ betrachtet und genaue Bedingungen für die Permanenz [d. h. $\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \lim_{u \rightarrow \infty} s(u) - s(0)$, falls die rechte Seite existiert] angegeben (Theorem 3). — Um von $s(u)$ nur Beschränktheit und Borel-Meßbarkeit vorauszusetzen, wird das Integral definiert durch

$$(*) \quad \int_\alpha^\beta f(u) ds(u) = f(\beta) s(\beta) - f(\alpha) s(\alpha) - \int_\alpha^\beta s(u) df(u),$$

wo ganz rechts das von Ward (dies. Zbl. 14, 397) eingeführte Perron-Stieltjes-Integral steht. Diese Definition wird herangezogen, da Funktionen $s(u)$ mit obigen Eigenschaften existieren, für die $\int_{\alpha}^{\beta} f(u) ds(u)$ nur für konstante Funktionen $f(u)$ als Ward-Perron-Stieltjes-Integral existiert (Theorem 1). Ist $\overline{f(u)}$ von beschränkter Schwankung in $\alpha \leq u \leq \beta$ und gilt $\lim_{v \rightarrow u} f(v) \leq f(u) \leq \lim_{v \rightarrow u} f(v)$, so existiert das Integral (*) (Theorem 2).

A. Peyerimhoff.

News, W. F.: A Fourier integral theorem for functions of intervals. Proc. Amer. math. Soc. 6, 816—822 (1955).

Using the notion of the integral of functions of intervals due to Burkhill [Proc. London math. Soc., II. Ser. 22, 275—310 (1924)], the author proves the analogue of the Plancherel theorem for the Fourier transform of functions of intervals. A function $u(I)$ of intervals defined on the subintervals of $(0, \infty)$ is said to belong to class B^2 if u is integrable over any finite interval in $(0, \infty)$ and if the upper integral

$\int_0^A \frac{|u(I)|^2}{|I|} dA$ is bounded as $A \rightarrow \infty$. For such functions, it is proved that the integral $\sqrt{2/\pi} \int_0^a \cos xt u(I) dI$ (which can be defined in a natural way) has a limit in the

mean $g(x)$ as $a \rightarrow \infty$ in the class $L^2(0, \infty)$. Moreover $\int_0^\infty |g(x)|^2 dx \leq \int_0^\infty \frac{|u(I)|^2}{|I|} dI$.

Also if h is the usual cosine transform of g , then $\int_0^x u(I) dI = \int_0^x h(t) dt$ and $h(x) = u'(x)$ where $u'(x)$ a. e. is the derivative of the interval function $u(I)$. V. Ganapathy Iyer.

Magnus, Wilhelm: A Fourier theorem for matrices. Proc. Amer. math. Soc. 6, 880—890 (1955).

Die Elemente $f_{v,\mu}(t)$ der Matrix $F(t) = (f_{v,\mu}(t))$, $v, \mu = 1, \dots, n$, mögen von dem Parameter t abhängen, der in $-\infty < t < +\infty$ variiert, und die Bedingung $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_{v,\mu}(t)| dt < \infty$ erfüllen. Wenn H eine Hermitesche Matrix mit n Reihen und

Kolonnen ist, so existiert $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \exp(itH) dt = G(H)$, und es gilt die Um-

kehrung $\int_S G(H) \exp(-itH) d\tau = L_n F(t)$, wo S der Raum der H , $d\tau$ das Volumenelement und L_n ein nur von n , aber nicht von H und F abhängiger Skalar ist. Dieser Satz läßt sich durch ein Analogon zum Plancherelschen Theorem ergänzen.

G. Doetsch.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Senft, Walter: Über die Einführung des Kongruenzbegriffes in der Theorie der linearen Räume. Commentarii math. Helvet. 30, 73—97 (1955).

The paper analyses the notion of congruence to be imposed, as an equivalence relation, on a general linear vector space L over the real field by a short set of postulates of a constructive nature that in turn are motivated by geometrical desirability. Thus one principal aim is to secure in L the validity of Hilbert's axioms for Euclidean space. A second aim is to characterize those congruences which lead to a metric describable by a symmetric bilinear form as their fundamental form (compare R. Nevanlinna, this Zbl. 46, 122). Let the elements and real scalars of L be denoted by small Roman or Greek letters, respectively. Of the three main postulates for the congruence \cong the first two are: (I). $x \cong z$, $y \cong z \Rightarrow x \cong y$; $x \cong -x$;

and (II). $x \perp y \Rightarrow \lambda x \perp y$. Here $x \perp y$ means $x - y \cong x + y$. If in the 2-dimensional case L_2 one adds (a). $x \cong 0 \rightarrow x = 0$ and (b). $e \cong 0 \Rightarrow x \cong \xi e$ for a suitable ξ , then these 4 postulates characterize the Hilbert congruences. Again in L_2 , the third main postulate (III) stipulates the existence of a basis of congruence, that is of three congruent elements a, b, c such that a and b generate L_2 , and c is different from $\pm a$ and $\pm b$. (I), (II), (III) secure in L_2 the existence of a fundamental form Φ for the congruence, that is of a symmetric bilinear form $\Phi(x, y)$ such that $x \cong y$ is equivalent to $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$. Conversely, any symmetric bilinear form Φ is fundamental for such a congruence. If one adds the postulate (a), then there exists a definite or semi-definite fundamental form for the congruence. As for a general (even infinitely dimensional) real space L the postulates (I) and (II) together with (III*): If $u \neq 0$, then there exists, for every x , exactly one representation $x = \lambda u + h$ with $h \perp u$ (normal projection of x on u), characterise a Hilbert congruence in L . Every Hilbert congruence has a definite fundamental form, and every definite bilinear form in L is fundamental for such a congruence. Some of the results hold for spaces L over certain more general scalar fields.

W. W. Rogosinski.

Kadec, M. I.: Über die topologische Äquivalenz gleichmäßig konvexer Räume. Uspechi mat. Nauk **10**, Nr. 4 (66), 137—141 (1955) [Russisch].

It is proved that arbitrary uniformly convex separable Banach spaces are homeomorphic.

R. Sikorski.

Iséki, Kioshi and Shouro Kasahara: Some properties of convex sets in linear spaces. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A **3**, 238—242 (1955).

Bekanntlich lassen sich zwei disjunkte konvexe Teilmengen eines reellen linearen Raumes in zwei ebenfalls disjunkte konvexe Teilmengen einbetten, deren Vereinigung der ganze Raum ist. Verf. geben dafür einen Beweis, der sich bereits bei N. Bourbaki [Espaces vectoriels topologiques (vgl. dies. Zbl. **50**, 107), Chap. II, p. 53, Ex. 3] findet. Für den Trennungssatz konvexer Körper in lokalkonvexen Vektorräumen wird ein Beweis gegeben, der eine Übertragung eines Beweises von T. Botts für den Fall normierter Räume ist.

G. Köthe.

James, Robert C.: Projections in the space (m) . Proc. Amer. math. Soc. **6**, 899—902 (1955).

Es werden zwei Sätze über die Existenz abgeschlossener Komplementäräume zu Teilräumen des Raumes (m) der beschränkten Folgen bewiesen: (1) Ist M ein separabler Teilraum von (m) und P eine Projektion von (m) auf M , so ist $\|P\| > 1$. (2) Besitzt der separable Banachraum M in (m) einen abgeschlossenen Komplementärraum und existiert in M eine unbedingte Basis, so ist M reflexiv.

G. Köthe.

Isbell, J. R.: Birkhoff's problem 111. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 217—218 (1955).

Ein Problem von G. Birkhoff [Lattice theory, rev. ed. (vgl. dies. Zbl. **33**, 101), p. 266] beantwortend beweist Verf. folgenden Satz: Es bedeute \mathbf{X} den Banachschen Raum der unendlichen Matrizen $A = (a_{ik})$ ($i, k = 1, 2, \dots$) mit der Norm $\|A\| =$

$\sup_{1 \leq i < \infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \right)$. Es sei \mathbf{P} die Menge aller Permutationsmatrizen, d. h. Matrizen $A \in \mathbf{X}$, in denen jeder Zeile und jeder Spalte eine und nur eine 1 steht und alle anderen Elemente gleich 0 sind. Es bedeute \mathbf{D} die Menge aller Matrizen $A \in \mathbf{X}$, die Grenzwerte von Folgen $A_n = \sum_{k=1}^n p_{nk} P_k$ sind, wo $\sum_{k=1}^n p_{nk} = 1$, $p_{nk} > 0$, und $P_k \in \mathbf{P}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ist. Dann ist \mathbf{D} identisch mit der Menge aller Matrizen $A = (a_{ik})$, $A \in \mathbf{X}$, die doppelt stochastisch sind (d. h. $a_{ik} \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} = 1$ für $i, k = 1, 2, \dots$) und der folgenden Bedingung genügen: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es

eine ganze Zahl $n = n(\varepsilon)$, so daß in jeder Reihe und in jeder Spalte von A die Summe der n größten Glieder $\geq 1 - \varepsilon$ ist. A. Rényi.

Najmark, M. A. und S. V. Fomin: Stetige direkte Summen Hilbertscher Räume und einige ihrer Anwendungen. Uspechi mat. Nauk 10, Nr. 2 (64), 111—142 (1955) [Russisch].

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine Übersicht über die Theorie der kontinuierlichen Summe von Hilberträumen und deren Anwendungen zu geben. Die Arbeit besteht aus sieben Abschnitten. Um die Notwendigkeit der Einführung dieses Begriffes klarzumachen, wird in § 1 ein kurzer Bericht über die Probleme der Darstellungstheorie der topologischen Gruppen gegeben. Die geschichtlichen Angaben der Verff. betreffend gilt es hervorzuheben, daß der in Frage stehende Begriff unabhängig von v. Neumann (seine Theorie stammt aus dem Jahre 1938, publiziert wurde sie jedoch erst 1949) auch von Kolmogorov 1944 gefunden und auf die Auflösung von unitären Darstellungen diskreter Gruppen in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen angewendet wurde. Er hat auch auf die Nichteindeutigkeit dieser Auflösung mit Beispielen hingewiesen. Seine diesbezüglichen Resultate wurden jedoch nicht veröffentlicht. Derselbe Begriff kommt auch in den Arbeiten von I. M. Gelfand und M. A. Najmark häufig vor, und es wurde das Auflösungsproblem von unitären Darstellungen durch sie z. B. für den Fall der Lorentzgruppe mit Erfolg behandelt. § 2 gibt die Definition der kontinuierlichen Summe von Hilberträumen, wo aber die Summanden gleicher Dimension von vornherein identifiziert werden. In § 3 wird das Problem der Diagonalisierung eines gegebenen Abelschen Ringes P behandelt. Man beweist auch die Zerlegbarkeit der zum Kommutanten P' gehörigen Operatoren. § 4 behandelt die Auflösung eines Hilbertraumes in eine kontinuierliche Summe bezüglich eines Abelschen Unterringes P des Kommutanten \mathfrak{A}' einer Operatorfamilie \mathfrak{A} . Mit Gedankengängen, die mit den v. Neumannschen vieles gemeinsam haben, wird bewiesen, daß, falls P maximal ist und $\mathfrak{A} \sim \sum \mathfrak{A}(\lambda)$, die Operatorfamilien $\mathfrak{A}(\lambda)$ für fast alle λ irreduzibel sind. Es wird auch die umgekehrte Behauptung formuliert, die aber leicht zu widerlegen ist [vgl. den entsprechenden Fehler in dem Beweiskgang auf S. 127: Aus der für ein $A \in \mathfrak{A}$ und B mit Ausnahme einer von A abhängenden Nullmenge gültigen Identität $A(\lambda) B(\lambda) = B(\lambda) A(\lambda)$ folgt keineswegs die Existenz einer Menge von positivem Maß, auf dem diese Gleichung für alle $A \in \mathfrak{A}$ gleichzeitig erfüllt wird]. In § 5 wird dieser Satz zum Beweis der Behauptung benutzt, daß für eine unitäre Darstellung U_g einer lokalkompakten Gruppe mit dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom eine Auflösung des entsprechenden Hilbertraumes und irreduzible unitäre Darstellungen $U_g(\lambda)$ derart angegeben werden können, daß für fast alle $g \in G$ $U_g \sim \sum U_g(\lambda)$ gilt; der Beweiskgang scheint jedoch an mancher Stelle unvollständig zu sein. § 6 behandelt die Zerlegung eines invarianten Maßes in ergodische Bestandteile. Endlich wird in § 7 bewiesen, daß ein unitärer Ring im Sinne von Rochlin im wesentlichen als der Raum aller quadratisch integrierbarer Funktionen über einem passend gewählten Maßraum realisiert werden kann. L. Pukánszky.

Brownell, F. H.: Fourier analysis and differentiation over real separable Hilbert space. Pacific J. Math. 5, 649—662 (1955).

Soit $X_0 = \{x \in l_2 | -h_n < x_n < h_n, \sum_{n=N+1}^{\infty} h_n^2 < \infty\}$. L'A. transforme cet ensemble en un groupe localement compact dont la mesure de Haar coïncide avec la mesure construite d'une manière directe dans un travail antérieur (ce Zbl. 47, 108). Le groupe des caractères est isomorphe à $Z_0 = \{z \in l_2 | z_n = \pi p_n / h_n \text{ avec } p_n \text{ entier pour } n \geq N+1\}$. Les espaces des fonctions à valeurs complexes et de carré sommable, définies sur X_0 , resp. sur Z_0 sont isomorphes par la transformation de Fourier. On démontre que les formules relatives à la dérivation partielle sont

valables dans ce cadre, ce qui permet à l'A. de définir un laplacien pour les fonctions d'une infinité de variables. *G. Marinescu.*

Schwartz, Laurent: Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles. *J. Analyse math.* **4**, 88—148 (1955).

In Verallgemeinerung der vom Verf. in der Theorie der Distributionen betrachteten Räume E^m , D^m , S , O_M wird eine Klasse von Räumen H^m betrachtet, deren Elemente komplexwertige, m -mal ($0 \leq m \leq \infty$) stetig differenzierbare Funktionen auf dem R^n sind und die die folgenden Voraussetzungen erfüllen: 1. Es gibt eine Klasse Γ stetiger Funktionen γ auf dem R^n , so daß für jede kompakte Teilmenge K des R^n wenigstens ein γ existiert, das auf K nirgends verschwindet; H^m ist dann die Menge aller $\varphi \in E^m$ (Raum aller auf dem R^n m -mal stetig differenzierbaren Funktionen), für die alle $\gamma D^p \varphi$ mit $|p| \leq m$ für alle $\gamma \in \Gamma$ beschränkte Funktionen bleiben; es ist also $D^m \subset H^m \subset E^m$, wobei D^m der Raum der m -mal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger ist; 2. H^m ist lokalkonvex und die Einbettungen von D^m in H^m und von H^m in E^m sind stetig; 3. Eine Teilmenge B von H^m ist dann und nur dann beschränkt, wenn für jedes $\gamma \in \Gamma$ die Menge der Zahlen $\gamma(x) D^p \varphi(x)$, $|p| \leq m$, $x \in R^n$, $\varphi \in B$, beschränkt ist; 4. Auf jeder beschränkten Menge von H^m fällt die Topologie von H^m mit der durch E^m induzierten Topologie zusammen. — Jedes H^m ist quasivollständig, D^m , E^m , S , O_M sind sogar vollständig. Ausgehend von den H^m werden nun Räume $\tilde{H}^m(E)$ von Funktionen φ auf R^n mit Werten in einem quasivollständigen lokalkonvexen Raum E erklärt. Der Raum $E^n(E)$ ist erklärt als der Raum aller m -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf R^n mit Werten in E , $D^m(E)$ ist der Teilraum aller Funktionen mit kompaktem Träger. $\tilde{H}^m(E)$ besteht nun aus allen Funktionen φ von $E^m(E)$, für die alle skalaren Funktionen $\langle \varphi, e' \rangle$, $e' \in E'$ (dualer Raum zu E) in H^m liegen. Nach Grothendieck folgt aus der m -mal stetigen Differenzierbarkeit der $\langle \varphi, e' \rangle$ nur die $(m-1)$ -mal stetige Differenzierbarkeit von φ , so ist z. B. $D^m(E)$ ein echter Teilraum von $\tilde{D}^m(E)$. Es wird eine lokalkonvexe Topologie auf den $\tilde{H}^m(E)$ eingeführt, sie sind alle quasivollständig und sogar vollständig, wenn H^m und E vollständig sind. Mit Hilfe der Grothendieckschen Theorie der Tensorprodukte läßt sich $\tilde{H}^m(E)$ auch deuten als die quasivollständige Hülle des Tensorproduktes $H^m \otimes E$, auf dem als Topologie die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Produkten $K' \times H'$ zu nehmen ist, K' bzw. H' die gleichstetigen Mengen aus $(H^m)'$ bzw. E' . Der duale Raum $(H^m)'$ ist ein Raum von gewöhnlichen Distributionen. Es lassen sich nun auch Distributionen mit Werten in E erklären. Ist $\varphi \in \tilde{H}^m(E)$ und T eine Distribution aus $(H^m)'$, so gibt es ein und nur ein Element $T(\varphi) \in E$, so daß $\langle T(\varphi), e' \rangle = T(\langle \varphi, e' \rangle)$ ist für alle $e' \in E'$. Man erhält diese Vektordistribution durch Fortsetzung der durch $T \otimes I$ (I Identität) auf $H^m \otimes E$ erklärten linearen Abbildung mit Werten in E . Die Eigenschaften dieser Vektordistributionen werden genau untersucht. Ein Raum $\tilde{H}^m(E)$ läßt sich auch charakterisieren als isomorph zum Raum der stetigen linearen Abbildungen von E' in H^m , wobei auf E' die Topologie der kompakten Konvergenz zu nehmen ist. Es werden Beispiele und Anwendungen der Theorie gegeben, speziell auf die Faltung von Funktionen und Distributionen. Schließlich wird ein ausführlicher Beweis für das „Théorème des noyaux“ gegeben, das besagt, daß sich jede stetige lineare Abbildung des Raumes D_x der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in den Raum D_y der Distributionen durch einen Kern, d. h. eine Distribution in den beiden Variablen x, y , erzeugen läßt.

G. Köthe.

König, Heinz: Multiplikation und Variablentransformation in der Theorie der Distributionen. *Arch. der Math.* **6**, 391—396 (1955).

Es wird gezeigt, daß die Existenz eines δ -Elementes in einem linearen Erweiterungsraum E des Raumes F aller stetigen reellen Funktionen auf der Zahlenge-

raden R mit dem Vorhandensein einer Multiplikation \circ in E unter gewissen Voraussetzungen unverträglich ist. Während L. Schwartz in einem ähnlichen Satz eine unbeschränkt ausführbare assoziative Multiplikation betrachtete, stützt sich der Verf. auf Annahmen über das Verhalten von \circ bei Variablentransformationen, die ein eingeschränktes Assoziativ- und Kommutativgesetz nach sich ziehen. Im einzelnen lauten die Voraussetzungen: I. Die Differentiation $f \rightarrow f'$ stetig differenzierbarer Funktionen in F ist linear auf E fortgesetzt. II. \circ ist eine bilineare Abbildung einer Teilmenge \mathfrak{M} von $E \times E$ in E , die das gewöhnliche Produkt fortsetzt; $(f, \alpha) \in \mathfrak{M}$, wenn f in F unbeschränkt differenzierbar und $\alpha \in E$ ist, und $1 \circ \alpha = \alpha$; ist f in F unbeschränkt differenzierbar und $(\lambda, \beta) \in \mathfrak{M}$, so auch $(f \circ \alpha, \beta) \in \mathfrak{M}$ und $(\lambda, f \circ \beta) \in \mathfrak{M}$; $(\lambda', \beta) \in \mathfrak{M}$ und $(\lambda, \beta') \in \mathfrak{M}$ sind gleichwertig und implizieren $(\lambda, \beta) \in \mathfrak{M}$ und $(\lambda \circ \beta)' = \lambda' \circ \beta + \lambda \circ \beta'$. III. Jede umkehrbar eindeutige unbeschränkt stetig differenzierbare Abbildung Φ von R auf sich erzeugt eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung $\bar{\Phi}$ von E auf sich mit $\bar{\Phi}^{-1} = \overline{\Phi^{-1}}$; ist $f \in F$ und $\xi \in R$, so $(\bar{\Phi} f)(\xi) = f(\Phi(\xi))$; aus $(\lambda, \beta) \in \mathfrak{M}$ folgt $(\bar{\Phi} \lambda, \bar{\Phi} \beta) \in \mathfrak{M}$ und $\bar{\Phi}(\alpha \circ \beta) = \bar{\Phi} \alpha \circ \bar{\Phi} \beta$; $(\bar{\Phi} \lambda)' = \bar{\Phi}' \circ \bar{\Phi} \lambda'$ für jedes λ in E . Unter diesen Annahmen gibt es kein Element δ , so daß $(f', \delta) \in \mathfrak{M}$ für jedes f aus F und $x \circ \delta = 0$, wobei x die identische Abbildung von R auf sich ist. Hieraus folgt u. a., daß die I und II erfüllende Multiplikation in der vom Verf. konstruierten Erweiterung des Raums der Distributionen (dies. Zbl. 64, 113) nicht die Eigenschaft III haben kann, weil dort das Produkt zweier Distributionen unbeschränkt ausführbar ist.

K. Krickeberg.

Smiley, M. F.: Right annihilator algebras. Proc. Amer. math. Soc. 6, 698–701 (1955).

F. Bonsall und A. Goldie (dies. Zbl. 55, 106, 338) gaben eine Charakterisierung der Banachalgebren $F(X)$, die aus den endlichdimensionalen Endomorphismen eines reflexiven Banachraumes X und ihren gleichmäßigen Limites bestehen. Dieses Resultat wird auf beliebige Banachräume übertragen: Eine Banachalgebra A erfülle die Bedingungen (1) Ist die abgeschlossene Hülle eines Linksideals I von A verschieden, so ist der rechte Annihilator $I_r \neq 0$, (2) Zu jedem $a \in A$ mit $\|a\| = 1$ und jedem $0 < \varepsilon < 1$ gibt es ein geeignetes $a^\# \in A$ mit $\|a^\#\| = 1$ und $\| (a a^\#)^n \| \geq (1 - \varepsilon)^n$ für jedes ganze positive n . Ein solches A ist die vollständige Hülle der direkten Summe seiner minimalen zweiseitigen Ideale, die jedes für sich (1) und (2) erfüllen und isomorph und isometrisch einem geeigneten $F(X)$ sind. Umgekehrt ist $F(X)$ für beliebiges X eine einfache Banachalgebra, die (1) und (2) erfüllt.

G. Köthe.

Wermer, John: Maximal subalgebras of group-algebras. Proc. Amer. math. Soc. 6, 692–694 (1955).

Verf. behandelt die Frage, wann eine gewisse Unter algebra des Gruppenringes L einer diskreten abelschen totalgeordneten Gruppe G (L ist die Banach-Algebra aller derjenigen Funktionen f auf G , für die $\sum_{x \in G} |f x| < \infty$, mit Faltung als Produktbildung) maximal ist. L^+ bezeichne die Menge aller $f \in L$, die bei allen $x < 0$ in G verschwinden. Satz: L^+ ist eine maximale Unter algebra von L , wenn G archimedisch ist, und umgekehrt. Beim Beweis der Maximalität von L^+ wird benutzt, daß es zu beliebigem Element b einer Banach-Algebra B ohne Inverses stets einen Homomorphismus χ von B in die komplexen Zahlen mit $\chi b = 0$ gibt (Gelfand), sowie ein Satz von Šilov, nach dem jeder Homomorphismus χ' einer abgeschlossenen selbstadjungierten Teilalgebra B' einer Banach-Algebra B stets auf ganz B fortgesetzt werden kann. Zum Beweis der Umkehrung werden keine besonderen Hilfsmittel benötigt. — Verf. weist darauf hin, daß I. M. Singer ebenfalls diesen Satz bewiesen hat.

B. Banaschewski.

Davis, Chandler: Generators of the ring of bounded operators. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 970—972 (1955).

Soit \mathcal{B} l'algèbre de Banach de tous les opérateurs continus dans un espace de Hilbert séparable H . L'A. montre qu'on peut trouver trois projecteurs orthogonaux E_i ($i = 1, 2, 3$) dans \mathcal{B} tel que \mathcal{B} soit la plus petite sous-algèbre faiblement fermée contenant les E_i . Il prouve que dans ce résultat on ne peut pas remplacer le nombre 3 par 2. Par contre, il est possible de trouver deux opérateurs unitaires U_1, U_2 tels que \mathcal{B} soit la plus petite sous-algèbre faiblement fermée contenant U_1 et U_2 .

J. Dieudonné.

Itô, Takasi: On the commutativity of projection operators. Proc. Japan Acad. **31**, 682—683 (1955).

Exemple typique de résultat: soient P et Q deux projecteurs dans un espace hilbertien R , $P \cup Q$ leur borne supérieure. Les conditions suivantes sont équivalentes: 1) $P \geq Q$ ou $Q \geq P$; 2) $\|(P \cup Q)x\|^p \leq \|Px\|^p + \|Qx\|^p$ ($x \in R$) pour un $p > 2$.

J. Dixmier.

Charazov, D. F.: Einige Fragen der Spektraltheorie von Operatoren, die mero-morph von einem Parameter abhängen. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze **21**, 145—168 (1955) [Russisch].

L'A. donne des théorèmes concernant l'existence des valeurs propres λ pour les opérateurs de la forme $I - A_0 - \lambda \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{(\lambda - a_j)^k} A_{kj}$ où A_0 et A_{kj} sont des opérateurs complètement continus symétrisables dans un espace hilbertien et aussi pour des opérateurs de la forme $I - \sum_{n=0}^m \lambda^n A_n - \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - a_i} B_i$ avec des conditions qui assurent la convergence de la dernière série. Pour les opérateurs de la forme plus particulière $I - A_0 - \lambda A_1 - \lambda^2 \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda - a_i} H_i$, où H_i sont selfadjoints, il donne aussi la méthode de construction des valeurs et des éléments propres et la décomposition spectrale des opérateurs A_1 et H_i .

G. Marinescu.

Zuchovickij, S. I.: Über das Problem der Čebyševschen Approximation im Hilbertschen Raum. Dopovidi Akad. Nauk ukrain. RSR **1955**, 7—10 und russ. Zusammenfassg. **11** (1955) [Ukrainisch].

Auf dem Kompaktum Q seien n Operatorfunktionen $F_1(q), F_2(q), \dots, F_n(q)$ vorgegeben, die vom Parameter $q \in Q$ gleichmäßig stetig abhängen und deren Werte für jedes $q \in Q$ lineare stetige Operatoren sind, die im Hilbertschen Raum H wirken. Außerdem sei die stetige Vektorfunktion $\Phi(q)$ mit Werten in H gegeben. Die Aufgaben der Čebyševschen Approximation der Vektorfunktion $\Phi(q)$ durch das Polynom $\sum_{k=1}^n F_k(q) A_k$ ($A_k \in H$) besteht in der Ermittlung solcher Vektoren A_k , daß für sie die Abweichung $\max_{q \in Q} \|\sum_{k=1}^n F_k(q) A_k - \Phi(q)\|$ am geringsten wird. — In der vorliegenden Arbeit werden der Fall $n = 1$ untersucht, der Existenzsatz aufgestellt und Verallgemeinerungen der Sätze von A. N. Kolmogorov und A. Haar angeführt.

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Bartle, Robert G.: Newton's method in Banach spaces. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 827—831 (1955).

Sei f eine Abbildung des Banach-Raumes \mathcal{X} in einen Banach-Raum \mathcal{Y} ; f' sei die Fréchet'sche Ableitung von f und z_n eine beliebige Folge aus \mathcal{X} . Es wird das Iterationsverfahren (*) $x_n = x_{n-1} - [f'(z_{n-1})]^{-1} f(x_{n-1})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) untersucht. Für $z_n = x_n$ erhalten wir das Newtonsche, für $z_n = x_0$ das sog. modifizierte Newtonsche Verfahren. Diese zwei Verfahren wurden von Kantorovič (dies. Zbl. **38**, 74), Mysovskich (dies. Zbl. **38**, 74), Stein (dies. Zbl. **49**, 91) und von Ref. (dies. Zbl. **55**, 345) untersucht. Von f wird vorausgesetzt, daß $f \in c'(\mathcal{G}(x_0, x))$ im Sinne von Hildebrandt und Graves [Trans. Amer. math. Soc. **29**, 127—153].

(1927)], $\mathfrak{G}(x_0, \alpha)$ ist die Kugel $\|x - x_0\| < \alpha$ ($x \in \mathfrak{X}$). Der Ausgangspunkt der Betrachtungen ist folgender Hilfssatz: Es existiere $f'(x_0)^{-1}$, so daß $\|f'(x_0)^{-1}\| \leq \lambda < \infty$. Dann existiert eine Zahl β mit folgenden Eigenschaften: a) $\beta = \min(1, \lambda)$; b) wenn $\|x - x_0\| \leq \beta$, so ist $\|f(x^{-1})\| \leq \lambda$; c) $\|f(x_1) - f(x_2) - f'(x_3)(x_1 - x_2)\| \leq (1/2\lambda) \|x_1 - x_2\|^2$, falls $\|x_i - x_0\| \leq \beta$ ($i = 1, 2, 3$) ist. Der vom Verf. bewiesene Satz: Ist $\|f(x_0)\| \leq \beta/2\lambda$ (β ist die im Hilfssatz definierte Konstante), x_n eine beliebige Folge in \mathfrak{X} mit $\|x_n - x_0\| \leq \beta$, dann ist das unter (*) definierte Verfahren konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ ist eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$, und zwar die einzige in der Kugel $\|x - x_0\| \leq \beta$. Die Konvergenzgeschwindigkeit ergibt sich zu $\|x_n - \bar{x}\| \leq 2^{-n} \beta$. Das Wesen des Beweises liegt darin, daß das Verfahren $x_{n+1} = x_n - T_n^{-1} f(x_n)$ immer konvergent ist, falls die Folge der beliebigen Operatoren T_n den folgenden Bedingungen genügt: $\|T_n - f'(x_0)\| \leq 1/4\lambda$ und $\|T_n^{-1}\| \leq \lambda$.

St. Stenýš.

Citlanadze, E. S.: Über ein bedingtes Extremum eines schwach stetigen Funktionalen im Hilbertschen Raume. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze **21**, 111—124 (1955) [Russisch].

Soit H un espace hilbertien et $N \subset H$ une variété donnée par les équations $q_i(x) = a_i$ ($i = 1, \dots, n$), où q_i sont des fonctionnelles différentiables Fréchet. Soit encore f une fonctionnelle différentiable Fréchet. On démontre l'existence d'un point critique de f sur N , c'est-à-dire d'un point $x \in N$, satisfaisant à une équation de la forme $L_f x = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) L_{q_i} x$, avec certaines fonctionnelles λ_i (on emploie la notation $df(x; h) = L_f x, h$). Les conditions imposées aux fonctionnelles f et q_i sont assez longues à exprimer et nous ne mentionnons que la condition de Lipschitz pour les opérations L_f et L_{q_i} . La démonstration est basée sur l'étude des solutions de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = \left(L_f - \sum_{i=1}^n L_{q_i} \right) x$ et sur la notion de classe compacte d'homotopie.

G. Marinescu.

Fichera, Gaetano: Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. Atti Accad. naz. Lincei, Mem., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **3**, 1—81 (1950).

Verf. gibt einen zusammenfassenden Bericht über die im Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo in Rom bis zum Jahr 1950 gewonnenen Resultate, soweit sie die Auflösung linearer Funktionalgleichungen betreffen. Die Formulierung und Koordinierung der behandelten Probleme geht jedoch in vielen Punkten über das rein Berichtende hinaus, worauf angesichts der Fülle des verarbeiteten Materials — Arbeiten von 33 Autoren, darunter eine große Anzahl eigener Arbeiten des Verf. — hier im Einzelnen nicht eingegangen werden kann. Die Titel dieser Arbeiten sind in einem dem Bericht angeschlossenen Verzeichnis zusammengestellt, aus dem im folgenden nur ganz wenige zitiert werden können, die Ref. im jeweiligen Zusammenhang besonders bezeichnend erscheinen. Das 1. Kapitel handelt von der Abschätzung von Lösungen von Differentialgleichungen, wobei zwischen Abschätzungen vom Lagrangeschen Typ (M. Picone, dies. Zbl. **20**, 359; C. Miranda, dies. Zbl. **37**, 71) und solchen vom Hilbertschen Typ [G. Fichera, Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. **17**, 1—8 (1950)] unterschieden wird. Das 2. Kapitel behandelt unter dem Titel „Minimumsmethoden“ einerseits die Methode der kleinsten abgewogenen Potenzen, insbesondere der kleinsten Quadrate [M. Picone, Rend. Circ. mat. Palermo **52**, 225—253 (1928)], andererseits die Variationsmethode (S. Faedo, dies. Zbl. **25**, 331), sowie Anwendungen derselben. — Im 3. Kapitel wird zu Funktionaltransformationen übergegangen, wobei außer einschlägigen Arbeiten von M. Picone u. a. diejenigen von A. Ghizzetti (dies. Zbl. **27**, 402; **31**, 320) ihren Platz finden. — Das 4. Kapitel, dessen Problemstellung der von M. Picone (dies.

Zbl. 14, 261) gegebenen folgt, ist Funktionaltransformationen gewidmet, deren Parameter in einer diskreten Menge variiert. In diesen Zusammenhang werden auch Beiträge zur Theorie der hyperharmonischen Funktionen des Verf. [Rend. Circ. mat. Palermo 63, 1—24 (1941); Atti Accad. Italia. Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VII. Ser. 3, 511—523 (1942)] und von C. Tolotti, sowie solche zum Dirichletschen Problem von A. Ghizzetti und D. Caligo eingeordnet. — Das 5. Kapitel handelt von Methoden zur Übersetzung einer linearen Funktionalgleichung in ein System von Gleichungen von Fischer-Riesz. Hierbei wird besondere Bedeutung einer auf dem Reziprozitätstheorem beruhenden Methode eingeräumt, die nach dem Gedankengang der Abhandlung von M. Picone und des Verf. (dies. Zbl. 41, 67) wiedergegeben wird. Was die Bestimmung der hierbei auftretenden vollständigen Systeme von Funktionen oder Vektoren betrifft, werden Arbeiten von L. Amerio (dies. Zbl. 34, 202), A. Ghizzetti und des Verf. besprochen. — Im 6. Kapitel wird schließlich über verschiedene Arbeiten betreffend Rand- und Eigenwertprobleme u. a. von G. Grioli, W. Gröbner, M. Salvadori und T. Viola kurz berichtet.

M. J. De Schwarz.

Vaughan, H. E.: Characterization of the sine and cosine. Amer. math. Monthly 62, 707—713 (1955).

The author gives all continuous and some discontinuous solutions of the functional equation $g(x-y) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$ which was entirely solved by several authors of whom we mention W. H. Wilson [Bull. Amer. math. Soc. 26, 300—312 (1919)], J. H. Gerretsen [Euclides 16, 92—99 (1939)], J. G. van der Corput [Euclides 17, 55—75 (1940)], and L. Vietoris [J. reine angew. Math. 186, 1—15 (1944)]. The special case $f(x) = g(x-s)$ is also examined. J. Aczél.

Praktische Analysis:

Astuni, Enrico: La risoluzione dell'equazione cubica. Ricerca sci. 25, Nr. 7, 23 p. (1955).

Aus der reduzierten kubischen Gleichung mit reellen Koeffizienten $x^3 + a_2 x + a_3 = 0$ entnimmt man das Verhältnis $t = a_3^2/a_2^3$. Dann sucht man Funktionswerte $m(t)$ aus einer beigegebenen graphischen Darstellung auf, wobei für sehr kleine und sehr große $|t|$ angenähert gilt: $m = t$ für $|t| \leq 10^{-2}$, $m = t^{1/3}$ für $|t| \geq 10^9$. Eine reelle Wurzel der Gleichung ist sodann $x_3 = -(1+m)^{-1} \cdot a_3/a_2$; die beiden anderen Wurzeln folgen aus der quadratischen Restgleichung. Zahlenbeispiele für den Fall, daß $m(t)$ nicht graphisch vorliegt und iterativ bestimmt werden muß. H. Wundt.

Astuni, Enrico: Sulla risoluzione dell'equazione quartica. Ricerca sci. 25, Nr. 8, 20 p. (1955).

Der reduzierten biquadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten $x^4 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$ werden die Verhältnisse $u = 4 a_4/a_2^2$ und $t = a_2^2/a_3^2$ entnommen. Dann bestimmt man Funktionswerte $m(u, t)$, die der kubischen Gleichung $m^3 + 2m^2 + (1-u)m - t = 0$ genügen; geeignete Zahlentafeln sind angegeben. Die Wurzeln x_i ergeben sich danach durch Lösung einiger quadratischer Gleichungen, die nur von m abhängen. H. Wundt.

Heinrich, H.: Eine Umkehrung des Hornerschen Schemas. Z. angew. Math. Mech. 35, 468—469 (1955).

Das Horner-Schema gibt zu einem Polynom die Koeffizienten der zugehörigen Produktentwicklung an gegebenen Argumentstellen. Das vom Verf. entwickelte Verfahren liefert umgekehrt die Polynomkoeffizienten bei bekannter Produktentwicklung. Das Schema sieht aus wie das von Horner, benützt aber nicht denselben Faktor in jeder Zeile, sondern nacheinander die gegebenen Argumentwerte als Faktoren. In jeder folgenden Zeile fällt der in der vorhergehenden zuerst benützte Faktor weg. Werden alle Argumente um die gleiche Spanne \bar{x} vergrößert, so erhält man anstatt $f(x)$ die Potenzentwicklung $f(x - \bar{x})$ zurück. Sind schließlich die ge-

wählten Argumentstellen die Nullstellen der Funktion, so sind alle Koeffizienten der Produktentwicklung bis auf den letzten null, und das neue Schema zeigt in trivialer Weise, wie das Produkt $(x - x_1)(x - x_0) \cdots$ ausmultipliziert und nach Potenzen von x geordnet werden kann. *H. Wundt.*

Kogbetliantz, E. G.: Solution of linear equations by diagonalization of coefficients matrix. Quart. appl. Math. **13**, 123—132 (1955).

Um die Verdoppelung der Ordnung bei Aufspaltung eines komplexen linearen Gleichungssystems in zwei reelle zu vermeiden, wird Diagonalisierung der komplexen Matrix $A = A_0$ durch zwei unitäre Matrizen $U, T: *U' A T = K$ nach folgendem Iterationsverfahren vorgeschlagen: $A_n = *u'_n(\zeta_n) A_{n-1} u_n(z_n), K = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, d. h.

$$A_n = *U'_n A T_n, \quad T_n = \prod_1^n u_n(z_k), \quad U_n = \prod_1^n u_k(\zeta_k), \quad T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n, \quad U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n.$$

Die u_n sind sehr einfache unitäre Matrizen, die als Drehungen um den komplexen Winkel z_n bzw. ζ_n gedeutet werden können. In einer festgelegten Reihenfolge wird bei jedem Iterationsschritt ein außerhalb der Diagonale stehendes Element und sein Spiegelbild zu Null gemacht, während die Quadratsumme der Diagonalelemente ständig wächst. Nach Durchlaufen eines Zyklus von $N = m(m-1)/2$ Schritten (m Ordnung von A) ist jede Stelle außerhalb der Diagonale einmal annulliert worden, der Betrag der Nichtdiagonalelemente von A_N ist dabei durchschnittlich um den Faktor $e^{-1/2}$ kleiner als bei A_0 . Es werden detaillierte Rechenvorschriften (nebst Vereinfachungen für symmetrische komplexe, allgemeine reelle, Hermitesche und schief-Hermitesche Matrizen) gegeben. *J. Weissinger.*

Riley, James D.: Solving systems of linear equations with a positive definite, symmetric, but possibly illconditioned matrix. Math. Tables Aids Comput. **9**, 96—101 (1955).

\mathfrak{A} sei eine symmetrische, positiv definite Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}$ und den Eigenvektoren ξ_i . Es wird vorgeschlagen, im Falle einer schlecht konditionierten Matrix \mathfrak{A} anstelle des Systems (1): $\mathfrak{A}\xi = a$ die Gleichungen (2): $(\mathfrak{A} + k\mathfrak{C})\eta = \mathfrak{C}\eta = a$ zu behandeln. k wählt man zweckmäßig als positive Zahl mit $10^{-s} \cdots 10^{3-s}$, s Anzahl der in der Rechnung berücksichtigten Dezimalen. Für die zur Beurteilung der Konditionierung von \mathfrak{A} herangezogenen Ausdrücke $P(\mathfrak{A}) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ und $\tilde{N}(\mathfrak{A}) = (1/n) N(\mathfrak{A}) N(\mathfrak{A}^{-1})$ — dabei stellt N die Norm dar — wird gezeigt, daß $P(\mathfrak{C}) < P(\mathfrak{A})$ und $\tilde{N}(\mathfrak{C}) < \tilde{N}(\mathfrak{A})$. Der gesuchte Vektor ξ wird aus η durch $\xi = \mathfrak{C}^{-1} a + k\mathfrak{C}^{-2} a + \cdots$ gewonnen, indem nach Ermittlung von η der Vektor $k\mathfrak{C}^{-1}\eta$ usw. berechnet wird. Diese infolge $0 < k/(\lambda_i + k) < 1$ immer konvergente Entwicklung läßt Schlüsse auf die Beschaffenheit von \mathfrak{A} zu. — Ist ξ_0 eine Näherungslösung von (1), dann kann eine bessere Lösung $\xi_1 = \xi_0 + \delta_0$ aus $\mathfrak{C}\delta_0 = a - \mathfrak{A}\xi_0$, allgemein ξ_i aus $\mathfrak{C}\delta_i = a - \mathfrak{A}\xi_{i-1}$ gewonnen werden. Für $\xi_0 = \eta$ liegt formale Übereinstimmung mit obigem vor, numerisch liegen die Verhältnisse durch genauere Berechnung von $a - \mathfrak{A}\xi_0$ günstiger, mögliche Konvergenzbeschleunigung mit Aitkens δ^2 -Prozeß. In Erweiterung von $P(\mathfrak{A})$ wird eine Systembedingung $P(\mathfrak{A}, a)$ zur Beurteilung von (1) aufgestellt. *H. Unger.*

Crockett, Jean Bronfenbrenner and Herman Chernoff: Gradient methods of maximization. Pacific J. Math. **5**, 33—50 (1955).

Sei $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ eine genügend oft partiell differenzierbare Funktion mit einem Maximum bei $x = c$,

$$l(x) = \text{grad } f, \quad L(x) = -(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j); \quad L = L(c)$$

sowie die zunächst beliebige n -reihige Matrix B seien positiv definit, h_m eine Folge positiver Zahlen, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ die Eigenwerte der Matrix $B^{-1}L$. Untersucht wird die Konvergenz der Iterationsfolge $x^{(m+1)} = x^{(m)} + h_m B^{-1}l(x^{(m)})$ gegen c , was z. B. für $|1 - h_m \lambda_i| \leq q < 1$ ($i = 1, \dots, n$; $m = 0, 1, \dots$) der Fall

ist, wenn $x^{(0)}$ in einer passenden Umgebung von c liegt. Für $h_m = 1$, $B = L(x^{(m)})$ hat man die Newtonsche Methode. Für die wirksame Wahl der h_m werden Regeln angegeben, insbesondere für die modifizierte Newtonsche Methode, bei der jeweils für einige Iterationsschritte mit demselben $B = L(x^{(p)})$ gearbeitet wird.

J. Weissinger.

Hestenes, Magnus R.: Iterative computational methods. Commun. pure appl. Math. 8, 85—96 (1955).

Verf. beschreibt verschiedene Iterationsverfahren für die Auflösung von Gleichungen. Besonderen Nachdruck legt er auf solche Probleme, deren Lösung auch als Ergebnis einer Variationsaufgabe auftritt. In diesem Zusammenhang knüpft er an die Gradientenmethode zum Bestimmen des Minimums einer Funktion $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ an, wonach eine Näherung x gemäß $x' = x + a \cdot \text{grad } F(x)$ mit einem geeigneten Skalar a iteriert wird. Der Begriff des Gradienten wird verallgemeinert und insbesondere für den Fall erklärt, daß x ein Element eines Hilbertschen Raumes und F ein Funktional ist. Damit läßt sich das Iterationsverfahren auf den allgemeineren Fall übertragen. -- Als nächsten Punkt beschreibt der Verf. die sogenannte Methode des konjugierten Gradienten zum Auflösen eines linearen Gleichungssystems $Mx = k$ mit einer symmetrischen und positiv definiten Matrix M (vgl. auch dies. Zbl. 48, 99). Er erwähnt ferner eine direkte Methode zur Inversion einer Matrix M . Man geht von einer Approximation N_0 für M^{-1} aus und leitet aus N_0 eine Matrix N_1 ab, so daß der erste Zeilenvektor v_1 von M und N_1 das Produkt $v_1 \cdot N_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ergeben. Hierbei sind die Spalten von $N_1 - N_0$ geeignete Vielfache des ersten Spaltenvektors von N_0 . Das Verfahren wird mit Bezug auf N_1 und den zweiten Spaltenvektor dieser Matrix sinngemäß wiederholt usw. Den Schluß des Aufsatzes bilden einige Bemerkungen über Fehlerquellen und über Iterationsverfahren bei Eigenwertaufgaben. Verf. hat nicht beabsichtigt, die moderne Literatur der Iterationsverfahren vollständig zu würdigen. Wichtige Beiträge anderer Autoren, z. B. von C. Lanczos, sind nicht erwähnt.

H. Bückner.

Gregory, Robert T.: On the convergence rate of an iterative process. Math. Mag. 29, 63—68 (1955).

Bemerkungen zur Konvergenz der Iterationsfolge $x_{n+1} = Ax_n$, insbesondere im Falle einer nichtdiagonalisierbaren Matrix A .

J. Weissinger.

Šmul'jan, Ju. L.: Bemerkung zu der Arbeit Ju. M. Gavrilovs „Über die Konvergenz von Iterationsprozessen“. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 19, Nr. 2, 191 (1955) [Russisch].

Verf. verallgemeinert einen Satz aus der in dies. Zbl. 55, 112 besprochenen Arbeit.

Goodey, W. J.: Note on the improvement of approximate latent roots and modal columns of a symmetrical matrix. Quart. J. Mech. appl. Math. 8, 452—453 (1955).

Let A be a symmetric matrix with fairly well separated characteristic roots. Let N be a matrix such that

$N'AN = \text{diag}(d_1, d_2, \dots) + Q = D + Q$, $N'N = \text{diag}(f_1, f_2, \dots) + R = F + R$, where Q, R have 0 diagonals and are near 0. Compute the (r, s) -element g_{rs} of $RD - QF$; set $h_{rs} = g_{rs}/(d_r f_s - d_s f_r)$, $H = (h_{rs})$. Then $M = N(I + H)$ has the approximate properties $M'M \approx I$, $M'AM$ diagonal. See H. Jahn, this Zbl. 35, 205.

J. L. Brenner.

Karmišin, A. V.: Eine Lösungsmethode für ein System von dreigliedrigen algebraischen Gleichungen und ihre Anwendung auf die Lösung einiger Aufgaben der mathematischen Physik. Vestnik Moskovsk. Univ. 10, Nr. 8 (Ser. fiz. mat. estestv. Nauk Nr. 5), 39—45 (1955) [Russisch].

Es wird ein Verfahren zur Lösung eines Systems von dreigliedrigen linearen algebraischen Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten von der Form

$$y_i + \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i-1} y_{i-1} = \gamma_i$$

entwickelt, wobei γ_{i+1} , β_{i-1} und γ_i die bekannten und η_i die unbekannten Größen bezeichnen. Die schematische Berechnung wird an einem Beispiel erklärt. Der Verf. zeigt dann, wie dieses Verfahren bei der Lösung von gewissen, gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche für die mathematische Physik von Bedeutung sind, verwendet werden kann, wenn diese durch die Methode der endlichen Differenzen und die Gittermethode auf die Lösung von Systemen algebraischer Gleichungen zurückgeführt werden. Die entwickelte Methode beruht auf der Annahme, daß die Koeffizientenmatrix des Systems die nachstehende besondere Form hat

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \beta_1 & 1 & \gamma_3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \beta_2 & 1 & \gamma_4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \beta_3 & 1 & \gamma_5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

also ihre Hauptdiagonalglieder alle gleich Eins sind. Es ist nicht schwer zu sehen, wie das Verfahren für den Fall, daß diese von Eins und von Null verschieden sind, abgeändert werden muß; aber wie diejenigen Systeme zu behandeln sind, die auf der Hauptdiagonale einige Nullen haben, sieht man wenigstens auf den ersten Blick nicht.

T. P. Angelitch.

Sokolov, Ju. D.: Über eine Methode der Näherungslösung von linearen Integral- und Differentialgleichungen. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1955, 107–111 und russ. Zusammenfassg. 111 (1955) [Ukrainisch].

Es wird eine neue Methode der Näherungslösung von linearen Integral- und Differentialgleichungen dargestellt, die sich von den üblichen Iterationsprozessen unterscheidet. Es wird die Konvergenz der Methode bewiesen und die Abschätzung des Fehlers festgestellt. Zwei Beispiele für die Anwendung der Methode auf die Lösung der eindimensionalen Randwertaufgabe für eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung und ein Beispiel für ihre Anwendung auf den Fall einer nichtlinearen Gleichung zweiter Ordnung sind angeführt.

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Rutishauser, Heinz: Bemerkungen zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n -ter Ordnung. *Z. angew. Math. Phys.* 6, 497–498 (1955).

Es wird kurz berichtet über umfangreichere Untersuchungen, die Verf. am Institut für angewandte Mathematik der ETH Zürich über die Genauigkeitsordnung der verallgemeinerten Runge-Kutta-Formeln für Differentialgleichungen n -ter Ordnung durch Anwendung auf lineare Differentialgleichungen konstanter Koeffizienten durchgeführt hat. Danach sind diese Formeln auch für $n = 2$ und auch für den Fall $y^{(m)} = f(x, y)$ entgegen der bisherigen Annahme stets von der gleichen Genauigkeitsordnung 4, d. h. der Fehler bei numerischer Integration mit Schrittweite h über ein festes Intervall ist $\sim c \cdot h^5$ (muß es wohl richtig heißen), sofern sich die Integration nicht nur über einen einzigen Schritt erstreckt. Auch bei den Integrationsformeln von Adams-Falkner hängt die Genauigkeitsordnung nur von der Anzahl der mitgeführten Differenzen, nicht aber von n ab.

R. Zurmühl.

Gautschi, Walter: Über den Fehler des Runge-Kutta-Verfahrens für die numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n -ter Ordnung. *Z. angew. Math. Phys.* 6, 456–461 (1955).

In Erweiterung einer von Bieberbach (dies. Zbl. 42, 366) für das Runge-Kutta-Verfahren für Differentialgleichungen 1. Ordnung und Systeme solcher Gleichungen durchgeführten Fehlerabschätzung werden hier Abschätzungen für das verallgemeinerte Runge-Kutta-Verfahren für Gleichungen n -ter Ordnung gegeben, die für $n = 1$ die Schranken von Bieberbach als Spezialfall enthalten. Es ergeben sich ähnlich gebaute Formeln wie bei Bieberbach unter ähnlichen Voraussetzungen. Für den praktisch wichtigen Fall $n = 2$ sind die Formeln noch einmal explizit angeschrieben und durch eine schwächere, aber einfacher gebaute Abschätzung ergänzt. Eine solche Vereinfachung ist dann auch für den allgemeinen Fall $n > 2$ angeben.

R. Zurmühl.

Voronovskaja, E. V.: Über eine Modifikation der Čaplyginschen Methode für Differentialgleichungen erster Ordnung. Priklad. Mat. Mech. **19**, 121—126 (1955) [Russisch].

Bei der Integration der Differentialgleichung $y' = F(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$ (wobei $\varepsilon^2 F/\partial y^2$ als stetig und von konstantem Vorzeichen vorausgesetzt wird) nach der Methode von S. A. Čaplygin wird zur Konstruktion der beiden Näherungsfolgen, die die gesuchte Lösung von unten bzw. oben approximieren, die Funktion $F(x, y)$ durch zwei bestimmte Funktionen der Form $\varphi(x)y + \psi(x)$ ersetzt. Die Verf. nimmt den Ersatz von $F(x, y)$ durch eine Funktion der Form $\varphi(x)y - \psi(x)$ in anderer Weise vor, wodurch, wie die durchgeführte Fehleruntersuchung zeigt, bessere Konvergenz erzielt wird. W. Schulz.

Gurk, H. M. and Morris Rubinoff: Numerical solution of differential equations. Proc. Eastern Joint Computer Conference, Philadelphia, Dec. 8—10, 1954, 58—64 (1955).

In einer Arbeit von H. J. Gray jun. (dies. Zbl. **57**, 346) wurden „Stabilitätskarten“ eingeführt, die bei der numerischen schrittweisen Auflösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen Angaben über die numerische Stabilität abzulesen gestatten. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Verfahren weiter ausgebaut und auf verschiedene Probleme und Beispiele angewendet. So kann man z. B. bei einem vorgelegten Problem Angaben über Wahl der zugrunde zu legenden Quadraturformel und der Schrittweite treffen, was besonders dann von Bedeutung ist, wenn ein Rechengesetz direkt in Zeitübereinstimmung mit dem wirklichen Vorgang arbeiten muß, wie etwa bei einem Flugzeugführer-Ausbildungsgerät.

Fr.-A. Willers.

Hammer, Preston C. and Jack W. Hollingsworth: Trapezoidal methods of approximating solutions of differential equations. Math. Tables Aids Comput. **9**, 92—96 (1955).

Die Trapezregel (1): $y_1 - y_0 = (h/2)(y'_1 + y'_0)$ mit $h = x_1 - x_0$ und dem Fehlerglied $y''' h^3/24$ kann auch zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen vom Typ $y' = f(x, y)$ verwendet werden. Die Ermittlung von y_1 muß aber dann nach (1) iterativ geschehen, wenn es sich nicht um eine lineare Differentialgleichung handelt. Verff. untersuchen die bei diesem Vorgehen auftretende quadratische Funktion $u(x)$ genauer mit folgendem Ergebnis: u ist den Bedingungen unterworfen: 1) $u(x_0) = y_0$, 2) $u'(x_0) = y'_0$, 3) $u'(x_1) = f(x_1, u(x_1))$, die Approximation erfolgt also durch stetige mit stetiger Tangente aneinander schließende Parabelbögen. — Fordert man, daß die 3. Bedingung an der Stelle $x_p = x_0 + p h$ mit $p = 2/3$ erfüllt ist, so erhält man eine Genauigkeitssteigerung um einen Grad (Restglied $y^{(4)} h^4/216$). Auszuwerten sind dann die beiden Formeln $y_{2/3} = y_0 + (h/3)(y'_{2/3} + y'_0)$ und $y_1 = y_0 + (h/4)(3 y'_{2/3} + y'_0)$, von denen die erste zunächst iterativ entsprechend wie (1) aufgelöst werden muß. Nimmt man in Anwendung der Gaußschen Methode die 2. und 3. Bedingung an den Zwischenstellen $x_q = x_0 + q h$ und $x_p = x_0 + p h$ mit $q = \frac{1}{2} - 1/\sqrt{12}$ und $p = \frac{1}{2} + 1/\sqrt{12}$, dann hat man zur Ermittlung von y_q und y_p ein System von zwei Gleichungen iterativ aufzulösen und dann y_1 aus $y_1 = y_0 + (h/2)(y'_q + y'_p)$ zu bestimmen (Restglied $h^5 y^{(5)}/4320$).

H. Unger.

Koroljuk, V. S.: Über ein Verfahren zur Erhöhung der asymptotischen Genauigkeit der Netzmethode. Ukrain. mat. Žurn. **7**, 379—387 (1955) [Russisch].

Verf. behandelt für ein ebenes Gebiet mit der Begrenzung Γ die Poissonsche Gleichung $\Delta u = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = \varphi$, $u|_\Gamma = f$. Der Laplacesche Operator wird durch $\Delta u = (1/h^2) \Delta_h u + h^2 L_1(u) + h^4 L_2(u) + \dots + h^{2q-2} L_{q-1}(u) + O(h^{2q})$ approximiert, wobei in den Gitterpunkten eines Quadratnetzes

$$(1/h^2) \Delta_h u_{k,r} = u_{k+1,r} + u_{k-1,r} + u_{k,r+1} + u_{k,r-1} - 4 u_{k,r}$$

gilt und L_1, L_2, \dots Differenzenoperatoren sind, die Differentialoperatoren der Form $A_k (\zeta^{2k+2} \zeta x^{2k+2} - \zeta^{2k+2} \zeta y^{2k+2})$ mit einer Genauigkeit von der Größenordnung h^2 approximieren. Die Lösung der Poissonschen Gleichung wird in der Form $u = u_0 - h^2 u_1 + \dots + h^{2q-2} u_{q-1} - O(h^{2q})$ erhalten. u_0, u_1, \dots, u_{q-1} genügen dabei einem System von Differenzengleichungen. — Als Beispiel wird behandelt $\Delta u = -2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y$ im Quadrat $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, u = 0$ auf dem Rande des Quadrats mit der genauen Lösung $u = \sin \pi x \sin \pi y$. Bei Verwendung eines Quadratnetzes mit der Maschenweite $h = 0.1$ liefert das Verfahren des Verf. für die ersten Glieder $u_i h^{2i} = r_i h^{2i} \sin \pi k h \sin \pi r h$ der Reihe: $r_0 = \pi^2 h^2/4 \sin^2(\pi h/2) = 1,008\,265\,04$; $r_1 h^2 = -\pi^2 h^2/12 = -0,008\,224\,67$; $r_2 h^4 = -\pi^2 h^2 \sin^2(\pi h/2)/60 = -0,000\,040\,25$. W. Schulz.

Crandall, Stephen H.: An optimum implicit recurrence formula for the heat conduction equation. *Quart. appl. Math.* **13**, 318—320 (1955).

L'A. approssima l'equazione $L(u) = u_{xx} - u_t = 0$ con l'equazione alle differenze (1) $u_{i,k+1} - r\vartheta(u_{i-1,k+1} - 2u_{i,k+1} + u_{i+1,k+1}) = u_{i,k} + r(1-\vartheta)(u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k})$, con $0 \leq \vartheta \leq 1$; $u_{i,k} = u(i-1, k, t)$; $t = r \Delta x$; che risolve col metodo della separazione delle variabili. Per i particolari valori $\vartheta = 0,1273$ ed $r = 0,2236$ l'A. mostra che l'errore di approssimazione di (1) è $O(\Delta x^6)$, per cui la (1) risulterebbe veramente vantaggiosa per il calcolo delle soluzioni di $L(u) = 0$. G. Sestini.

Douglas jr., Jim and T. M. Gallie jr.: Variable time steps in the solution of the heat flow equation by a difference equation. *Proc. Amer. math. Soc.* **6**, 787—793 (1955).

La possibilità di potere operare con incrementi non costanti rispetto ad una variabile rende molto più agevole l'impiego delle moderne calcolatrici per la soluzione di un sistema alle differenze. Gli AA. mostrano che il sistema implicito alle differenze, per il quale sono ammissibili per il tempo anche incrementi variabili Δt_n , associato al sistema differenziale della conduzione del calore: (1) $u_{xx} - u_t = 0$, $t > 0, 0 < x < 1$; $u(0, t) = u(1, t) = 0, u(x, 0) = f(x)$, ammette soluzione convergente alla soluzione del sistema (1), quando su $f(x)$ si faccia l'ipotesi, assai restrittiva, di possedere uno sviluppo di Fourier in serie di seni, i cui coefficienti verifichino la relazione $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 |a_n| < \infty$. Sono esaminati i due casi corrispondenti alla ipotesi di una legge di crescita lineare per i Δt_n e per una legge di crescita esponenziale per i Δt_n . G. Sestini.

Douglas jr., Jim and T. M. Gallie jr.: On the numerical integration of a parabolic differential equation subject to a moving boundary condition. *Duke math. J.* **22**, 557—571 (1955).

Il metodo delle differenze finite è applicato al problema della numerica integrazione delle equazioni che reggono un problema di Stefan unidimensionale. Un tale problema, come è ben noto (cfr. questo Zbl. **43**, 411), è riducibile alla risoluzione della equazione funzionale $x(t) = t \cdot \int_0^{x(t)} u(x(t), t) dx$, tra la incognita temperatura del mezzo, in cui sono presenti due fasi, $u(x, t)$ e l'incognita funzione $x(t)$, che caratterizza la linea di demarcazione tra le due fasi all'istante t . Sostituito al sistema differenziale un sistema implicito alle differenze (con incrementi per il tempo variabili), gli Autori conseguono un duplice scopo: a) di assicurare l'esistenza della soluzione del problema differenziale come limite della soluzione del corrispondente sistema alle differenze; b) di istituire un modo di calcolo per la soluzione del problema differenziale, che risulta assai più agevole di quelli fin qui proposti, partendo direttamente dal sistema differenziale. G. Sestini.

John, Fritz: Numerical solution of the equation of heat conduction for preceding times. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. Ser. **40**, 129—142 (1955).

Si determina numericamente una soluzione $u(x, t)$ positiva della equazione

$u_{xx} = u_t$, con $u(x, 0) = f(x)$, nella striscia $-\infty < x < +\infty$, $-T < t \leq 0$ e nella classe delle funzioni continue insieme alla derivata prima rispetto a t e seconda rispetto ad x , per cui il minimo limite superiore di $|u(x, t)|$, per $-\infty < x < +\infty$ e $t = -T + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ assegnato, $N_u(T - \varepsilon)$ è finito. La $f(x)$ è ammissibile per la risolubilità del problema e si sostituisce ad $f(x)$ una sua valutazione approssimata $\hat{f}(x)$. Indicato con ε il minimo limite superiore di $|\hat{f}(x) - f(x)|$ in $(-\infty, +\infty)$, si ottiene una valutazione per $u(x, t)$, in dipendenza di un conveniente schema di calcolo col metodo delle differenze finite, con un errore che resta espresso in funzione di t, T, ε e del massimo di $f(x)$ in $(-\infty, +\infty)$. Si osserva anche che la soluzione può essere calcolata numericamente, una volta soddisfatte le condizioni di esistenza, anche quando il problema risulti mal posto nel senso di Hadamard. *G. Sestini.*

Fettis, Henry E.: Numerical calculation of certain definite integrals by Poisson's summation formula. *Math. Tables Aids Comput.* **9**, 85—92 (1955).

Die Rechteck- und die Trapezregel zur Auswertung bestimmter Integrale liefern in gewissen Spezialfällen, z. B. bei der Auswertung der Fourierkoeffizienten, außerordentlich gute Ergebnisse. In Erweiterung dieser Tatsache untersucht der Verf. die Anwendungsmöglichkeit der Poissonschen Summenformel

$$\int_0^a f(x) dx = h \left\{ \frac{1}{2} [f(0) + f(a)] + \sum_{k=1}^{n-1} f(kh) \right\} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{2kh\pi}{a}\right),$$

$$h = \frac{a}{n}, \quad g(x) = \int_0^a f(t) \cos(xt) dt,$$

als eine „Trapezformel“ mit Korrekturglied. Im Falle genügend stark abnehmender Fourierkoeffizienten ist eine gute Approximation zu erwarten. Unter bestimmten Voraussetzungen können auch uneigentliche Integrale behandelt werden. Als erstes

Beispiel wird die Bessel-Funktion $J_p(z) = \frac{i^n}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos t} \cos(pt) dt$ untersucht

und gezeigt, daß der einfache Ausdruck $\frac{1}{6} [\cos z + 2 \cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}z) + 2 \cos(\frac{1}{2}z) + 1]$ für $J_0(z)$ in $0 \leq z \leq 2$ mindestens acht richtige Dezimalen liefert. Weitere Beispiele: Modifizierte Besselfunktion $I_0(z)$, die von Schwartz eingeführten Funk-

tionen $\int_0^{\lambda} J_0(\lambda t) \frac{\cos t}{\sin t} dt$, modifizierte Besselfunktionen zweiter Art $K_n(z)$ und Gaußsche Fehlerfunktion. Die Anwendungsmöglichkeit dürfte hauptsächlich in dem Bereich liegen, in dem die asymptotischen Formeln noch keine hohe Genauigkeit liefern.

H. Unger.

Castoldi, Luigi: Di una esatta formula generalizzata di Stirling. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **24**, 152—156 (1955).

Ausgehend von der Stirlingschen Formel für $n!$ wird die Funktion $G(1/n)$ in $n! = \sqrt{2\pi} n^n e^{-n} e^{-G(1/n)}$, der bekannten Stirlingschen Reihe, hergeleitet. Für $n = 1, 2, 5, 10$ und 100 werden für verschiedene Approximationsgrade Näherungswerte für $n!$ und die relativen Fehler angegeben.

H. Unger.

Meyer zur Capellen, W.: Eine interessante Kopplung zwischen Parallel-Fluchtentafel und N-Fluchtentafel. *Z. angew. Math. Mech.* **35**, 473—474 (1955).

Pedroni, Fernando: Metodo grafico per la costruzione di scale e reticolati anamorfici. *Atti XIII e XIV Riun. sci. Roma* 1953—1954, 109—112 (1955).

La geometria anamorfica comprende, come è noto, quei dispositivi grafici che consentono di trasformare in linee rette le varie curve statistiche. L'A. si sofferma sulla costruzione delle scale delle coordinate del reticolato anamorfo e sul semplice procedimento per ottenere scale proporzionali.

T. Salvemini.

• **Semendjaev, K. A.:** Der Rechenschieber. *Kurzer Leitfaden*. 7. unveränd. Aufl. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1955. 48 S. R. 0,85 [Russisch].

Marczyński, R.: Electronic automatic digital computers. *Zastosowania Mat.* 2, 263—295, russische und englische Zusammenfassgn. 295—296 (1955) [Polnisch].

The paper deals with the general problems of digital computers. It gives the classification of mathematical machines and describes in a simplified manner the action of an automatic digital computer. The author discusses arithmetical operations and commands, gives simple examples of programs for the machines and describes programming. He then explains the accuracy control of the machine and the methods used in the control. In the second part, devoted to the realization of digital computers, switching circuits and their realization, as well as a few kinds of memory, are discussed. The paper contains simple examples of elements of the machines. Finally, the author gives several examples concerning the application of digital computers in various branches of science and engineering. Engl. Zusammenfassg.

Karmazina, L. N.: Einige Eigenschaften der Wurzeln der Jacobischen Polynome. *Vychislit. Mat. vychislit. Techn.* 2, 108—110 (1955) [Russisch].

Es sei $G_n(p, q, x)$ das n -te Jacobische Polynom zur Gewichtsfunktion $x^{-1}(1-x)^{p-q}$ im Intervall $(0, 1)$. (Die Definition weicht also von der üblichen etwas ab.) Es wird die Abhängigkeit der Nullstellen von q für $0 < x < 1$ studiert und mit elementaren Mitteln gezeigt, daß die Gleichung $G_n(p, q, x) = 0$ bei festem n , x und hinreichend großem p stets lösbar ist. *W. Hahn.*

Karmazina, L. N.: Über ein Verfahren zur Berechnung hypergeometrischer Funktionen. *Vychislit. Mat. vychislit. Techn.* 2, 111—115 (1955) [Russisch].

Auf die bekannte reelle Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion wird eine Quadraturformel vom Gaußschen Typ angewandt. Es folgt eine Näherungsformel

$$F(\alpha, \beta; \gamma, z) = \sum_{k=1}^n A_k (1 - x_k z)^{-\alpha} \left(\sum_{k=1}^n A_k \right)^{-1} + R_n.$$

Die x_k sind die Nullstellen des n -ten Jacobischen Polynoms mit den Parametern β und $\gamma = \beta$. Verf. gibt eine Restgliedabschätzung und fügt eine Tabelle der A_k und x_k für $n = 5$, $\beta = 0,1$ (0,1) 0,9 und $\gamma = 2,1$ (0,1) 3,0 bei. *W. Hahn.*

● **Hastings jr., Cecil:** Approximations for digital computers. Princeton: Princeton University Press 1955. VIII, 201 p. \$ 4,00.

Diese Monographie handelt von der Approximation einvariabler Funktionen durch Tschebyschev-Polynome zum Gebrauch beim Arbeiten an Hochgeschwindigkeits-Rechenautomaten. Teil I des Buches dient als Einführung in die im Teil II gegebene Sammlung von Approximationen und ist in der Art eines Filmstreifens mit Untertiteln dargestellt. Der Teil II war bisher nur in der Form loser Arbeitsblätter einem begrenzten Kreis von Rechnern zugänglich und wurde jetzt mit Unterstützung der Rand-Corporation und der US Air Force in Buchform herausgebracht. Unter den approximierten Funktionen sind z. B. $\log_{10} x$, $\log_2 x$, $\ln(1+x)$, 10^x , e^x , $x^{-1}(1-e^{-x})$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$, $\sin \frac{1}{2} \pi x$, $I'(1+x)$, die vollständigen elliptischen Integrale 1. und 2. Gattung, das Fehlerintegral und der Integrallogarithmus zu nennen. Das Buch ist für den Rechner von Nutzen, für den Mathematiker jedoch nur von geringem Interesse. *S. Schottlaender.*

● **Schütte, Karl:** Index mathematischer Tafelwerke und Tabellen aus allen Gebieten der Naturwissenschaften. *Index of Mathematical Tables from all branches of sciences.* München: Verlag R. Oldenbourg 1955. 143 S. DM 14,50.

Zusammenstellung von über 1200 Titeln bis etwa Anfang 1955 erschienener selbständiger Tafelwerke und Formelsammlungen einschließlich einiger Literatur über numerisches Rechnen, Nomographie, harmonische Analyse, Interpolation, numerische Integration usw. Mitgeteilt werden: Verfasser, Titel, Erscheinungsort und Jahr, gegebenenfalls Angabe über Zeitschrift oder Berichtserie, in der die Arbeit erschienen ist. Genauere über den Titel hinausgehende Angaben über Stellenzahl, Argumentbereich, Interpolationsmöglichkeit usw. werden leider nicht gemacht. Der Index ist eingeteilt in folgende 16 Kapitel: Numerisches und praktisches Rechnen — Logarithmen der natürlichen Zahlen — Logarithmen der Kreisfunktionen —

Numeri der Kreisfunktionen — Aus elementaren Funktionen abgeleitete einfache Funktionen — Primzahlen, Primfaktoren und Faktoren, Zins- und Rententafeln; Kettenbrüche, Zahlentheorie — Fakultäten, Gammafunktionen, Exponential- und Hyperbelfunktionen; elementare transzendente Funktionen — Elliptische Funktionen und Integrale, Kugel-, Besselsche und andere höhere Funktionen — Integraltafeln und weitere höhere Funktionen; numerische Lösung von Gleichungen und Differentialgleichungen — Tafeln für die Anwendung in Physik, Chemie und anderen angewandten Naturwissenschaften — Astronomie und Astrophysik — Geodäsie und Geophysik — Nautische und aeronautische Ortsbestimmung — Meteorologie — Astronautik — Tafeln ohne genauere Inhaltsangabe, Formelsammlungen, Verschiedenes, Maße, Gewicht, Währungen. Den Abschluß bildet ein Autoren- und Institutsverzeichnis.

H. Unger.

Clenshaw, C. W. and F. W. J. Olver: The use of economized polynomials in mathematical tables. Proc. Cambridge philos. Soc. 51, 614—628 (1955).

Ausgehend von der Entwicklung [J. C. Miller, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 62, 204—210 (1946)]

$f(a + p h) = \alpha_0 + 2\alpha_1 T_1^*(p) + 2\alpha_2 T_2^*(p) + \dots$, $0 \leq p \leq 1$, wo $T_n^*(x) = T_n(2x - 1) = T_n(\sqrt{x})$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, h die Intervallgröße der tabulierten Tschebyscheff-Polynome $T_n^*(x)$ (vgl. z. B. die Tafeln des National Bureau of Standards, Applied Mathematics Ser., Nr. 9; dies. Zbl. 49, 212), kommen Verff. durch Umordnung der Glieder bis $T_n^*(p)$ nach Potenzen von p auf die Darstellung

$f(a + p h) = f(a) + a_1 p + \dots + a_n p^n + 2\alpha_{n+1} (T_{n+1}^*(p) - (-1)^{n+1}) - \dots$
mit $\alpha_{n+1} = (2^{2n+1} (n+1)!)^{-1} \delta_{1/2}^{n+1}$ bzw. $-(2^{2n+1} (n+1)!)^{-1} \mu \delta_{1/2}^{n+1}$,
 $\mu \delta_{1/2}^{n+1}$ die ungeraden bzw. geraden Differenzen von f im Punkte $a + h/2$ bedeuten. Bei hinreichend großem n wird für den Fehler $\varepsilon(p)$:

$$\varepsilon(p) \div 2\alpha_{n+1} (T_{n+1}^*(p) - (-1)^{n+1}) = 2\alpha_{n+1} (\Phi(p) + \psi(p)).$$

Indem das Polynom $\Phi(p)$, dessen Grad höchstens $n-1$ sei, so bestimmt wird, daß $\psi(0) = \psi(1) = 0$ und $\max |\psi(p)| = k$ in $0 \leq p \leq 1$ ein Minimum wird, erhalten Verff. damit eine zweckmäßige Abschätzung für $\varepsilon(p)$. Es werden die Polynome $\Phi(p)$ und die Koeffizienten a_i der Interpolationspolynome für $n = 2$ bis $n = 6$ numerisch gegeben; diese letzteren lassen sich auch zur Bestimmung der Ableitung von $f(a + p h)$ bequem verwenden. An einem numerischen Beispiel [Interpolation der Airy-Funktionen $A_i(-x)$ nach: British association for the advancement of science. Mathematical tables. Part-Vol. B. The Airy integral, giving tables of solutions of the differential equation $y'' = x y$. 1946] werden die Vorzüge der Methode für den Praktiker, auch gegenüber andern Methoden (z. B. von Everett, Lagrange) dargestellt. [Anmerkung des Ref.: Bei einigen Formeln des Beispiels ist der Faktor 10^{-8} weggeblieben. Die Gleichung 4. Grades für p liefert, wenn man $a_3 p^3 + a_4 p^4$ durch $a_3 p_3^3 + a_4 p_1^4$ ersetzt, als Näherungswert $p_2 = 0,4365$; die Wiederholung des Verfahrens mit p_2 ergibt bei sechstelliger Rechnung $p_3 = 0,436522$, so daß man auf die Newtonsche Methode verzichten kann.]

O. Volk.

Hayashi, K.: Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument. Neudruck. Berlin: Walter de Gruyter & C. 1955. 182 S. DM 12,—.

• Tafeln für e^x und e^{-x} . (Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Institut für rationale Mechanik und Rechentechnik. Mathematische Tafeln.) Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften 1955. 145 S. R. 16,60 [Russisch].

e^x und e^{-x} für $x = 0(0,001) 10$ mit 10 gültigen Ziffern, e^x und e^{-x} für $x = m 10^{-n}$ ($m = 1(1) 999$; $n = 3, 6, 9$) und für $x = 1(1) 100$ mit 20 gültigen Ziffern. In der Einleitung wird auf die Interpolation und die Berechnung der Tafeln eingegangen.

H. Unger.

Schmidt, Paul W.: Tables of $\int_0^x J_0(t) dt$ for large X . J. Math. Physics **34**, 169—172 (1955).

Tabelliert ist die Funktion $\bar{J}_0(x) = \int_0^x J_0(t) dt$ für $x = 10(0,2)40$ mit 6 Dezimalen. Interpolation mit den angegebenen zweiten Differenzen nach Everett liefert volle Stellenzahl. Die Berechnung erfolgte für $10 \leq x \leq 20$ durch numerische Integration, für $20 < x \leq 40$ durch asymptotische Entwicklung. H. Unger.

Bendrikov, G. A. und K. F. Teodorčik: Die Gesetze der Wanderung der Wurzeln von linearen algebraischen Gleichungen dritten und vierten Grades bei stetiger Änderung des freien Gliedes. Avtomat. Telemekh. **16**, 288—292 (1955) [Russisch].

Zum Zweck der Anwendung auf dynamisch stabile Regelungssysteme stellen die Verff. für Polynome $p^3 + p^2 + \sigma p + \sigma_1$ und $p^4 + p^3 + \sigma p^2 + \sigma_1 p + \sigma_2$, deren Nullstellen sämtlich in der linken Halbebene liegen, tabellarisch zusammen, wie sich die Nullstellen bei Änderung des absoluten Gliedes verhalten.

W. Schulz.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

• Loève, Michel: Probability theory. Foundations. Random sequences. (The University Series in Higher Mathematics.) New York: D. van Nostrand Co., Inc. 1955, XV, 515 p., illustr. \$ 12,00.

This book contains a comprehensive exposition of the foundations and of a great number of results of the theory of probability, as they might be taught to students of mathematics and statistics, and required by research workers. The author mentions calculus as a prerequisite, and some mathematical maturity is certainly necessary, in particular in the case of self-study, for which this is an excellent tool. The contents are as follows: Introductory Part: Elementary Probability Theory. Part One: Notions of Measure Theory. Chapters I and II. Part Two: General Concepts and Tools of Probability Theory. Chapters III and IV. Part Three: Independence. Chapters V and VI. Part Four: Dependence. Chapters VII to X. — The introductory part gives the intuitive background, while Parts One and Two introduce more advanced mathematical tools. Part Three studies random sequences, such as sums of independent random variables and their limit properties, and Part Four deals with random functions of second order. — A „more sophisticated study“ is promised for „the next volume“. — The last part is the longest, and this is natural, not only because it is here that the author can refer to extensive work of his own, but also because it contains such advanced topics as convergence, martingales and ergodic theorems. Portions which contain more complicated material are starred and „complements and details“ are given after every chapter. There is also a detailed bibliography and an index. (In the bibliography, Pólya should be spelt thus and not as on p. 495 and, differently again, on p. 497). The author's great familiarity with the French school (of which he is himself one of the foremost protagonists) serves him well. The historical background is nicely sketched in and the style makes reading a pleasure. (Too many theorems are „celebrated“. The author seems to have become aware of this, since on p. 22 he pokes fun at the frequency of this epithet.) This is a very scholarly book in the best tradition of analysis. Nothing else of this type exists for the benefit of the serious student of the subject and it is safe to predict that it will remain a standard compendium for many years to come.

S. Vajda.

Lehman, R. Sherman: On confirmation and rational betting. J. symbolic Logic 20, 251—262 (1955).

Kemeny, John G.: Fair bets and inductive probabilities. J. symbolic Logic 20, 263—273 (1955).

Bei einer subjektiven Bewertungstheorie der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man die Axiome ableiten aus der Forderung der Kohärenz des Bewertungssystems, die besagt, daß ein Wettsystem gegen den Buchmacher abgeschlossen ist. Bei F. P. Ramsey (dies. Zbl. 2, 5) und B. de Finetti (dies. Zbl. 3, 163; 17, 76) lautet die Forderung: Zu jedem Einsatzsystem gibt es ein Ereignis, bei dem der Buchmacher nicht verliert. A. Shimony (dies. Zbl. 64, 244) hat die Forderung verschärft: Zu jedem Einsatzsystem und jedem Ereignis, bei dem der Buchmacher verliert, gibt es auch eines, bei dem er gewinnt. Shimony hatte gezeigt, daß die starke Kohärenz die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung für das Bewertungssystem nach sich zieht mit der Verschärfung: $\Pr(h/e) = 1$ dann und nur dann wenn $e \rightarrow h$ (statt „dann“). Kemeny zeigt, daß schwache bzw. starke Kohärenz notwendig und hinreichend sind für die Gültigkeit des Axiomensystems in der schwachen bzw. starken Form. Lehmann (offenbar unabhängig von Shimony und Kemeny) beschäftigt sich nur mit den schwachen Begriffen und zeigt da dasselbe wie Kemeny. Er analysiert auch den Begriff der Vollständigkeit des Bewertungssystems: $\Pr(h/e)$ definiert für alle Paare, für die e nicht unmöglich ist. Er zeigt, daß man ein unvollständiges System vervollständigen kann. Man verlangt immer, daß fast alle Einsätze verschwinden. *H. Freudenthal.*

Bahadur, R. R.: Measurable subspaces and subalgebras. Proc. Amer. math. Soc. 6, 565—570 (1955).

μ sei ein auf einer Booleschen sigma-Mengenalgebra S definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß, $L_2(S)$ der zugehörige Hilbertsche Raum der quadratisch μ -summierbaren S -meßbaren reellen Funktionen, W ein abgeschlossener linearer Unterraum von $L_2(S)$, T die Projektion auf W und S^0 die kleinste sigma-Algebra, in bezug auf die jede Funktion aus W meßbar ist. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig: 1. T ist positiv und $T(1) = 1$. 2. W enthält eine dichte Menge beschränkter Funktionen, $1 \in W$ und $fg \in W$, wenn f und g beschränkte Funktionen in W sind. 3. Ist $A \in S^0$, so gehört die charakteristische Funktion von A zu W . 4. Es gibt eine sigma-Unteralgebra S^* von S mit $W = L_2(S^*)$. 5. $W = L_2(S^0)$. Als Corollar ergibt sich, daß eine lineare Transformation T von $L_2(S)$ in sich dann und nur dann eine bedingte Wahrscheinlichkeit darstellt, wenn sie eine Projektion mit der Eigenschaft 1 bildet. Dies ähnelt einer Charakterisierung der als lineare Transformationen aufgefaßten bedingten Wahrscheinlichkeiten in beliebigen Räumen L^p durch Chen Moy (dies. Zbl. 55, 125), deren Methoden der Verf. auch zum Teil benutzt.

K. Krickeberg.
Gilbert, Walter M.: Projections of probability distributions. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 6, 195—198 (1955).

According to a well known theorem of H. Cramér and H. Wold (this Zbl. 15, 168) a two-dimensional probability distribution is uniquely determined by the set of all of its orthogonal projections on all lines through the origin. In a recent paper (this Zbl. 48, 108) the referee has proved that an arbitrary infinite set of different projections are sufficient to determine a two-dimensional distribution, provided that the characteristic function of the distribution is an analytic function of θ for every r , where r and θ are polar coordinates: especially this condition is satisfied if the two-dimensional distribution in question is bounded. In the present paper the author gives first an example of a two-dimensional distribution which is not determined by a suitably chosen infinite set of its projections, further he proves that if the two-dimensional distribution in question is such that all its moments exist and are those of a determined moment problem then the distribution is determined by an arbitrary

infinite set of its projections. This result does not contain and it is very likely that it is not contained in the theorem of the referee referred to above. Another result contained in the paper states that if two arbitrary projections of a two-dimensional distribution have analytic characteristic functions, then the same is true for any projection further the characteristic function of the two-dimensional distribution itself is an analytic function of its two (complex) variables in some neighborhood of the origin.

A. Rényi.

Baxter, Glen: On a characterization of the normal law. Proc. nat. Acad. Sci. USA 41, 383—385 (1955).

Verf. gibt einen Beweis für den folgenden Satz: Wenn ξ und η unabhängige gleichverteilte Zufallsveränderliche sind und es reelle Zahlen a und b gibt ($0 < a \leq b < 1$), so daß $a^2 + b^2 = 1$ ist und $a\xi + b\eta$ dieselbe Verteilung wie ξ und η besitzt, so haben ξ und η eine Gaußsche Verteilung mit dem Erwartungswert 0. [Vgl. Ju. V. Linnik, dies. Zbl. 47, 380; Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 9—11 (1953), wo viele allgemeine Sätze derselben Art formuliert sind.] Der Beweis beruht darauf, daß, falls $q(t)$ die charakteristische Funktion der gemeinsamen Verteilung von ξ und η bedeutet, aus der Annahme für $q(t)$ die Funktionalgleichung $q(at)q(bt) = q(t)$ folgt, und daraus kann man folgern, daß ξ und η eine unbeschränkt teilbare Verteilung besitzen. Hier wird das folgende Kriterium für die unbeschränkte Teilbarkeit benutzt: die Zufallsveränderliche ζ besitzt eine unbeschränkt teilbare Verteilung, falls sie für jedes $\varepsilon > 0$ in der Form $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n$ dargestellt werden kann, wo $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ unabhängig sind und der Bedingung $P(|\zeta_k| > \varepsilon) < \varepsilon$ ($k = 1, 2, \dots, n$) genügen. Dieses Kriterium folgt aus dem bekannten Satze von A. Khintchine (dies. Zbl. 46, 410; s. auch J. L. Doob, Stochastic processes, New York 1953, p. 129—135). Durch ein Beispiel wird gezeigt: für $0 < \alpha < 2$ folgt daraus, daß $a\xi + b\eta$ dieselbe Verteilung wie ξ und η besitzt mit $a^\alpha + b^\alpha = 1$, noch nicht, daß ξ und η eine stabile Verteilung der Ordnung α besitzen.

A. Rényi.

Krysiński, W.: On the combined problem of Bayes and Bernoulli. Zastosowania Mat. 2, 172—177, russische und engl. Zusammenfassg. 177—178 (1955) [Polnisch].

H. Poincaré posed the following problem in his „Calcul des probabilités“: In $n - m$ games at chess the first chess-player won n -times and the second one m -times. What is the probability that in the next game the first player will win? The author gives an answer to the generalized Poincaré problem. Assuming that in n independent trials a certain event (with constant probability p) occurred α -times we ask what is the probability of occurring β -times of this event during the next N trials. The author gives this probability (the Bayes postulate is used) $P(N, \beta, n, \alpha)$ and examines the extremum. Also two limit problems are solved. W. Sadowski.

Hodges jr., J. L.: On the noncentral beta-distribution. Ann. math. Statistics 26, 648—653 (1955).

Seien $Y_1 - \theta_1, \dots, Y_{2n} - \theta_{2n}, Z_1, \dots, Z_b$ unabhängige voneinander normal $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable: sei $S = \sum Y_i^2$, $T = \sum Z_i^2$, $2\lambda = \sum \theta_i^2$. Für $\lambda = 0$ folgt $X = T/(S + T)$ der B-Verteilung $\Pr(X \leq x) = I_x(b, a)$; die Verteilung von X für $\lambda > 0$ wird nicht zentrale B-Verteilung genannt und $\Pr(X \leq x)$ mit $B(x; a, b, \lambda)$ bezeichnet. Nicholson (dies. Zbl. 56, 128) hat einen geschlossenen Ausdruck für $B(x; a, b, \lambda)$ angegeben. Verf. zeigt, daß man diesen Ausdruck wesentlich vereinfachen kann. Es treten dabei Koeffizienten $\binom{A+t}{t}$ auf, wobei A Vielfache von $1/2$ sind; für $A = (2m+1) \cdot 1/2$ ($m = 0, 1, \dots, 19$) wird $\binom{A+t}{t}$ (auf

sieben Stellen genau) tabuliert. Die Vor- und Nachteile der geschlossenen Darstellung gegenüber der von Tang (dies. Zbl. 20, 243) gegebenen Rekursionsformel werden diskutiert; es zeigt sich, daß die neue Methode für kleine Werte von b ($b < 6$) überlegen ist.

O. Ludwig.

Simon, Herbert A.: On a class of skew distribution functions. *Biometrika* **42**, 425—440 (1955).

The author gives two alternative models which lead to the „Yule distribution“ $AB(i, \varrho + 1)$, where A and ϱ are constants and $B(i, \varrho + 1) = \int_0^1 x^{i-1} (1-x)^{\varrho} dx$. For instance using terminology appropriate to the case of word counts, the first model assumes that the probability, that the $(k+1)$ -st word is one out of $f(i, k)$ words that have already appeared exactly i times, is proportional to the total number of occurrences of all words that have appeared exactly i times, and that there is a constant probability α that the $(k+1)$ -st word will be a new one. He obtains, in the steady state, the Yule distribution for $f(i, k)/f(i-1, k)$ (which is independent of k) with $\varrho = 1/(1-\alpha)$. — The paper goes on to discuss the mechanisms which might explain the close approximation of this distribution to data on word frequencies, publications, city sizes, incomes, and biological species. *S. Vajda.*

Hewitt, Edwin and Herbert S. Zuckerman: Arithmetic and limit theorems for a class of random variables. *Duke math. J.* **22**, 595—615 (1955).

In Verallgemeinerung von verschiedenen Autoren untersuchen Spezialfälle studieren die Verf. Wahrscheinlichkeitsbelegungen $f(x) \geq 0$ ($x \in G$) auf endlichen kommutativen Halbgruppen (z. T. mit weiteren Bedingungen) und deren Faltungseigenschaften. Insbesondere werden in der Algebra aller komplexwertiger Funktionen über G die Menge der wahrscheinlichen Belegungen und spezielle Eigenschaften ihrer Elemente mittels der durch die Halbcharaktere definierten Fourier-Transformation untersucht und viele Ergebnisse der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie, z. B. der Satz von Bochner-Herglotz, übertragen. Die Fülle der Einzelergebnisse kann hier nicht wiedergegeben werden. *D. Morgenstern.*

Prochorov, Ju. V.: Methoden der Funktionalanalysis bei den Grenzwertsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Vestnik Leningradsk. Univ.* **10**, Nr. 11 (Ser. mat. fiz. chim. 4), 46 (1955) [Russisch].

Fisz, M.: A limit theorem for a modified Bernoulli scheme. *Studia math.* **15**, 80—83 (1955).

Der Verf. beweist in Verallgemeinerung und unter Benutzung seiner früheren Ergebnisse (dies. Zbl. **64**, 131) hauptsächlich, daß die Grenzverteilung ($n \rightarrow \infty$) von zufälligen Vektoren $Y^{(n)} = \{a_i^{(n)} X_i^{(n)} + b_i^{(n)}\}$ wo $X^{(n)} = \{X_i^{(n)}\}$ ($i = 1, \dots, r_n$; $r_n \rightarrow \infty$) multinomial verteilt sind, falls die Grenzverteilung nichtsingulär ist, vom Poisson-normalen Typ ist; dabei sind die Konvergenz, die Nichtsingularität und der Typ durch die entsprechenden Eigenschaften aller endlich-dimensionalen Marginalverteilungen definiert. *D. Morgenstern.*

Cheng, Tseng-Tung: On asymptotic expansions connected with the sums of independent random variables. *Acta math. Sinica* **5**, 91—104 und engl. Zusammenfassg. 105—108 (1955) [Chinesisch].

Let X_k ($k = 1, 2, \dots, n, \dots$) be a sequence of mutually independent random variables with finite variances σ_k^2 and mean values 0. Let $F_n(x)$ be the distribution function of random variable $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/s_n$ where $s_n = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}$. (Cramér (this Zbl. **22**, 241) and Feller [Trans. Amer. math. Soc. **54**, 361—372 (1943)] investigated the asymptotic properties of $F_n(x)$ as $n \rightarrow \infty$ and $x \rightarrow \infty$ simultaneously. The author gives two theorems, one of which gives asymptotic expansion of $F_n(x)$ and the second one asymptotic expansion of density function $F'_n(x)$ when $s_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$. These theorems in certain sense constitute a step forward in comparison with Feller's and Cramér's theorems. *W. Sadowski.*

Petrov, V. V.: Über genaue Abschätzungen in Grenzwertsätzen. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **104**, 180—182 (1955) [Russisch].

Verf. gibt eine Verfeinerung der Abschätzung der Abweichung zwischen der

Verteilungsfunktion einer normierten Summe von unabhängigen Zufallsveränderlichen mit endlichem dritten Moment und der normalen Verteilungsfunktion $\Phi(x)$, welche von Ju. W. Linnik (dies. Zbl. 29, 150) gegeben wurde. — Der Hauptsatz der Arbeit lautet: Es seien $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ unabhängige Zufallsveränderliche, die alle symmetrisch in bezug auf den Punkt 0 verteilt sind. Die Verteilungsfunktion von ξ_j soll mit $F_j(x)$ bezeichnet werden. Ferner seien $E(\xi_j) = 0$, $\beta_{3j} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 dF_j(x) < \infty$, $\sigma_j^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_j(x)$, $S_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$, $A_{3n} = \sum_{j=1}^n \beta_{3j}$ und $\tilde{F}_n(x)$ die Verteilungsfunktion von $(\xi_1 + \dots + \xi_n)/S_n$. Man nehme an, daß es Konstanten $g > 0$, $G > 0$, $0 < \gamma \leq 1$, $0 < \eta < 1$ und mit n nach endlich strebende monotone positive Funktionen $\psi_0(n)$, $\psi_1(n)$, $\psi_2(n)$ gibt, für welche die folgenden Voraussetzungen gelten: (1) $S_n^2 \geq g n$, $A_{3n} \leq G n$;

$$(2) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_{|x| > \sqrt{n}/\psi_1(n)} |x|^3 dF_j(x) \leq \frac{1}{\psi_2(n)}; \quad (3) \int_{|x| \leq (1/\sqrt{n})^\eta} dF_j(x) \leq 1 - \gamma$$

für alle $j \leq n$, ausgenommen eventuell nicht mehr als $n/\psi_0(n)$ Ausnahmewerte von j . Dann gilt bei $F_j(x) = 1 - F_j(-x)$ ($j = 1, 2, \dots$) und $|x| \leq M$ ($M < \infty$ beliebig)

$$\tilde{F}_n(x) - \Phi(x) \leq c_0 (2\pi n)^{-1/2} e^{-x^2/2} (1 + \varepsilon_n(M)),$$

wobei $c_0 = \max \{1, 1/2\} \gamma^{-1}$, $\varepsilon_n(M) \rightarrow 0$, ($n \rightarrow \infty$) gleichmäßig für alle Folgen $\{\xi_j\}$, welche den Bedingungen (1)–(3) genügen. $\varepsilon_n(M)$ hängt nur von n , M und der Wahl der Funktionen $\psi_0(n)$, $\psi_1(n)$, $\psi_2(n)$ ab. — Es wird an Beispielen gezeigt, daß die obere Grenze des Satzes tatsächlich erreicht werden kann. Unter zusätzlichen Bedingungen wird noch die gleiche Abschätzung für nicht-symmetrische Verteilungsfunktionen $F(x)$ durchgeführt; sie ist nicht so scharf wie der zitierte Satz für den symmetrischen Fall.

P. Medgyessy.

Lebedinceva, E. K.: Über die Grenzverteilungen für normierte Summen unabhängiger Zufallsveränderlicher. Dopovidi Akad. Nauk ukraïn. RSR 1955, 12–14 und russ. Zusammenfassg. 15 (1955) [Ukrainisch].

Es wird die Struktur der Klasse der Grenzwertgesetze für normierte Summen (1) $s_n = \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^n \xi_i$, A_n untersucht, die für Folgen von unabhängigen Zufallsveränderlichen (2) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ gebildet sind, von denen jede einem der s verschiedenen Verteilungsgesetze unterliegt. — B. V. Gnedenko äußerte die Annahme, daß diese Klasse aus allen möglichen Kompositionen von höchstens s stabilen Gesetzen besteht. — In der Arbeit wird die Gültigkeit der Hypothese von B. V. Gnedenko für Folgen von unabhängigen Zufallsveränderlichen (2) unter folgenden Einschränkungen festgestellt: 1. eines der s Gesetze, denen die zufälligen Größen (2) unterliegen, gehört dem Gebiet der teilweisen Anziehung nur des eigenen Typus von Verteilungsgesetzen an; 2. bei passender Wahl der Konstanten $\{A_n\}$ und $\{B_n\}$ gibt es für die Summen (1) ein Grenzwertgesetz $\Phi(x)$; 3. vernachlässigt man in den Summen (1) die Summanden, die dem Verteilungsgesetz unterliegen, das dem Gebiet der teilweisen Anziehung nur des eigenen Typus oder dem Gebiet der vollen Anziehung des stabilen Gesetzes angehört, so existiert das Grenzwertgesetz für die erhaltene Folge der normierten Summen entweder nicht, oder es ist verschieden von $\Phi(x)$.

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Eberl, W.: Die Summenverteilung verketteter Alternativen. Österreich. Ingenieur-Arch. 9, 280–288 (1955).

Für einen stationären Markoffschen Prozeß mit zwei Zuständen A, B werden die Verteilung für die Anzahl der „Treffer A “ bei fester Länge n elementar exakt bestimmt, für ihre Momente Rekursionsformeln angegeben und für große n , wie durch die allgemeine Theorie bekannt, durch eine Gauß-Verteilung approximiert.

D. Morgenstern.

Blackwell, David: On transient Markov processes with a countable number of states and stationary transition probabilities. Ann. math. Statistics 26, 654–658 (1955).

Ergänzungen zu bekannten Ergebnissen betreffend asymptotisches Verhalten in stationären Markoffschen Ketten. *B. de Finetti.*

Finkel'stejn, B. V.: Grenzverteilungen der Glieder der Variationsreihe von Größen, die durch eine Markovsche Kette verbunden sind. *Vestnik Leningradsk. Univ.* 10, Nr. 11 (Ser. mat. fiz. chim. 4), 50 (1955) [Russisch].

Harris, T. E.: On chains of infinite order. *Pacific J. Math.* 5, 707—724 (1955).

L'A. considère des chaînes à liaisons complètes Z_n , à un nombre fini D d'états possibles, avec la distribution indépendante de n et avec les probabilités de transition $Q_i(u) = f_i(x) = P(Z_n = i | Z_{n-1} = u_1, Z_{n-2} = u_2, \dots)$, u étant la séquence d'entiers (u_1, u_2, \dots) et x le nombre $0, u_1 u_2 \dots$ exprimé dans la base d'énumération D . Il

attache à telle chaîne les variables aléatoires $X_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Z_{n-j}}{D^j}$, qui constituent une

chaîne de Markoff. Des relations entre ces deux processus on déduit l'existence d'une chaîne Z_n ayant les fonctions Q_i et la distribution G données. Les conditions imposées aux fonctions f_i et G sont: 1. $f_i(x) \geq 0$ ($i = 0, 1, \dots, D-1$); 2. $\sum f_i(x) = 1$; 3. $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$, où $\varepsilon_m = \sup_{i, (r \equiv y)_m} |f_i(x) - f_i(y)|$ [$(x \equiv y)_m$ signifie l'égalité des

premiers m chiffres dans les expressions de x et y]; 4. $\sum_{m=0}^{\infty} \prod_{k=0}^m (1 - \frac{1}{2} D \varepsilon_k) = \infty$;

5. $G(x) = \sum_{j=0}^{D-1} \int_0^{Dx-j} f_j(y) dG(y)$. Ensuite on détermine les formes possibles de la fonction G avec plus de détails pour une chaîne de Markoff dont les états possibles sont groupés en D parties. *G. Marinescu.*

Dugué, Daniel: Deux notions utiles en statistique mathématique. Les ensembles aléatoires bornés „en loi“ et la continuité fortement uniforme en probabilité. *Centre Belge Rech. math., Colloque Analyse statist., Bruxelles du 15 au 17 déc. 1954*, 133—141 (1955).

The author generalizes a theorem of Ky Fan [*Bull. Soc. math. France* 72, 97—117 (1944)] and obtains thereby, for continuous stochastic processes, an analogue of Weierstrass' theorem about approximations of continuous functions by polynomials. For this purpose he introduces the concept of „bounded in law“. He also discusses the concept of strong continuity, due to P. Lévy (cf. H. B. Mann, this *Zbl.* 52, 143). *S. Vajda.*

Neveu, Jacques: Jeux de Markoff et problèmes d'absorption. *C. r. Acad. Sci., Paris* 240, 2372—2374 (1955).

Gegeben sei ein eindimensionaler Markoffscher Prozeß X_t . Zu jeder Baireschen Funktion f gehört dann eine andere Hf , derart, daß $Hf(X_t)$ das maximale von X_t beschränkte Halbmartingale ist. Weiterhin wird im Falle der Ergodizität die Lösung eines Dirichletschen Problems für den infinitesimalen Operator der zugehörigen Halbgruppe mittels eines daraus abgeleiteten Erwartungswertes behauptet. *D. Morgenstern.*

Watanabe, Yoshikatsu: Aufgaben betreffend das Irrfahrtproblem. *J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. Math.* 6, 41—49 (1955).

Der Verf. behandelt folgende Fälle der Irrfahrt im Straßennetz in Verallgemeinerung der Resultate von Pólya [*Math. Ann.* 84, 141—160 (1921)]: 1. Das Straßennetz sei hexagonal. 2. Das Straßennetz bestehe aus zwei kongruenten parallel übereinanderliegenden Straßennetzen, wobei ihre Knotenpunkte durch Parallelen miteinander verbunden sind. In jedem Punkt bestehen demnach 5 gleichberechtigte Richtungen. 3. Neben $2d$ gleichberechtigten Richtungen werde eine gleichberechtigte Ruhelage für eine Zeiteinheit in einem Knotenpunkt berücksichtigt. — Angesichts der zum Teil unverständlichen deutschen Redaktion war es dem Ref. nicht möglich, alle Schlüsse zu verstehen und zu kontrollieren. *W. Saxer.*

Lévy, Paul: Propriétés asymptotiques de la courbe du mouvement brownien à N dimensions. C. r. Acad. Sci., Paris **241**, 689—690 (1955).

Weitere merkwürdige Eigenschaften der Kurve Γ eines Wiener-Lévy-Prozesses im N -dimensionalen Raum. Sie enthält unendlich viele (unendlich kleine wie auch unendlich große) Bogen, die einem willkürlichen Kurvenbogen mit beliebiger Genauigkeit homothetisch sind. Das Gesetz des iterierten Logarithmus gilt für mehrere asymptotische Schätzungen, betreffend u. a.: Homothetie-Verhältnisse im vorigen Problem; Bogenlänge (als Maximum über einbeschriebene Polygone mit fester Streckenanzahl); Inhalt der konvexen Hülle eines Bogens von Γ : Fläche (für $N = 2$) des Gebietes der Punkte, die mindestens einmal von einem Bogen von Γ umschlossen werden. B. de Finetti.

Kawata, Tatsuo: On the stochastic process of random noise. Kodai math. Sem. Reports **7**, 33—42 (1955).

Dans cette note l'A. donne quelques résultats concernant la théorie de S. O. Rice [voir Bell System techn. J. **23**, 282—332 (1944); **24**, 46—156 (1945)] suivant une méthode plus rigoureuse du point de vue mathématique. R. Theodorescu.

Dedebant, G. und E. A. M. Machado: Anwendung der erzeugenden Funktion bei der Integration zweidimensionaler Prozesse. Univ. nac. Tucumán. Revista, Ser. A **10**, 163—186 (1955) [Spanisch].

Exposition, selon les procédés de Bartlett, de la méthode d'emploi des fonctions génératrices pour déterminer les fonctions de distribution des processus discontinus. Application au processus bidimensionnel dans le problème de l'absorption d'un faisceau de photons et d'électrons, respectant le schéma élémentaire de Blackett. Corrélation avec la théorie des groupes. A. Sade.

Pompéia, Paulus A.: Distribution problems related to statistical physics. Anais Acad. Brasil. Ci. **27**, 123—136 (1955).

Die Wahrscheinlichkeit eines Verteilungszustandes sei proportional der Anzahl der Möglichkeiten, N Partikel (unterscheidbar oder auch nicht) auf M Zustände verschiedener Energien u_i ($i = 1, 2, \dots, M$) zu verteilen, wobei die Anzahlen β_u der Zustände mit $u = 0, 1, 2, \dots$ Partikeln den Grundbereich beschreiben ($\sum \beta_u = M$, $\sum u \beta_u = N$). Für gewissen Einschränkungen genügende M, N (z. B. $M^3 < N$, oder $M > \frac{1}{2} N^2$) werden die Belegungen maximaler Wahrscheinlichkeit berechnet. Die Anwendungen betreffen die zeitliche Verteilung der Entladungen von Zählrohren.

D. Morgenstern.

Charkevič, A. A. und É. L. Bloch: Über die äußerste Durchlaßfähigkeit eines Verbindungssystems (Nachrichtensystems). Radiotekhnika **10**, Nr. 2, 14—20 (1955) [Russisch].

Die Durchlaßfähigkeit eines Verbindungssystems wird definiert als die Anzahl der Nachrichten, die in der Zeiteinheit übertragen werden können. Für gewöhnlich wird ihr äußerster Wert, d. i. die maximale Anzahl der Nachrichten, die in der Zeiteinheit bei einer beliebigen kleinen Wahrscheinlichkeit eines Fehlers übertragen werden können, durch die Formel von Shannon angegeben [Proc. I. R. E. **37**, 10 (1949)]: $C = F \log_2 (1 + P/P_n)$, wo F die Spektralbreite des Signals ist, P die mittlere Leistung des Signals, P_n die mittlere Leistung der Störungen. Für diese Formel hat Shannon einen nicht ausreichend begründeten Beweis angegeben, auch gilt sie nur im Grenzfall $P/P_n \rightarrow \infty$. Mit Hilfe von Überlegungen aus der geometrischen Wahrscheinlichkeitsrechnung, bezogen auf einen n -dimensionalen Raum, wo n die Anzahl der diskreten Werte der das Signal darstellenden Funktion $f(t)$ endlicher Zeitdauer T , die zur Übertragung der Nachricht notwendig ist, bedeutet [nach Kotjelnikov (1933) ist $n = 2FT$], und anschließend Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ wird eine genauere Abschätzung für C abgeleitet:

$$F [\log_2 (1 + P/P_n) - 2] < C < F [\log_2 (1 + P/P_n) - 1].$$

Gewonnen wird sie mit Hilfe der Abschätzung des Koeffizienten q der dichtesten Packung von Kugeln im n -dimensionalen Raum:

$$1/2^{n-1} < q < (n+2)/2^{(n+2)/2},$$

dessen untere Schranke noch von Minkowski angegeben worden ist, während die obere Schranke von Blichfeldt stammt [Math. Ann. **101**, 605 (1929)]. Die gefundene Abschätzung zeigt, daß C in jedem Fall kleiner als der Wert von Shannon ist und nur im oben erwähnten Grenzfall mit ihm übereinstimmt. Dieser Wert ergibt sich hingegen als die Durchlassfähigkeit bei einer Fehlerwahrscheinlichkeit, die beliebig nahe an 1 liegt. Ergebnis: Bei beliebig großem Wachstum von P/P_n strebt der Wert der äußersten Durchlaßfähigkeit zum Wert $F \cdot \log_2 (P/P_n)$, bei dessen Erreichung die Fehlerwahrscheinlichkeit sich sprunghaft von 0 auf 1 ändert. *E. Svenson.*

Gani, J.: Some problems in the theory of provisioning and of dams. *Biometrika* **42**, 179—200 (1955).

The author synthesizes and carries forward work of Moran [A probability theory of dams and storage systems. *Austral. J. appl. Sci.* **5**, 116—124 (1954)] and Pitt [A theorem on random functions with applications to a theory of provisioning. *J. London math. Soc.* **21**, 16—22 (1946)]. He is concerned with stochastic processes of form $S(t) = I(t) - D(t) - F(t)$ where the „input“ $I(t)$ is a process with independent increments, the „output“ $D(t)$ is a function of $I(t)$, or sometimes of $I(t - T)$ where T is a lag, whereas the „overflow“ $F(t)$ is defined so as to prevent $S(t)$ from surpassing a fixed amount K . In the all-discrete case, $S(t)$ is a Markov chain, time-homogeneous if $T = 0$. The problem is to find the stationary distribution for $S(t)$. It is solved under several different assumptions about $D(t)$, $I(t)$ being always a Poisson process. *G. Elfving.*

Vorob'ev, N. N.: Kontrollierte Prozesse und Theorie der Spiele. *Vestnik Leningradsk. Univ.* **10**, Nr. 11 (Ser. mat. fiz. chim. 4), 49 (1955) [Russisch].

Vortragsauszug.

Isbell, J. R.: A class of game solutions. *Proc. Amer. math. Soc.* **6**, 346—348 (1955).

Es sei Γ ein n -Personenspiel im Sinne der Theorie von v. Neumann und Morgenstern (für die im folgenden gebrauchten Begriffe muß auf das Buch dieser Verf. verwiesen werden). Nach H. M. Gürk (unveröffentlicht) wird eine Lösung A von Γ eine Pseudo-Hauptlösung (pseudo-main solution) genannt, wenn es eine Menge \mathcal{S} von Teilmengen der Spielermenge gibt, auf deren Elemente S die Zuteilungen (imputations) $\{\alpha^s\}$ aus A eineindeutig bezogen sind, und wenn für jeden Spieler i eine feste Zahl X_i existiert derart, daß $\alpha_i^s = X_i$ für $i \in S$, $\alpha_i^s = 0$ für $i \notin S$ gilt. Verf. konstruiert zu Spielen, in denen jede $(n - k + 1)$ -elementige Teilmenge der Spielermenge eine „winning“ Teilmenge von k Spielern enthält, eine Pseudo-Hauptlösung. Es werden Klassen von Spielen angegeben, die hiernach Pseudo-Hauptlösungen besitzen. *W. Gaschütz.*

Luce, R. Duncan: k -stability of symmetric and of quota games. *Ann. of Math.*, II. Ser. **62**, 517—527 (1955).

The author continues his programme started in an earlier paper (this Zbl. **55**, 370, q. v. for definitions) and studies the stability of symmetric games, of quota games, and of simple quota games. Remarks are added about one-stable games with no (non-trivial) coalitions. *S. Vajda.*

Statistik:

• Società Italiana di Statistica, Roma: Atti della XIII e XIV Riunione Scientifica, Roma, Genaio 1953—Giugno 1954. Spoleto: S. A. Arti Grafiche Panetto & Petrelli 1955. 303 p.

Die Arbeiten werden in dies Zbl. einzeln angezeigt.

Gini, Corrado: Cause e significato della recente evoluzione della metodologia statistica. Atti XIII e XIV Riun. sci. Roma 1953—1954. 175—193 (1955).

● Hogben, Lancelot: Chance and choice by cardpack and chessboard. Vol. II. An introduction to probability in practice by visual aids. London: Max Parrish & Co. Ltd. 1955. 500 p. 70 s. net.

(Teil I, New York 1950). Das zweibändige Werk, von dem Ref. nur der zweite Band vorliegt, beabsichtigt offenbar, die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen der statistischen Methodik und Schlußweise Nicht-Mathematikern, insbesondere Anfängern, anschaulich zu erklären. Dies geschieht in der Hauptsache an Hand von Modellbeispielen aus der Theorie der Glücksspiele, die in allen Einzelheiten mit zahlreichen, größtenteils rotschwarzen Abbildungen illustriert werden, und einem erheblichen, mehr hinreichenden als notwendigen Aufwand an Worten, neuen Bezeichnungen und Symbolen. Originell ist das Werk vor allem in diesen Eigenheiten der Darstellungsweise, nicht so sehr im Stoff, der im Band 2 zweidimensionale Verteilungen, Varianzanalyse, Momenterzeugende, die auf Normalität beruhenden Stichprobenverteilungen, Signifikanzteste der Varianzanalyse, einfache Regression und Diskriminanzanalyse, Kovarianz- und Elemente der Faktorenanalyse, Stichproben aus endlichen Gesamtheiten, Polynomial- und χ^2 -Verteilung umfaßt. Den Abschluß bildet ein wichtiges und wertvolles Kapitel, in welchem Verf. die Grundgedanken der modernen statistischen Schlußweisen, Hypothesenprüfung, Schätzproblem, Sequenz-Verfahren, Entscheidungstheorie, zu analysieren und synthetisieren versucht, die Anwendbarkeit des Bayesschen Urnenschemas und die Kontroverse der beiden polaren Blickrichtungen der Schulen von R. A. Fisher einerseits und E. S. Pearson, Neyman und Wald andererseits diskutiert. Hier ist zu berichten, daß der Confidenzschluß, und zwar zur Schätzung einer unbekannten Wahrscheinlichkeit an Hand einer beobachteten Häufigkeit auf Grund asymptotischer Normalität, nicht bei Wilson, sondern bereits 1923 bei M. S. Millot erstmals auftaucht. Alles in allem stellt das Buch einen ausgesprochenen Luxus dar, sowohl was den Preis und die drucktechnische Ausstattung, als auch was die für seine Lektüre erforderliche Zeit betrifft. Wer die Mühe nicht scheut, sich in die völlig abseitige und ziemlich schwerfällige Symbolik und Nomenklatur des Verf. einzuarbeiten und in seine weitschweifigen Darlegungen zu vertiefen, wird gewiß manche didaktische Anregung gewinnen. Ob das Buch dem Anfänger und Praktiker tatsächlich den Zugang zur Stochastik erleichtert, bleibe dahingestellt.

M. P. Geppert.

● Selected papers in statistics and probability by Abraham Wald. Ed. for the Institute of Mathematical Statistics by T. W. Anderson (Chairman), H. Cramér, H. A. Freeman, J. L. Hodges jr., E. L. Lehmann, A. M. Mood and C. M. Stein. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1955, IX. 702 p. \$ 8,00.

Abraham Wald died on December 13th, 1950. His earliest publications date back to 1931 and until 1937 they dealt with geometric and econometric topics. In 1937 there appeared, in German, an article on the logical consistency of von Mises' concept of a Kollektiv. In the summer of 1938 Wald came to the USA and his first paper in English was on „Generalization of the inequality of Markoff“ (this Zbl. 20, 380). After this, nearly all his publications, including three books, dealt with statistical problems and those of probability theory. — The present book is a collection of selected papers on these topics, some written in cooperation with other authors. The first paper included is one on the Kollektiv, which summarizes results of the earlier paper mentioned above. The last one is entitled „Testing the difference between means of two normal populations with unknown standard deviations“. (See this Zbl. 66, 123.) The manuscript of this was found amongst Wald's papers. Altogether, of 103 already published papers, 50 are reproduced in this volume. His three books on the principle of mathematical inference (cf. this Zbl. 43, 341), Sequential Analysis (New York 1947) and Statistical Decision Functions (this Zbl.

40, 364) are not included. After a preface signed by the 7 members of the Committee for the Wald Memorial Volume there is a short description of Wald's life and a chapter „Discussion of Papers“. In 6 sections it discusses the deceased's contributions to various statistical and probabilistic subjects. This excellent essay is worth reading for its own sake. It is an implicit comment on Wald's genius that a discussion of his papers develops into a masterly guide to most of the recent developments in these branches of mathematics (there is a misprint on p. 11, where the reference in line 16 should be to (71), and on p. 15 the numeration of the equations is missing. Misprints in Wald's papers are, of course, reproduced as they were). [Fuller treatments of his work in statistics, geometry and econometrics have been given in three papers in the Ann. math. Statistics 23, 1-28 (1952). A full bibliography is reprinted in this memorial volume from pp. 29-33 of the same volume of the Annals.] The papers are reproduced by a photographic process on good paper, but the photograph on p. ii is rather poor. Also, the reviewer would have liked to find some indication, in connection with the bibliography, of which papers have been reproduced. Altogether, this publication is a worthy monument to the memory of a great mathematician who has, in an amazingly short time, contributed so much to our science.

S. Vajda.

Lah, I.: Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik. Mitteil.-Bl. math. Statistik 7, 203—212 (1955).

In Analogie zu den Stirlingzahlen 1. und 2. Art führt Verf. Koeffizienten S_n^v ein, die den Übergang von nach oben gebildeten Faktoriellen zu nach unten gebildeten Faktoriellen und umgekehrt ermöglichen:

$$\chi(\chi+1)(\chi+2)\cdots(\chi+n-1) = \sum_{v=1}^n (-1)^n S_n^v \chi(\chi-1)\cdots(\chi-v+1).$$

Diese Koeffizienten genügen der Rekursionsformel $S_{n+1}^v = -S_{n+1}^{v-1} - (n+v) S_n^v$, deren Lösung $S_n^v = (-1)^n \frac{n!}{v!} \binom{n-1}{v-1}$ ist. Die Koeffizienten werden in Zusammenhang mit der Operation $\chi^2 d/d\chi$ und mit erzeugenden Funktionen und faktoriellen Momenten gebracht. [Druckfehler in Formel (16).]

O. Ludwig.

Schelling, Hermann von: Statistische Modelle als Hilfsmittel der Naturbeschreibung. Mitteil.-Bl. math. Statistik 7, 173—192 (1955).

In der sowohl durch allgemeine Gesichtspunkte wie durch nützliche Resultate ausgezeichneten Arbeit werden mehrere statistische Modelle beschrieben, die der Verf. in den letzten Jahren benutzt und aufgestellt hat, z. B.: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist p per Zeiteinheit; wenn es eingetreten ist, kann es in den nächsten k Zeiteinheiten nicht wieder eintreten. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $w(m; n, k, p)$ daß das Ereignis das m^{te} von $t = 0$ an ist. Oder: Betrachtet werden „zufällige“ Bewegungen in der Ebene. Die in bestimmtem Sinne zu verstehenden „häufigsten Bahnen eines Partikels“ werden charakterisiert.

H. Geiringer.

Rios, Sixto: Problems of maxima and minima related to inference in finite populations. Trabajos Estadíst. 6, 3—30 (1955) [Spanisch mit engl. Zusammenfassg.]

Une population de N éléments (3) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, ($0 \leq x_i \leq M$) a pour moyenne (1) $\sum_{i=1}^N x_i = N\mu$, et l'on cherche le maximum de la variance (2) $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$. Ce maximum est recherché en considérant les éléments de cette population comme définissant un point de coordonnées x_1, x_2, \dots, x_N , dans l'espace à N dimensions. Si μ est constant, le point en question est situé sur l'hyperplan (1) et à l'intérieur d'un parallélépipède; soit S ce domaine. La relation (2) est l'équation d'une hypersphère de centre $(\mu, \mu, \mu, \dots) = P$ situé dans l'hyperplan (1) et de rayon

$\sigma \}^N$. Le maximum de σ sera défini comme la distance de P au point du domaine S le plus éloigné de P . Une solution analytique est ensuite donnée, mais en partant de $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_1^N (x_i^2 - \mu^2)$; puis en supposant $x_i = y_i + \frac{M}{2}$ avec $|y_i| < M/2$ et $\sigma^2 = (1/N) \sum (y_i - \mu')^2$; $\sum y_i = N \mu'$. Dans une 5^e partie le maximum de la variance est calculé et on trouve la valeur $[1/(N-1)] (M-\mu)^2$. Le mémoire se termine par l'étude du maximum du moment du 3^{ème} ordre lorsque la moyenne et la variance d'une population de N observations sont fixées. On trouve $\alpha^3 = [(N-2) \sqrt{N-1}] \sigma^3$. Suivent les observations et autres manières d'exposer les choses par les Professeurs Béjar et Zorua, et l'annonce de nouveaux résultats.

A. Sade.

Bennett, B. M.: The cumulants of a sample mean from a finite population of first n integers. *Trabajos Estadist.* 6, 31—32 (1955).

Verf. liest aus Resultaten von J. B. S. Haldane und C. A. B. Smith (dies. Zbl. 30, 210) für die Verteilung des Mittelwertes einer Stichprobe von n verschiedenen, aus den Zahlen $1, 2, \dots, N$ zufällig ausgewählten ganzen Zahlen die Kumulanten-
Erzeugende ab als $K(t) = (N+1)t/2 + \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_{2r} t^{2r}/(2r)!$ mit

$$\kappa_{2r} = B_r [s_{2r}(N) - s_{2r}(n) - s_{2r}(N-n)]/[2r n^{2r}],$$

wo $s_{2r}(m) = 1^{2r} + 2^{2r} + \dots + m^{2r}$ und B_r Bernoulli-Zahlen bedeuten.

M. P. Geppert.

James, G. S.: Cumulants of a transformed variate. *Biometrika* 42, 529—531 (1955).

Two theorems are proved, the more general being the following: If $y_i = f_i(x_1, \dots, x_p)$, ($i = 1, 2, \dots$) are formally expansible as $y_h = c_h + \sum c_{ih} x_i + \sum c_{ihj} x_i x_j + \dots$ and if the q -th order cumulant of x_1, \dots, x_{i_0} is of order $\nu - q + 1$ for $i_1, \dots, i_q = 1, \dots, p$ and $q = 1, 2, \dots$ then the same holds for the cumulants of the y_h . As an example, $x = \chi^2/\nu + 1$, $y = \sqrt{1+x}$ is mentioned. *S. Vajda.*

Elfving, G.: An expansion principle for distribution functions with application to Student's statistic. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I* 204, 8 p. (1955).

The author introduces the following problem: Let x be a r. v. with c. d. f. $F(x)$; let y_n ($n = 1, 2, \dots$) be stochastic vectors, independent of x , with distribution functions $G_i(y_i)$; finally, let $t(x, y_n)$ tend to x , for all x , as y_n tends to y_0 . It is required to find a good approximation to the c. d. f. of $t(x, y_n)$. — The paper studies, in particular, Student's $t = x/s_n$ and derives the result that $t(n^{-1/2}(n + t^2/2))^{-1/2}$ is approximately normally distributed. *S. Vajda.*

Mosch, A. D. du: On the average uncertainty of a continuous probability distribution. *Appl. sci. Research, B* 4, 469—473 (1955).

Bauer, R. K.: Zur nichtparametrischen Ableitung der Streuungen des multiplen und des partiellen Korrelationskoeffizienten, sowie des multiplen Regressionskoeffizienten im Falle der Nullhypothese. *Mitteil.-Bl. math. Statistik* 7, 220—223 (1955).

Vorbereitende Mitteilung der Ergebnisse der Verallgemeinerung der Formeln von O. Anderson (dies. Zbl. 65, 122), die Varianz des multiplen und partiellen Korrelations- und des multiplen Regressionskoeffizienten betreffend, auf eine endliche Anzahl von Variablen. *O. Ludwig.*

Lord, Frederic M.: Nomograph for computing multiple correlation coefficients. *J. Amer. statist. Assoc.* 50, 1073—1077 (1955).

Verf. konstruiert ein Nomogramm zur Bestimmung des multiplen Korrelationskoeffizienten $R_{1,23}$ aus den gewöhnlichen r_{12} , r_{13} und r_{23} , indem er die Schlüsselgleichung auf eine passende Determinantenform bringt. *O. Ludwig.*

Burford, Thomas M.: Qualitative evaluation of correlation coefficients from scatter diagrams. *J. appl. Phys.* 26, 56—57 (1955).

Bezeichnet $d(x, y)$ für eine beliebige 2-dimensionale Verteilung $f(x, y)$ mit Mittelwerten m_1, m_2 , Varianzen σ_1^2, σ_2^2 und Korrelation ρ den kürzesten Abstand des Punktes (x, y) von der unter dem Winkel Φ gegen die Abszissenachse durch den Schwerpunkt (m_1, m_2) gehenden Geraden $L(\Phi)$, so wird bekanntlich das „Trägheitsmoment“ der Verteilung bezüglich L ,

$$E(d^2) = \sigma_1^2 \sin^2 \Phi - 2\rho \sigma_1 \sigma_2 \cos \Phi \sin \Phi + \sigma_2^2 \cos^2 \Phi,$$

minimal bzw. maximal für die beiden durch $\tan(2\Phi) = 2\rho \sigma_1 \sigma_2 / (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)$ bestimmten Winkel $\Phi_1, \Phi_2 = \Phi_1 + \pi/2$. Der geometrische Ort $r = C/\sqrt{E(d^2)}$ aller Punkte, deren Entfernung vom Schwerpunkt auf der Geraden $L(\Phi)$ umgekehrt proportional $\sqrt{E(d^2)}$ ist, geht durch Rückkehr von den Polarkoordinaten r, Φ zu den Cartesischen $x = m_1 + r \cos \Phi$, $y = m_2 + r \sin \Phi$ über in Cauchys Momenten-Ellipse

$$(x - m_1)^2/\sigma_1^2 - 2\rho(x - m_1)(y - m_2)/(\sigma_1 \sigma_2) + (y - m_2)^2/\sigma_2^2 = C^2/(\sigma_1^2 \sigma_2^2).$$

Aus dem quadrierten Verhältnis der kleinen und großen Halbachse derselben, $R = E(d^2)|_{\Phi_1}/E(d^2)|_{\Phi_1+\pi/2}$, gewinnt man eine lineare Gleichung für ρ , die im Spezialfall $\sigma_1 = \sigma_2$ die Lösung $\rho = (1 - R)/(1 + R)$ liefert. Bei Binormalverteilung fällt obige Trägheits-Ellipsenschar zusammen mit derjenigen der (Gleichwahrscheinlichkeits-) Niveauinlinien. Das obige allgemeinere Resultat enthält daher als Spezialfall das von Middleton und G. R. Sugar [J. appl. Phys. **25**, 354—357 (1954)] vorgeschlagene Verfahren zur groben Bestimmung von ρ aus dem konstanten Achsenverhältnis der Niveau-Ellipsen bei vorausgesetzter Binormalverteilung.

M. P. Geppert.

Noether, Gottfried E.: On a theorem of Pitman. Ann. math. Statistics **26**, 64—68 (1955).

The author gives a generalization of Pitman theorem (vide G. E. Noether, this Zbl. **37**, 366) on the relative efficiency of two tests. The definition of relative efficiency is following: „Given two tests of the same size of the same statistical hypothesis, the relative efficiency of the second test with respect to the first is given by the ratio n_1/n_2 , where n_2 is the sample size of the second test required to achieve the same power for a given alternative as is achieved by the first test with respect to the same alternative when using a sample of size n_1 “ (p. 64). Both theorems Pitman's and the author's deal with asymptotic relative efficiency. The author gives also a comparison of two definitions of relative efficiency given by Pitman and Blomquist.

W. Sadowski.

Dantzig, D. van: Sur les ensembles de confiance généraux et les méthodes dites non paramétriques. Centre Belge Rech. math., Colloque Analyse statist., Bruxelles du 15 au 17 déc. 1954, 73—91 (1955).

Ist Ω die Menge der zulässigen Verteilungsfunktionen H und $t = t(x_1, \dots, x_n)$ ein zur Prüfung der Hypothese H_0 aus Ω dienendes Kriterium, so wird die zum Signifikanzniveau α gehörige „Vertrauensmenge“ ω gebildet aus allen H von Ω , für die das beobachtete t unterhalb der H entsprechenden kritischen Grenze t_α liegt, also die bei Anwendung des Kriteriums nicht abgelehnt werden. Mit Hilfe der Cantellischen Abschätzung

$$\Pr \{t - \theta(H) \geq c|H\} \leq \sigma^2(H)/(c^2 + \sigma^2(H)),$$

wo $\theta(H)$, $\sigma^2(H)$ Erwartungswert und Varianz von t bei Geltung von H bedeuten, wird ω in zwei Schranken $\omega_* \subset \omega \subset \omega^*$ eingeschlossen, die sich bei Kenntnis höherer Momente oder einer asymptotisch geltenden Grenz- (z. B. Normal-) Verteilung verengern lassen. Mittels der durch

$$x_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \text{sgn}(x_i - x_j) = 1 \text{ für } x_i > x_j, = 0 \text{ für } x_i = x_j, = -1 \text{ für } x_i < x_j,$$

definierten Vorzeichenfunktion stellt Verf. den Wilcoxon-Test, Kendalls Rangkorrelation in einfachster Form $\left(\sum_{i>j} x_{ij}\right)$ und deren Verallgemeinerung durch

T. J. Terpstra [Math. Centrum Amsterdam, Statist. Afdeling, Rapport S 73 (M 28) (1952)] und C. van Eeden und J. Hemelrijk [Indagationes math. **17**, 191—198, 301—308 (1955)] als lineare Funktionen, Kendalls allgemeine Rangkorrelation und deren Verallgemeinerung durch T. J. Terpstra [Math. Centrum Amsterdam, Statist. Afdeling, Rapport S 145 (M 49) (1954)] als bilineare Funktionen, ferner die k -Stichproben-Teste von W. H. Kruskal (dies. Zbl. **48**, 367), T. J. Terpstra (dies. Zbl. **56**, 375) und P. J. Rijkooft (dies. Zbl. **47**, 132), Spearmans Rangkorrelation, M. Friedmans [J. Amer. Statist. Assoc. **32**, 675—699 (1937)] Test für m Rangordnungen und den viele der genannten Tests als Spezialfälle enthaltenden Test von A. Benard und Ph. van Elteren (dies. Zbl. **51**, 368) als quadratische Funktionen, schließlich W. Hoeffdings (dies. Zbl. **32**, 420) Test als biquadratische Funktion von Ausdrücken der Form x_{ij} dar. M. P. Geppert.

Hemelrijk, J.: Exemple d'application des méthodes non paramétriques et un nouveau test pour l'égalité de plusieurs probabilités. Centre Belge Rech. math., Colloque Analyse statist., Bruxelles du 15 au 17 déc. 1954, 93—111 (1955).

Ein Prüfer soll n Gegenstände C_i ($i = 1, \dots, n$) mit den ihm unbekannten, steigend geordneten meßbaren Qualitäten $Q_1 \leq Q_2 \leq \dots \leq Q_n$ durch Billigen bzw. Ablehnen beurteilen. Ist $x_i = 1$ bzw. $= 0$ je nachdem, ob er C_i billigt oder ablehnt, und $x = \sum_{i=1}^n x_i$ die Gesamtzahl der von ihm gebilligten Stücke, so läßt sich seine Urteilsfähigkeit durch das zwischen 0 und 1 liegende Maß

$$W_1 = (V - V_{\min}) / (V_{\max} - V_{\min})$$

messen mit $V = \sum_{i=1}^n x_i Q_i$. Bei vollkommener Urteilsfähigkeit, d. h. unter der Nullhypothese H_0 , daß die x gebilligten Stücke eine zufällige Stichprobe (ohne Zurücklegen) aus den n Stücken C_i bilden, ist V mit

$$E(V|H_0) = x\mu, \quad \text{var}(V|H_0) = x(n-x)\sigma^2/(n-1),$$

wobei $\mu = \sum_i Q_i/n$, $\sigma^2 = \sum_i (Q_i - \mu)^2/n$, nach einem Satz von W. G. Madow

(dies. Zbl. **37**, 86) für $n, x \rightarrow \infty$ unter gewissen Bedingungen asymptotisch normal verteilt. Den somit auf V bei gegebenem x fußenden bedingten Test für H_0 deutet Verf. als E. J. G. Pitmans (dies. Zbl. **19**, 35) Zwei-Stichproben-Test für die Q' bzw. Q'' der x gebilligten bzw. $n-x$ zurückgewiesenen Stücke, und, wenn speziell die Q_i Ordnungszahlen (Rangnummern) sind, als Wilcoxon-Test bzw. Kendalls Rang-Korrelation τ . Hat jedes C_i die Wahrscheinlichkeit p_i , durch den Prüfer gebilligt zu werden, so ist H_0 äquivalent mit der Hypothese gleicher Erfolgswahrscheinlichkeiten: $H'_0: p_1 = p_2 = \dots = p_n$, zu deren Prüfung C. van Eeden [Statist. Dept. Math. Centre, Amsterdam Report S 157 (V P 3) (1954)] und Verf. [C. van Eeden und J. Hemelrijk, Indagationes math. **17**, 191—193, 301—308 (1955)] das unter einfachen Bedingungen asymptotisch normal verteilte Kriterium

$V' = \sum_{i=1}^n g_i x_i$ entwickelt haben, wobei die Gewichte g_i mit $\sum_{i=1}^n g_i = 0$,

$\sum_{i=1}^n g_i^2 = 1$ so zu wählen sind, daß der Test gegen bestimmte Alternativhypothesen

konsistent sei. In Ermangelung verteilungsfreier Vergleichsmethoden für Kendalls τ und Wilcoxons Test, baut Verf. die Prüfung der Annahme H_0 , daß zwei Prüfer A, B gleiche Urteilsfähigkeiten aufweisen, unter Beschränkung auf die m Stücke C_1^*, \dots, C_m^* ,

die von A, B verschieden beurteilt wurden, auf das durch $y = \sum_{j=1}^m y_j$ bedingte

Kriterium $V^* = \sum_{j=1}^m y_j Q_j^*$ auf, wobei $y_j = 1$ bzw. 0 je nachdem C_j^* von A gebilligt und von B abgelehnt worden ist bzw. umgekehrt. M. P. Geppert.

Huzurbazar, V. S.: On the certainty of an inductive inference. Proc. Cambridge philos. Soc. **51**, 761—762 (1955).

It is proved that, if $P(q|H) \neq 0$ and if p_1, \dots are verified consequences of q , then (*) $\lim_{n, m \rightarrow \infty} P(p_{n+1}, \dots, p_{n+m} | p_1, p_2, \dots, p_n, H) = 1$, i. e., repeated verifications of the consequences of a hypothesis with non-zero prior probability will make it almost certain that any number of further consequences of it will be verified. — As the author points out, when $P(q|H) = 0$, (*) may not be true, although H. Jeffreys' result $\lim_{n \rightarrow \infty} P(p_{n+1} | p_1, \dots, p_n, H) = 1$ may still hold.

S. Vajda.

Kraft, Charles: Some conditions for consistency and uniform consistency of statistical procedures. Univ. California Publ. Statist. **2**, 125—142 (1955).

Anknüpfend an den von S. Kakutani (dies. Zbl. **30**, 23) entwickelten Begriff der Orthogonalität zweier Verteilungen, untersucht Verf. in einer langen Reihe von Sätzen ohne jegliche Annahme über Unabhängigkeit oder Verteilungsgleichheit der Beobachtungen Bedingungen für die Konsistenz statistischer Methoden, und zwar für gewöhnliche und gleichmäßige Konsistenz von Testen einfacher und zusammengesetzter Hypothesen, für diejenige von Wahrscheinlichkeits-Verhältnis-(likelihood-ratio) Testen und für diejenige der plausibelsten (maximum-likelihood) Schätzer.

M. P. Geppert.

Koroljuk, V. S.: Asymptotische Entwicklungen für die Verträglichkeitskriterien von A. N. Kolmogorov und N. V. Smirnov. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **19**, Nr. 2, 103—124 (1955) [Russisch].

Verf. gibt den ausführlichen Beweis seiner schon publizierten Resultate (s. dies. Zbl. **56**, 129). — Bemerkungen: I. Die Sätze 1. und 3. sind mit den entsprechenden Sätzen einer Arbeit von B. V. Gnedenko (dies. Zbl. **46**, 351) unvereinbar. Die Sätze des Verf. sind richtig; die Arbeit von Gnedenko enthält einen Rechenfehler. — II. Die Folgerungen unter den Formeln (46) und (48) auf Seite 121 bedürfen einer Berichtigung.

K. Sarkadi.

Rajski, C.: On the verification of hypotheses concerning two populations consisting of items marked by attributes. Zastosowania Mat. **2**, 179—188, russische und engl. Zusammenfassg. 189 (1955) [Polnisch].

Two general populations contain items marked in a definite manner. The fractions of those items are w_1 and w_2 respectively. Samples are taken from both populations (sample sizes n_1 and n_2). In the samples there are r_1 and r_2 marked items. The author gives a certain method of verification of hypotheses concerning relations between w_1 and w_2 when there are known numbers: n_1, n_2, r_1, r_2 . The method is based on the Neyman-Pearson theory. Note: The same problem was considered by the author from the point of view of the Bayes theory, in his paper this Zbl. **56**, 369.

W. Sadowski.

Fix, Evelyn and J. L. Hodges jr.: Significance probabilities of the Wilcoxon test. Ann. math. Statistics **26**, 301—312 (1955).

The authors present tables for the Wilcoxon unpaired two-sample test [F. Wilcoxon, Biometrics **1**, 80—83 (1945)]. If $m \leq n$ and if $R_1 < R_2 < \dots < R_m$ represent a random sample (without replacement) drawn from the first $m+n$ positive integers then $U = S_1 + S_2 + \dots + S_m$ is statistic in Wilcoxon test, where $S_i = R_i - i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Let $\pi(u, m, n)$ be the distribution function of U . It is known the connection of π with the so called partition function. Namely if $A(u, m, n)$ denotes the number of ways in which it is possible to choose exactly m nonnegative integral summands, none greater than n , and whose sum does not exceed u , then $\pi(u, m, n) = A(u, m, n) / \binom{m+n}{m}$. $A(u, m, n)$ can be in a simple way tabulated but it would be a triple-entry table. Such tables are not useful.

Wilcoxon remarked that for small u one can use a double-entry table because for small u $A(u, m, \infty) = A_0(u, m)$. The authors give tables which enable to obtain values of A for all values of u (not only small). There is given the relation

$$A(u, m, n) = A_0(u, m) - A_1(u - n - 1, m - 1) + A_2(u - 2n - 3, m - 2) - A_3(u - 3n - 6, m - 3) + \dots$$

(the series is extended until the first argument becomes negative) where

$$A_k(u, m) = \sum_{v=0}^u A_0(v, k) A_0(u - v, m - k) - \sum_{v=0}^u A_0(v - 1, k) A_0(u - v, m - k)$$

for $k > 0$. Values of $A_0(u, m)$ are tabulated for $u \leq 100$ and $m \leq 12$ and values of $A_2(u, m)$ are tabulated for $m \leq 11$ and $u \leq 75$. Values of A_1 and A_3 can be easily computed from the table of A_2 . There is also considered the problem of approximation for $m > 12$.

W. Sadowski.

Kac, M., J. Kiefer and J. Wolfowitz: On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods. *Ann. math. Statistics* **26**, 189—211 (1955).

The authors study several tests based on various „distance“ criteria. The tested hypothesis is that distribution function of observable random variable is an element of a given class of distribution functions. Especially the authors deal with the case when that class is the class of normal distributions. Let $\delta(F, G) = \sup_y |F(y) - G(y)|$ and let F and G be distribution functions. Let $N(y|\mu, \sigma^2)$ be a normal distribution function and $G_n^*(y)$ an empirical distribution function. The authors deal mainly with the tests of normality based on the following statistics:

$$v_n = \delta(G_n^*(y), N(y|\bar{x}, s^2)) \quad \text{and} \quad w_n = \int [G_n^*(y) - N(y|\bar{x}, s^2)]^2 d_y N(y|\bar{x}, s^2).$$

It is shown that the asymptotic power of that tests is greater than that of χ^2 test.

W. Sadowski.

Wald, Abraham: Testing the difference between the means of two normal populations with unknown standard deviations. Selected papers in statistics and probability by Abraham Wald 669—695 (1955).

Let x_{ij} ($j = 1, \dots, N$ and $i = 1, 2$) be independent observations in two samples of size N , from two normal populations of unknown means and variances. In order to test the equality of the means, the author considers tests satisfying certain commonsense conditions and restricts thereby the critical regions of his tests to those given by

$$|\sqrt{N}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sqrt{s_1^2 + s_2^2}| \geq \Phi(s_2^2/s_1^2)$$

where $\bar{x}_1, \bar{x}_2, s_1^2$, and s_2^2 are the usual unbiased estimates of means and variances. Φ is a function to be suitably chosen, so that the size of the region (i. e. the probability of incorrect rejection) is bounded from above by a given constant, whatever the true ratio of the variances. The author studies the cases $\Phi = \text{constant}$ and $\Phi = c - c_1(s_2^2/s_1^2)/(1 + s_2^2/s_1^2)^2$ and finds that the latter leads to a size which is nearly constant. He adds remarks concerning the existence of a function Φ for which the size is identically constant.

S. Vajda.

Ihm, Peter: Ein Kriterium für zwei Typen zweidimensionaler Normalverteilungen. *Mittel.-Bl. math. Statistik* **7**, 46—52 (1955).

Im Falle der gemeinsamen Normalverteilung zweier Merkmale soll die Nullhypothese H_0 getestet werden, daß die Momentenmatrix ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist. Als Prüfgröße Z benutzt der Verf. bei N vorliegenden unabhängigen Messungen die $N/2$ -te Wurzel aus dem Verhältnis der maximalen Likelihood unter H_0 zur maximalen Likelihood bei beliebiger Momentenmatrix. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von Z ist bis auf den Faktor $Z^{N/2-2}$ eine hypergeometrische Funktion, die außer von N nur noch von dem maximalen Korrelationskoeffizienten ρ abhängt,

der durch orthogonale Transformation der Merkmale erreichbar ist; im Falle der Nullhypothese ist die Wahrscheinlichkeitsdichte eine Potenz von Z ; $0 \leq Z \leq 1$. Für die Irrtumswahrscheinlichkeiten erster Art $\alpha = 0,01$ und $0,05$ sind die Schranken für Z bei $N = 3, 4, \dots, 30, 40, 60, 120$ tabuliert. Eine Abbildung zeigt die Irrtumswahrscheinlichkeit zweiter Art in Abhängigkeit von σ^2 für $N = 10, 20, 30$ und 100 , so daß für diese N -Werte der Indifferenzbereich des Tests abgelesen werden kann.

H. Richter.

Greenwood, J. Arthur and David Durand: The distribution of length and components of the sum of n random unit vectors. *Ann. math. Statistics* **26**, 233—246 (1955).

Consider a set of n points ξ_v on a unit circle which are assumed to be a sample from a distribution having the p. d. f. $g(\xi)$, where $0 \leq \xi < 2\pi$. The n random unit vectors have the components $\sin \xi_v$, $\cos \xi_v$ and we set $V = \sum \cos \xi_v$, $W = \sum \sin \xi_v$, $R = \sqrt{V^2 + W^2}$. The paper aims at applying the statistics V and R as tests for certain assumptions on $g(\xi)$. In particular the case of uniform distribution is considered: $g(\xi) = \frac{1}{2}\pi$ and, more generally, v. Mises' distribution [*Phys. Z.* **19**, 490—500 (1918)], where

$$g(\xi) = (2\pi J_0(k))^{-1} \cdot e^{k \cos(\xi - \alpha)}, \quad \tan \alpha = W/V,$$

from which the uniform distribution is obtained for $k = 0$. The paper is based on previous work by Gumbel, Greenwood and Durand, „The circular normal distribution; theory and tables“ (see this *Zbl.* **53**, 95). „Circular normal distribution“ is the name introduced by the three authors for v. Mises' distribution.

H. Geiringer.

Méric, Jean: Sur une expression de la fonction $K(x, y)$ de Pólya liée au test de Wald. *C. r. Acad. Sci., Paris* **241**, 1255—1257 (1955).

With reference to a paper by Pólya (this *Zbl.* **32**, 41) the author gives an expression for $K(x, y)$, the number of different paths from $(0, 0)$ to (x, y) which do not leave a strip T , that contains all points satisfying $-h_1 + s(x + y) < x < h_2 + s(x + y)$. Here s is rational and the values x and y are integers ≥ 0 . The expression is a symbolic polynomial in E (defined by $Ef(x) = f(x + 1)$) and depends linearly on the numbers of paths to points outside, but following immediately on a point of T in the y -direction.

S. Vajda.

Méric, Jean: Sur la relation de récurrence de Pólya liée au test de Wald. *C. r. Acad. Sci., Paris* **241**, 1377—1380 (1955).

Continuing the study reviewed above, the author derives a general recurrence relation for $K(x, y)$, expressed by a determinant in powers of the symbol E .

S. Vajda.

Oderfeld, J.: On sampling inspection with a two-sided criterion. *Zastosowania Mat.* **2**, 210—220, russische und engl. Zusammenfassg. 220—224 (1955) [Pólnisch].

The author deals with the statistical quality control of objects whose property can be expressed by a certain number X . The item is considered as good when X is contained in certain limits D and G given a priori i. e. $D \leq X \leq G$. In another case the item is considered as defective. The ratio of number of defectives in a lot to the total number of items is called percent defective of the lot. The author considers such procedure that a lot is accepted when $\bar{x} - ks \geq D$ and $\bar{x} + ks \leq G$ simultaneously where \bar{x} and s are sample mean and sample standard deviation respectively. In this way the sampling procedure is determined by two numbers, k and n (sample size). Assuming that X is normal distributed the author gives a numerical method which enables the calculation of operating characteristic function of sampling procedure.

W. Sadowski.

Yates, F.: The use of transformations and maximum likelihood in the analysis of quantal experiments involving two treatments. *Biometrika* **42**, 382—403 (1955).

Zur Beurteilung der Frage, ob zwei verschiedenen „Behandlungen“ verschiedene Wahrscheinlichkeiten eines zu beobachtenden Merkmals entsprechen, werden k Versuche durchgeführt, deren Resultate sich in k (2×2)-Tafeln auf Grund der Doppel-Alternative: Behandlung 1 bzw. 2 und Merkmal bzw. Nicht-Merkmal, d. h. in k Häufigkeitspaaren $p_{1r} = n'_{1r} n_{1r}$, $p_{2r} = n'_{2r} n_{2r}$ mit $n_{1r} + n_{2r} = n_r$, $n'_{1r} + n'_{2r} = n'_r$, ausdrücken. Nach kurzer Kritik an Fishers auf den k einzelnen Überschreitungswahrscheinlichkeiten beruhender Kombination der k unabhängigen Tests (vgl. nächstes Referat) erörtert Verf. zunächst die großen Stichproben angemessene, auf

$$\chi_r^2 = n_r \{n'_{1r} (n_{2r} - n'_{2r}) - n'_{2r} (n_{1r} - n'_{1r})\}^2 / [n_{1r} n_{2r} n'_r (n_r - n'_r)]$$

fußende Prüf- und Schätzmethodik, sodann die Anwendung des Prinzips der maximalen Plausibilität (likelihood) auf die beliebig (insbesondere durch Logit- und Loglog-Transformation) transformierte Variable $y = q(p)$ und die Bestimmung entsprechender Schätzwerte aus den Normalgleichungen; hieraus folgen Methoden zur Signifikanzprüfung und Schätzung der Behandlungsdifferenz und ihres Standardfehlers, zur Signifikanz-Prüfung der Empfindlichkeitsunterschiede zwischen den Versuchen und zur Prüfung der restlichen Unterschiede in den Behandlungsdifferenzen. Die Methodik wird an Beispielen illustriert.

M. P. Geppert.

Yates, F.: A note on the application of the combination of probabilities test to a set of 2×2 tables. *Biometrika* 42, 404—411 (1955).

Verf. untersucht die Anwendbarkeit von R. A. Fishers allgemeiner Methode der Zusammenfassung der in k unabhängigen Signifikanztesten erhaltenen Überschreitungswahrscheinlichkeiten P_j zu einem kombinierten $\chi^2 = -2 \sum_{j=1}^k \ln P_j$ mit $2k$ F. G. auf den Fall von k (2×2)-Tafeln (vgl. vorstehendes Referat). Im Gegensatz zu den von E. S. Pearson (dies. Zbl. 40, 75) und H. O. Lancaster (dies. Zbl. 34, 229) empfohlenen Verfahren, nach welchen jedes einzelne, auf Grund einseitiger Prüfung der Nullhypothese H mit der hypergeometrischen Verteilung gewonnene $P_j = P_a(H)$, wobei a der beobachtete Wert der hypergeometrisch verteilten Variablen ist, ersetzt wird durch einen dem Intervall $(P_a(H), P_{a+1}(H))$ zufällig entnommenen Zwischenwert $P_{a+\theta}(H)$ bzw. durch einen aus $P_a(H)$ und $P_{a+1}(H)$ sich eindeutig bestimmenden Mittelwert, schließt Verf. aus systematisch gewählten Beispielen, daß es in praxi, selbst bei kleinen Erwartungswerten in einzelnen Fächern, ratsam ist, die aus den unkorrigierten χ_j^2 -Werten der k (2×2)-Tafeln resultierenden einseitigen Restwahrscheinlichkeiten P_j nach Fishers Vorschrift zu kombinieren. Außerdem empfiehlt Verf. als Standard-Kriterium die Summe der k einzelnen χ_j^2 -Werte unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen. Im übrigen wird die Effizienz der Test-Kombinations-Methodik bezweifelt.

M. P. Geppert.

Stuart, Alan: A test for homogeneity of the marginal distributions in a two-way classification. *Biometrika* 42, 412—416 (1955).

Armsen, P.: Tables for significance tests of 2×2 contingency tables. *Biometrika* 42, 494—511 (1955).

Verf. tabuliert den ursprünglich einseitigen, auf der hypergeometrischen Verteilung

$$p(d | B, S, N) = \binom{S}{d} \binom{R-d}{B-d} / \binom{N}{B}, \quad (d = 0, 1, \dots, B)$$

beruhenden direkten R. A. Fisher-Test für die Nullhypothese der stochastischen Unabhängigkeit in der (2×2)-Contingenztafel mit 4 festen Randsummen A, B, R, S ($A + B = R + S = N$) für $N \leq 50$ und Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ und $\alpha = 0,01$ einseitig und zweiseitig, wobei nebeneinander zwei verschieden definierte zweiseitige kritische Bereiche verwendet werden: der eine entsteht durch Aufsummierung der Wahrscheinlichkeiten nach zunehmender Größe, gleichgültig von welchem Ende her; der andere durch Aufsummierung der Wahrscheinlichkeiten von dem der

Beobachtung d entsprechenden Ende her und gleichzeitiger Aufsummierung vom anderen Ende her, wobei die zweite Summe jeweils unterhalb der ersten bleiben muß. Jedem beobachteten d entspricht eine Tafel, in der in Spalte $x = b$, $y = c - b$ die kritischen Grenzen für $a - d$ abzulesen sind.

M. P. Geppert.

Leslie, P. H.: A simple method of calculating the exact probability in 2×2 contingency tables with small marginal totals. *Biometrika* **42**, 522–523 (1955).

Bei R. A. Fishers exaktem direktem Test für die (2×2) -Kontingenztafel mit beobachteter Anzahl x in einem Felde ist bekanntlich als Überschreitungswahrscheinlichkeit die Summe $\sum_{j=0}^x P(j)$ bzw. $\sum_{j=x}^{n_B} P(j)$ der hypergeometrischen Verteilung

$P(x) = \binom{n_A}{x} \binom{N - n_A}{n_B - x} / \binom{N}{n_B}$ zu berechnen, wobei $n_B \leq n_A \leq \frac{1}{2} N$ sei. Verf. empfiehlt bei kleinem N , aus Tafeln der Binomialkoeffizienten $\binom{n_A}{x}$ und $\binom{N - n_A}{n_B - x}$ für alle möglichen x zu entnehmen, in zwei gegenläufigen Spalten nebeneinander zu schreiben und ihre kreuzweise gebildeten Produkte aufzusummieren. Kennern des Fisher-Testes ist das Verfahren vermutlich längst geläufig.

M. P. Geppert.

Haldane, J. B. S.: The rapid calculation of χ^2 as a test of homogeneity from a $2 \times n$ table. *Biometrika* **42**, 519–520 (1955).

Zur Berechnung von $\chi^2 = (A B)^{-1} \sum_{r=1}^n (a_r B - b_r A)^2 s_r^{-1}$ bei der Homogenitätsprüfung einer $(2 \times n)$ -Tabelle $\left(\sum_r a_r = A, \sum_r b_r = B, a_r + b_r = s_r, A + B = N \right)$ empfiehlt Verf., wenn $A > B$, die exakte Vereinfachung

$$\chi^2 = N^2 A^{-1} B^{-1} (h + k)^{-2} \left\{ \sum_r (h a_r - k b_r)^2 s_r^{-1} - (h A - k B)^2 N^{-1} \right\}$$

und deren Näherung

$$\chi^2 \sim (h k)^{-1} \left\{ \sum_r (h a_r - k b_r)^2 s_r^{-1} - (h A - k B)^2 N^{-1} \right\},$$

wo die natürlichen Zahlen h, k so gewählt seien, daß $(h A - k B)/N$ klein ist.

M. P. Geppert.

Dunnett, Charles W.: A multiple comparison procedure for comparing several treatments with a control. *J. Amer. statist. Assoc.* **50**, 1096–1121 (1955).

Verf. betrachtet das Problem des Vergleichs mehrerer Behandlungen mit einem Standard, d. h. der Konstruktion von Konfidenzgrenzen für jede der Differenzen $m_i - m_0$ ($i = 1, \dots, p$) für sich, jedoch mit vorgegebenem simultanem Konfidenzkoeffizienten P , wenn die Beobachtungen X_{ij} ($i = 0, 1, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, N_i$) unabhängig voneinander mit Mittelwerten m_i und gemeinsamer Varianz σ^2 normal verteilt sind. Für $p = 1$ geschieht dies bekanntlich mittels Students t -Verteilung; für $p > 1$ ist eine mehrdimensionale Verallgemeinerung der t -Verteilung notwendig. Verf. macht darauf aufmerksam, daß ein Versuchsplan, bei dem für die Kontrolle eine größere Versuchszahl genommen wird als für jede der Behandlungen, und zwar $N_0/N_1 \approx \sqrt{p}$ ($N_1 = \dots = N_p$), vor dem näherliegenden Plan mit $N_0 = N_1 = \dots = N_p$ Vorteile hat. Anwendungen auf die biologische Auswertung von Wirkstoffen (bioassay) werden gegeben. Für $N_0 = N_1 = \dots = N_p = N$ werden folgende 2^p Entscheidungen betrachtet: D_0 : bezeichne die Kontrolle als am besten, D_i : bezeichne nur die Behandlung i ($i = 1, \dots, p$) als besser als die Kontrolle, D_{ij} : bezeichne nur Behandlungen i und j ($i, j = 1, \dots, p$; $i \neq j$), ohne zwischen beiden zu entscheiden, als besser als die Kontrolle, $\dots, D_{1,2,\dots,p}$: bezeichne alle Behandlungen, ohne zwischen ihnen eine Rangordnung einzuführen, als besser als die Kontrolle. Entsprechende Tabellen der 95%- und 99%-Punkte für ein- und zweiseitige Entscheidungen sind beigelegt.

O. Ludwig.

Thompson jr., W. A.: On the ratio of variances in the mixed incomplete block model. *Ann. math. Statistics* **26**, 721–733 (1955).

Aufbauend auf Ergebnissen von A. Wald (dies. Zbl. **29**, 307) und einer eigenen

früheren Veröffentlichung (dies. Zbl. 65, 120) betrachtet Verf. das „gemischte“ Varianzkomponentenmodell, wobei die Fehler aus zwei Quellen entstehen. Nach Aufstellung allgemeiner Sätze betreffend Konfidenzintervalle und Tests für das Varianzenverhältnis wendet Verf. diese Theorie auf Versuche in unvollständigen Blöcken an, und zwar besonders auf Versuche mit gebundenen Blöcken (linked block designs). Dual zu den Versuchen in partiell ausgewogenen, unvollständigen Blöcken (partially balanced incomplete block designs) werden durch Vertauschung der Rollen von Blöcken und Behandlungen „Versuche mit partiell gebundenen Blöcken“ (partially linked designs) definiert. Es wird gezeigt, wie sich der praktisch wichtige Fall, daß zwei Verknüpfungsklassen (associate classes) gegeben sind, unter Verwendung der von R. C. Bose, W. H. Clatworthy und S. S. Shrikhande (Tables of partially balanced designs with two associative classes. Inst. of Statist., Univ. North Carolina: 1954) für die dualen Pläne tabulierten Parameter vollständig erledigen läßt.

O. Ludwig.

Sprott, D. A.: Balanced incomplete block designs and tactical configurations. Ann. math. Statistics 26, 752—758 (1955).

A complete α - β - k - v configuration is an arrangement of v elements in blocks of k such that each set of β elements occurs in exactly α blocks; a Steiner system is such a configuration with $\alpha = 1$. After listing some properties of these systems the author proves that an α - β - k - v configuration is a balanced incomplete block design with parameters

$$b = \alpha \binom{v}{\beta} / \binom{k}{\beta}, \quad r = \alpha \binom{v-1}{\beta-1} / \binom{k-1}{\beta-1}, \quad \text{and} \quad \lambda = \alpha \binom{v-2}{\beta-2} / \binom{k-2}{\beta-2}.$$

He then deals with the construction of b. i. b. designs from configurations, and of configurations from b. u. b. designs. Special properties of designs from Steiner systems are also studied.

S. Vajda.

Wurtele, Zivia S.: A rectifying inspection plan. J. Roy. statist. Soc., Ser. B 17, 124—127 (1955).

F. J. Anscombe [J. Roy. statist. Soc. Suppl. 8, 216—222 (1946)] entwickelte folgenden sequentiellen Qualität-verbessernden Prüfungsplan: Ein N -gliedriges Los wird stückweise geprüft; jedes hierbei gefundene defekte Stück wird ausgemerzt. Die Testung wird fortgesetzt, solange die Anzahl d der Defektstücke unter weniger als $\theta_d N$ Stücken auftritt, und abgebrochen, sobald $\theta_d N$ die Kurve $(d, \theta_d N)$ überschreitet ($d = 0, 1, \dots, N - D_0$). Nach Beendigung der Prüfung wird der Rest des Loses angenommen. Die Abbruchstellen θ_d mit $\theta_d < \theta_{d+1} \leq 1$ sind so zu bestimmen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, ein mehr als D_0 defekte Stücke enthaltendes Rest-Los anzunehmen, höchstens γ sei:

$$\sum_{i=D_0}^{D-D_0-1} P_i^{(N)}(D) \leq \gamma, \quad \text{wo}$$

$P_d^{(N)}(D)$ = Wahrscheinlichkeit für Abbruch an der Stelle $(d, \theta_d N)$, wenn D = Anzahl der defekten Stücke im ursprünglichen N -gliedrigen Los. Verf. löst die Aufgabe (mit $=$ statt \leq) für den Grenzfall $N \rightarrow \infty$ unter Heranziehung der in diesem Falle in die binomische übergehenden hypergeometrischen Wahrscheinlichkeit

$$\Pr^{(N)}(d, \theta|D) = \binom{D}{d} \binom{N-D}{\theta N-d} / \binom{N}{\theta N}$$

auf Grund der Gleichung $\lim_{N \rightarrow \infty} P_i^{(N)}(d) = P_i(d) = P_i(i) \binom{d}{i} (1 - \theta_i)^{d-i}$.

M. P. Geppert.

Breny, H.: A propos de la méthode de Daniels pour l'échantillonnage des faisceaux de fibres parallèles. Centre Belge Rech. math., Colloque Analyse statist., Bruxelles du 15 au 17 déc. 1954, 177—186 (1955).

Verf. beschreibt eingehend ein theoretisches Modell, das den in der Textil-

industrie wichtigen Populationen paralleler, verschieden langer, mehreren gegenseitig unabhängigen Bündeln angehörender Fasern entspricht, und analysiert stochastisch das von H. E. Daniels vorgeschlagene Verfahren zur Stichprobenentnahme, nach welchem die Stichprobe aus den Fasern jener Bündel besteht, die in einem gegebenen Intervall $(a, a + z)$ beginnen oder enden. *M. P. Geppert.*

Darmois, Georges: Sur la régression. Résultats nouveaux. Problèmes non résolus. Centre Belge Rech. math., Colloque Analyse statist., Bruxelles du 15 au 17 déc. 1954, 9—23 (1955).

Généralisation de la notion de régression. Exemple tiré d'une loi de Cauchy. Cas de régression linéaire. Corrélation „dure“ de S. Bernstein. Cas continu. Extension à plusieurs dimensions. Chaînes à régression linéaire. Problèmes divers. *A. Sade.*

Williams, E. J.: Significance tests for discriminant functions and linear functional relationships. *Biometrika* **42**, 360—381 (1955).

Die vorliegende Arbeit knüpft im wesentlichen an und setzt fort Arbeiten von M. S. Barlett (dies. Zbl. **43**, 344) und E. J. Williams (dies. Zbl. **46**, 363) und legt das Regressionsmodell einer nicht-singulären p -dimensionalen Normalverteilung der Variablen X_1, \dots, X_p zugrunde, deren Regressionen bezüglich der q Variablen Y_1, \dots, Y_q linear seien. Liegt eine $(p + q)$ -dimensionale Stichprobe der (X, Y) -Werte an $n + 1$ Individuen vor, so ist nach R. C. Geary (dies. Zbl. **37**, 90) die Hypothese der Eignung von r (als kanonische Variablen deutbaren) linearen Trennfunktionen (discriminant functions) zur Unterscheidung von $(q + 1)$ p -dimensionalen Populationen äquivalent mit der Hypothese der Existenz von $p - r$ linearen Relationen zwischen den X_1, \dots, X_p . Verf. leitet zur Testung der beiden Hypothesen exakte, d. h. die unbekannten Parameter nicht enthaltende Prüffunktionen her auf Grund multiplikativer Zerlegung des Likelihood-Kriteriums, ausgedrückt in den Stichproben-Eigenwerten (quadrierten kanonischen Korrelationen) bzw. in den entsprechenden Determinanten der Matrizen von Quadrat- und Produktsummen. Während für die Signifikanzteste die Durchführung einer Kovarianzanalyse genügt, erfordert die Bestimmung der „besten“ linearen Trennfunktionen bzw. der „besten“ linearen Relationen die Berechnung der größten bzw. kleinsten Eigenwerte und der entsprechenden Eigenvektoren. Die am Regressionsmodell kovarianz-analytisch gewonnenen Resultate werden auch varianzanalytisch interpretiert. *M. P. Geppert.*

Foster, F. G. and D. Teichroew: A sampling experiment on the powers of the records tests for trend in a time series. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **17**, 115—121 (1955).

In an earlier paper (this Zbl. **55**, 378) the author studied, in cooperation with A. Stuart, certain non-parametric tests of the randomness of a series, based on the breaking of records. The power of the tests based on the statistics called d and D respectively, tabulated in that paper, were obtained from an experiment using altogether 60 000 samples, carried out on an electronic computer (the SWAC). The present paper gives a detailed account of the procedure. — The computer generated a series of n random (approximately) normal deviates ($n = 10, 25, 50, 125$), by making use of the fact that the sum of 8 uniformly distributed random variates is approximately normally distributed. It then introduced a trend by adding $(r - 1)\Delta$ to the r -th deviate ($\Delta = 0.01, 0.04$ in most cases), noted the number of records and tabulated the frequency distribution of the statistics, together with some of their moments. The machine time required for 1000 samples was $75 + 7.1n$ seconds. — The condensation of the material for presentation was possible through the empirical discovery of the following facts: (i) within the range of n and Δ used the distribution of d is normal, (ii) the variances of both d and D are independent of Δ . *S. Vajda.*

Stuart, Alan: A paradox in statistical estimation. *Biometrika* 42, 527—529 (1955).

Huzurbazar, V. S.: Exact forms of some invariants for distributions admitting sufficient statistics. *Biometrika* 42, 533—537 (1955).

Nach B. O. Koopman (dies. Zbl. 14, 168) lautet für die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x, \lambda_j)$ einer Verteilung mit Parametern $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sie suffiziente Schätzer der Parameter zulasse,

$$f(x, \alpha_j) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^p u_k(\alpha_j) v_k(x) + A(x) + B(\alpha_j) \right\}.$$

Hierauf fußend, zeigt Verf., daß für alle, suffiziente Schätzer zulassenden, kontinuierlichen Verteilungen die beiden von H. Jeffreys [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 186, 453—461 (1946)] allgemein definierten, positiv definiten und gegen Transformationen invarianten Abstandsmaße

$$I_m = \int \{ [f(x, \alpha'_j)]^{1/m} - [f(x, \alpha_j)]^{1/m} \}^m dx, \quad m \text{ gerade},$$

und

$$J = \int \{ f(x, \alpha'_j) - f(x, \alpha_j) \} \{ \ln f(x, \alpha'_j) - \ln f(x, \alpha_j) \} dx$$

zweier Verteilungen gleicher mathematischer Form, aber mit verschiedenen Parameterwerten, sich als explizite Funktionen der Parameter λ_j ($j = 1, \dots, p$) darstellen lassen. Das Resultat war bisher nur für ein- und zweidimensionale Normal-, für Poisson- und Binomialverteilung bekannt.

M. P. Geppert.

Chu, John T.: The „inefficiency“ of the sample median for many familiar symmetric distributions. *Biometrika* 42, 520—521 (1955).

Ist \tilde{x} die Mediane einer $(2n - 1)$ -gliedrigen Stichprobe, die einer (um $x = \xi$) symmetrischen, unimodalen kontinuierlichen Verteilung mit Verteilungsdichte $f(x)$ entnommen ist, so gilt für deren Varianz die Ungleichung

$$\begin{aligned} \text{var } \tilde{x} &= [(2n + 1)/(n!)^2] \int_{-\infty}^{\infty} (x - \xi)^2 [F(x)]^n [1 - F(x)]^n f(x) dx \geq \\ &\geq \{4 [f(\xi)]^2 (2n + 3)\}^{-1}. \end{aligned}$$

Aus dieser unteren Grenze gewinnt Verf. bei Dreiecks-, Student-, B_1 - und Cauchy-Verteilungen hinreichende Bedingungen dafür, daß das Stichprobenmittel \bar{x} zur Schätzung von ξ effizienter ist als \tilde{x} , wie es bekanntlich stets bei Normal- und Rechtecksverteilung der Fall ist.

M. P. Geppert.

Dalcher, Andreas: Statistische Schätzungen mit Quantilen. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 55, 475—498 (1955).

Der Verf. gibt in dieser Arbeit eine schnelle Methode zur Schätzung der Parameter, von denen eine kontinuierliche Verteilungsfunktion abhängt, indem die Werte x_1, x_2, \dots, x_n der zugehörigen zufälligen Größe in n Stichproben gegeben werden und n hinreichend groß angenommen wird. Hierbei werden die Quantile ξ_i ($i = 1, 2, \dots, k$), welche durch die Gleichung $F(\xi_i) = P_i$ bestimmt werden, benutzt, wo P_i ($i = 1, 2, \dots, k$) k gegebene Werte der Wahrscheinlichkeit $F(x)$ sind. Zu diesem Zwecke wird zuerst bewiesen, daß die asymptotische Verteilungsfunktion des Vektors $\bar{z}(z_i = (y_i - \xi_i)/n, i = 1, 2, \dots, k)$, wobei y_i die Schätzung von ξ_i darstellt, eine normale ist:

$$(1) \quad q(\bar{z}) = c \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{ij} f_i f_j z_i z_j \right).$$

Die Ausdrücke der c_{ij} wie die der reziproken c^{ij} sind überaus einfach, wenn wir die Wahrscheinlichkeiten $p_i = P_{i+1} - P_i$ ($i = 0, 1, \dots, k$; $P_0 = 0, P_{k+1} = 1$) einführen und $f_i = f(\xi_i) = (dF(x)/dx)_{x=\xi_i}$ setzen. Im Falle $F(x) = G(x/\lambda)$ kann der Parameter λ als eine lineare Funktion der Quantile dargestellt werden: $\lambda = \sum_i b_i \xi_i$ mit den entsprechenden Schätzungen $T = \sum_i b_i y_i$. Im Falle $F(x) = G((x - \mu)/\sigma)$ werden zwei lineare Funktionen $\mu = \sum c_i \xi_i, \sigma = \sum c'_i \xi_i$ betrachtet.

Das Problem besteht dann darin, die Werte b_i (resp. c_i, c'_i so zu wählen, daß die Varianz des abgeschätzten Parameters minimal wird, unter Berücksichtigung von (1). Im Vergleich mit Fischers Methode der größten Wahrscheinlichkeit sind die vom Verf. erzielten Ergebnisse zufriedenstellend, wobei in Betracht gezogen werden muß, daß eine nur geringe Anzahl von Quantilen (1 bis 5) benutzt wird und die Schnelligkeit der Berechnungsmethode untersucht werden soll. Anwendungen auf die Normal- und Cauchy-Verteilung für $k = 2, 3, 4, 5$, werden durchgeführt. *O. Onicescu.*

Stange, K.: Die ausgelesene Normalverteilung im Wahrscheinlichkeitsnetz. Mitteil.-Bl. math. Statistik **7**, 193—202 (1955).

Verf. gibt eine graphische Methode, auf Grund einer Stichprobe aus einer gestützten Normalverteilung die Parameter der ursprünglichen (nicht gestützten) Normalverteilung im Wahrscheinlichkeitsnetz zu schätzen, und bringt ein praktisches Beispiel dazu. Rechnerisch ist das Problem von R. A. Fisher [British Assoc. Advancement Sci., Math. Tables I (1931)] und A. Hald (dies. Zbl. **41**, 465) behandelt.

O. Ludwig.

Broeder jr., George Gerard den: On parameter estimation for truncated Pearson type III distributions. Ann. math. Statistics **26**, 659—663 (1955).

Die Pearson Typ III-Verteilung $\varphi(t, \alpha) = \alpha f(\alpha t) = [\Gamma(p)]^{-1} \alpha^p t^{p-1} e^{-\alpha t}$ ($0 \leq t, 0 < \alpha, 0 < p$) sei an einem bekannten Punkte $T > 0$ gestützt (truncated). Es werden plausibelste (maximum likelihood) Schätzer für α berechnet, wenn p vorgegeben ist, und die Zahl $N - n$ der Beobachtungen, von denen nur bekannt sei, daß sie größer als T sind, (1) gegeben, (2) nicht gegeben ist, oder, falls die Stützung links erfolgt, wenn die Zahl der Beobachtungen $< T$ (3) bekannt, (4) unbekannt ist. Der Informationsverlust bei Unkenntnis von N wird untersucht und Anwendungen werden diskutiert.

O. Ludwig.

Mauldon, J. G.: Pivotal quantities for Wishart's and related distributions, and a paradox in fiducial theory. J. Roy. statist. Soc., Ser. B **17**, 78—85 (1955).

Einer nicht-singulären p -dimensionalen Standard-Normalverteilung mit Erwartungswerten und Korrelationen 0 und Varianzen 1 werde eine Stichprobe vom Umfange n mit Matrix \mathbf{a} der gewöhnlichen 2. Stichprobenmomente bzw. vom Umfange $n + 1$ mit Dispersions-Matrix \mathbf{A} der Stichproben-Varianzen und -Covarianzen entnommen; sei $m = \min(n, p)$. Verf. beweist, daß im 1. Fall für die durch $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} = \mathbf{a}$ eindeutig bestimmte, positiv-oben-dreieckige $(m \times p)$ -Matrix $\mathbf{k} = \{k_{ui}\} = \{k_i^u\}$ mit $k_i^u = 0$ für $i < u$ und $k_i^i > 0$, im 2. Fall für die durch $\mathbf{K}' \cdot \mathbf{K} = \mathbf{A}$ eindeutig bestimmte, positiv-oben-dreieckige $(m \times p)$ -Matrix $\mathbf{K} = \{K_{ui}\} = \{K_i^u\}$ die Elemente k_i^u bzw. K_i^u ($i = 1, \dots, p; u = 1, \dots, \min(n, i)$) alle gegenseitig unabhängig verteilt sind, und zwar für $u < i$ standardisiert normal, für $u = i$ wie $\sqrt{\chi^2}$ mit $n + 1 - i$ F. G. Wird einer beliebigen, nicht-singulären p -dimensionalen Normalverteilung mit Erwartungswerten 0 und Covarianz-Matrix α eine n -gliedrige Stichprobe $[(n \times p)\text{-Matrix}] \mathbf{x}$ entnommen und ist λ die durch $\lambda' \cdot \lambda = \alpha$ eindeutig bestimmte nicht-singuläre, positiv-oben-dreieckige Matrix, so ist \mathbf{z} aus $\mathbf{x} = \mathbf{z} \cdot \lambda$ standard-normal verteilt, und die Anwendung des obigen Satzes führt in den beiden Fällen auf zwei Matrizen $\mathbf{k} = \mathbf{l} \cdot \lambda^{-1}$ bzw. $\mathbf{K} = \mathbf{L} \cdot \lambda^{-1}$ mit $\mathbf{l}' \cdot \mathbf{l} = \mathbf{a}$ bzw. $\mathbf{L}' \cdot \mathbf{L} = \mathbf{A}$, deren Elemente k_i^u bzw. K_i^u einen Satz von Angelgrößen (pivotal quantities) für die Verteilung von \mathbf{l} bzw. \mathbf{L} und mithin für die von \mathbf{a} bzw. \mathbf{A} liefern, d. h. von Funktionen der zu schätzenden Parameter α und der suffizienten Statisten \mathbf{a} bzw. \mathbf{A} , die von α unabhängig verteilt sind. Hieraus werden in den beiden Fällen die Stichproben-Verteilung von \mathbf{a} bzw. \mathbf{A} (Wishart-Verteilung) hergeleitet und Confidenzbereiche für \mathbf{x} bestimmt. Aus den Angelgrößen \mathbf{k} bzw. \mathbf{K} lassen sich nach R. A. Fisher Fiduzialverteilungen für \mathbf{x} gewinnen; Verf. zeigt, daß das Fiduzialprinzip jedoch zu Widersprüchen führt, da das Resultat nicht eindeutig, nämlich Transformationen gegenüber nicht invariant ist.

M. P. Geppert.

Cohen jr., A. Clifford: Restriction and selection in samples from bivariate normal distributions. J. Amer. statist. Assoc. **50**, 884—893 (1955).

Für die im Titel genannte Verteilung sei angenommen, daß eine der Variablen Einschränkungen unterworfen sei (einseitige oder zweiseitige Stützung u. ä.). Parameterschätzung aus einer Stichprobe mittels des Maximum Likelihood-Prinzips führt im wesentlichen auf eine vom Verf. schon behandelte Aufgabe zurück (dies. Zbl. **35**, 215).

L. Schmetterer.

Cohen jr., A. Clifford: Maximum likelihood estimation of the dispersion parameter of a chi-distributed radial error from truncated and censored samples with applications to target analysis. J. Amer. statist. Assoc. **50**, 1122—1135 (1955).

Ausgegangen wird von der Verteilung der Größe $r = \left| \sum_{i=1}^r x_i^2 \right|$ (die man als „Radialfehler mit Mittelpunkt 0“ bezeichnen kann), wobei die x_i unabhängig nach $N(0, \sigma^2)$ verteilt sind. Es interessiert die Schätzung von σ auf Grund einer Stichprobe von r -Werten. Hierbei wird unterschieden: Die Stichprobe unterliegt keinen Einschränkungen; die Stichprobenwerte sind gestutzt und die Anzahl der über der Stützungsschranke liegenden Werte ist bekannt oder auch nicht. Methode der Schätzung ist stets das Maximum Likelihood-Prinzip. Die Fälle $p = 2$ und 3 werden genauer untersucht und tabellarische und graphische Hilfsmittel bereitgestellt. Schließlich werden (für $p = 2$) einfache Methoden zur Auffindung des Mittelpunktes eines Radialfehlers aus einer Stichprobe beschrieben. Geht man bei der Schätzung von σ von einem geschätzten Mittelpunkt aus, dann zeigt ein Beispiel, daß die Verfälschungen praktisch nicht sehr ins Gewicht fallen.

L. Schmetterer.

Tate, R. F.: Applications of correlation models for biserial data. J. Amer. statist. Assoc. **50**, 1078—1095 (1955).

Verf. betrachtet außer dem gewöhnlichen Korrelationsmodell A , bei dem die Zufallsvariablen X und Y der Binormalverteilung mit $(\mu, \nu, \sigma, \tau, \varrho)$ folgen, daß Modell B (biserial), bei dem X und Y ebenfalls der obigen Binormalverteilung folgen, aber eine Zufallsvariable Z definiert ist durch $Z = 1$ bzw. 0 für $(Y - \nu)/\tau \geq \omega$ bzw. $< \omega$. Auf Grund einer zufälligen Stichprobe (X_i, Z_i) ($i = 1, \dots, n$) wird für ϱ der Schätzer $r_b = (S_{xz}/S_x) \lambda(\omega_b)$ gebildet, wobei S_x und S_{xz} die entsprechende Stichprobenvarianz und -Covarianz sind, $\lambda(y)$ die Dichte der Normalverteilung und ω_b so bestimmt ist, daß $\int_{\omega_b}^{\infty} \lambda(y) dy = \bar{Z}$. Im Modell PB (point biserial) hat

Z die Verteilung $g(z) = p^z (1-p)^{1-z}$; $z = 0, 1$; $0 < p < 1$, und X die bedingte Verteilung $f(x|z) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-(x - \mu_z)^2/2\sigma^2)$. Zur Schätzung des Korrelationskoeffizienten ϱ_1 bez. X und Z benutzt man $r_{pb} = S_{xz}/S_x S_z$. Das Modell PB wird unter Verwendung früherer Ergebnisse des Verf. (dies. Zbl. **56**, 367) behandelt und Beispiele dazu gegeben. Für Modell B wird besonders auf die Tatsache eingegangen, daß für endliche Stichproben r_b mit positiver Wahrscheinlichkeit Werte > 1 annehmen kann. r_{pb} ist plausibelster (maximum likelihood) Schätzer für ϱ_1 , r_b jedoch ist für große $|\varrho|$ asymptotisch nicht sehr effizient; man kann es als Ausgangsschätzwert bei einem Iterationsverfahren zur Bestimmung des plausibelsten Schätzers $\hat{\varrho}$ für ϱ verwenden. Die wichtigsten Eigenschaften der Modelle A , B und PB werden gegenübergestellt, und es wird diskutiert, in welchen praktischen Fällen Modell B und in welchen Modell PB anzuwenden ist.

O. Ludwig.

Salvemini, Tommaso: Prime ricerche sulla interpolazione grafica col metodo della curva cumulativa. Atti XIII e XIV Riun. sci., Roma 1953—1954, 47—80 (1955).

Nach allgemeinen Erörterungen über die vier Phasen der statistischen Interpolation: Wahl des ausgleichenden Verteilungstyps und der Methode zur Schätzung

der entsprechenden Verteilungsparameter, Beurteilung der Anpassungsgüte der erzielten Ausgleichung, Studium der Konvergenz der Verteilungsparameter bei Zunahme des Materialumfanges, beschreibt Verf. ein Ausgleichsverfahren, das auf graphischer Ausgleichung der empirischen (rechten oder linken) kumulativen Verteilungskurve und nachfolgender graphischer Differentiation zur Bestimmung der ausgeglichenen Häufigkeitskurve beruht. Das Verfahren wird experimentell geprüft an 7 Pearson-Kurven, der Einkommens-Verteilungs- und Lexis-Kurve. Insbesondere untersucht Verf. den Einfluß der Klassenbreite und anderer willkürlicher Faktoren.

M. P. Geppert.

Marchesi, P. E.: Circa un metodo di perequazione a mezzo tavole numeriche. Atti XIII e XIV Riun. sci., Roma 1953—1954, 89—96 (1955).

Die Aufgabe, n Wertepaare (x_i, y_i) mit äquidistanten x_i , die ohne Einschränkung als $x_i = i - (n + 1)/2$ ($i = 1, 2, \dots, n$) gewählt werden, durch eine Parabel vom Grade g auszugleichen, löst Verf., indem er die — aus W. P. Eldertons „Summenverfahren“ geläufigen — durch iterierte partielle Aufsummierung gebildeten empirischen „Kumulanten“ (nicht zu verwechseln mit denen von R. A. Fisher)

$$K_t = \sum_{i=1}^{(n)} y = \sum_{i=1}^n \binom{n+t-1-i}{t-1} y_i = \sum_{i=1}^n \binom{(n-1)/2+t-1-x_i}{t-1} y_i$$

den theoretischen Kumulanten der Ausgleichskurve \bar{Y} gleichsetzt. Da die K_t Linear-kombinationen der Potenzmomente $M_t = \sum_{i=1}^n y_i x_i^t$ sind, ist die Methode äqui-

valent der Momenten-Methode. Die Koeffizienten des Ausgleichspolynoms \bar{Y} ergeben sich als Linearformen der K_t ($t \leq g + 1$) mit von den y_i unabhängigen Koeffizienten („parametrischen Multiplikatoren“), daher die ausgeglichenen Werte \bar{Y}_i als Linearkombinationen derselben K_t , $\bar{Y}(x) = \sum_{t=1}^{g+1} K_t(y) H_t(x)$, deren Ko-

effizienten H_t von den y_i unabhängige Polynome von x_i vom Grade g („Ausgleichs-Matrizen“) bedeuten. Das gleiche Verfahren führt bei Ausgleichung durch eine Linearfunktion von $\cos(\nu\theta)$, $\sin(\nu\theta)$, $\nu = 0, 1, \dots, g$, zu ähnlichen Resultaten mit $t \leq 2g + 1$. Die genannten nur von n abhängigen Koeffizienten und die Polynome $H_t(x)$ bzw. $H_t^*(\theta)$ sind vom Verf. andernorts tabuliert.

M. P. Geppert.

Marchesi, P. E.: Appendice alla nota tecnica „Su un metodo di perequazione a mezzo tavole numeriche“. Atti XIII e XIV Riun. sci., Roma 1953—1954, 97—107 (1955).

Verf. vergleicht die von ihm entwickelte und tabulierte „Kumulanten-Methode“ (vgl. vorstehendes Referat) mit der im Resultat äquivalenten Momenten-Methode, mit der Ausgleichung durch Tschebyscheffs Orthogonal-Polynome, mit Hardy-Eldertons und R. A. Fishers Summationsverfahren bzw. im zyklischen Falle mit der Ausgleichung durch Fourier-Polynome. In allen Fällen erweist sich das neue Verfahren als rechnerisch weitaus einfacher. Ferner leitet Verf. für die Kumulanten der Polynome H_t die Gleichung

$$\Sigma^{(t)} H_j = 1 \text{ für } t = j, \text{ bzw. } = 0 \text{ für } t \neq j$$

her und stellt das bestimmte Integral der Ausgleichsfunktion, $S = \int_{-(n-1)/2}^{(n-1)/2} \bar{y} dx$, als Linearkombination der K_t dar, deren Koeffizienten ihrerseits Polynome von $(n-1)/2$ und vom Verf. tabuliert sind.

M. P. Geppert.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Ceppellini, R., M. Siniscalco and C. A. B. Smith: The estimation of gene frequencies in a random-mating population. Ann. Hum. Genetics 20, 97—115 (1955).

The authors give a general procedure for estimating gene frequencies in a population under random mating. Samples, either of unrelated individuals, or of families, are to be used, with special reference to the problem of blood groups.

H. Geiringer.

Thompson, H. R.: Spatial point processes, with applications to ecology. *Bio-metrika* 42, 102—115 (1955).

Während die von H. Wold (dies. Zbl. 36, 90) entwickelte Theorie eindimensionaler stochastischer Punktprozesse eine für ökologische Probleme restlos befriedigende Ausdehnung auf zwei Dimensionen nicht zuläßt, gelingt es Verf., die von H. J. Bhabha (dies. Zbl. 39, 138) und A. Ramakrishnan (dies. Zbl. 39, 137) für derartige Prozesse ausgebaute Methode der stochastischen Prozesse mit kontinuierlichen Parametern auf zwei Dimensionen auszudehnen. Sei $N(A) = \int_A dN(A)$ die Anzahl der Pflanzen in dem links unten von $A(x, y)$ gelegenen Rechteck der Cartesischen (x, y) -Ebene, mdA die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in dem von den Punkten (x, y) , $(x + dx, y)$, $(x, y + dy)$, $(x + dx, y + dy)$ gebildeten Rechteck dA 1 Pflanze stehe, während diejenige für mehr als 1 Pflanze $o(dA)$ sei. Dann ist $dN(A)$ eine nur der Werte 0 und 1 fähige Variable, und

$$E\{dN(A_1) \cdots dN(A_k)\} = f_k(A_1, \dots, A_k) dA_1 \cdots dA_k \quad (\text{mit } f_1(A) = m)$$

die Simultanwahrscheinlichkeit für je 1 Pflanze in den nicht übergreifenden Rechtecken dA_1, \dots, dA_k . Hieraus gewinnt man für die Anzahl $N_{[i]}$ der Pflanzen in dem durch die Eckpunkte A_i, A'_i bestimmten endlichen Rechteck nach einem Satz von Bhabha Produkt- und Potenzmomente. Um die Methoden der Varianzanalyse verwenden zu können, bedeckt Verf., einem Gedanken von P. Greig-Smith [Ann. Bot., n. Ser. 16, 293 (1952)] folgend, den beobachteten Bereich mit einem quadratischen Rost von 256 gleich großen Quadraten, die sukzessive in 2, 4, 8, ... Blöcke gleicher Größe zusammengefaßt sind. Verf. legt folgendes ökologische Modell zugrunde: Eine Anzahl Pflanzen werden zufallsmäßig über den Bereich verteilt; die Anzahl n der Nachkommen einer Pflanze folge der Verteilung $p(n)$, der Abstand r der Tochterpflanzen von ihrer Mutter unabhängig voneinander der Verteilung $f(r) dr$; er wendet auf dieses die oben entwickelte Theorie an. Schließlich untersucht Verf. im Hinblick auf den durch das Modell bedingten Klumpeneffekt noch die Teststärke (power-function) der in der Varianzanalyse der sukzessiven Blöcke anzuwendenden F -Teste.

M. P. Geppert.

Hofmann, Martin: Über zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 55, 499—575 (1955).

Aus dem elementaren Poisson-Prozeß mit $p_n(t) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!$ werden durch Mischung „zusammengesetzte“ Poisson-Prozesse abgeleitet mit

$$p_n(t) = \int [e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!] dU(\lambda),$$

und „erweiterte“ Poisson-Prozesse, wenn anstatt der Anzahl $n = N(t)$ der Sprünge in $(0, t)$ die Summe ihrer „Höhen“, $X(t) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, betrachtet wird. Verf. studiert ein- und zweidimensionale zusammengesetzte Poisson-Prozesse, hauptsächlich bei Benutzung des Widder-Bernsteinschen Satzes (dessen Anwendbarkeit für Beispiele-Bildung durch einen Hilfssatz ausgedehnt wird), und des Zusammenhanges zwischen negativer Binomialverteilung und einer bekannten Problemstellung von Greenwood-Yule. Im 2. Teil werden die Ergebnisse zur Erörterung von Daten der Unfallstatistik angewandt.

B. de Finetti.

Price, Daniel O.: Examination of two sources of error in the estimation of net internal migration. J. Amer. statist. Assoc. 50, 689—700 (1955).

Verf. untersucht den Einfluß zweier Fehlerquellen bei der Schätzung der Bevölkerungswanderung zwischen den Bundesstaaten der USA, nämlich des Fehlers,

der dadurch entsteht, daß der Berechnung Sterbetafeln der USA und nicht die der einzelnen Staaten zugrunde gelegt werden, während doch die Sterblichkeit in diesen verschieden ist, und desjenigen, der auf der Unvollständigkeit der Volkszählung beruht. Unter der Annahme, daß diese beiden Fehlerquellen nicht korreliert sind, schätzt Verf. auf Grund empirischen Zahlenmaterials und algebraischer Überlegungen, daß der mittlere Fehler aus der ersten Quelle $\approx 14\%$, der Fehler aus der zweiten Quelle in ungefähr einem Drittel aller Fälle $> 25\%$ sei. *O. Ludwig.*

Zwinggi, Ernst: Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung und Variation der Sterblichkeit. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungs-Math. **55**, 391—394 (1955).

Sind $p_0(y) = l_y/l_0 = \exp \left\{ - \int_0^y \mu_z dz \right\}$ die y -jährige Überlebenswahrscheinlich-

keit einer 0-jährigen, $f(y)$ die Fruchtbarkeitsintensität und a, b die Altersgrenzen der Fruchtbarkeit, so ist die Vermehrungsrate r der stabilen Bevölkerung definiert

aus $1 = \int_a^b e^{-ry} p_0(y) f(y) dy$. Verf. entwickelt eine einfache Methode zur Be-

rechnung der veränderten Vermehrungsrate für den Fall, daß bei unverändertem $f(y)$ die Sterbeintensität im Intervall (a, b) in $\mu'_y = (1 + \alpha) \mu_y$ abgeändert werde; sie beruht auf der binomischen Entwicklung der veränderten Überlebenswahrscheinlichkeit $p'_0(y) = p_0(a) [1 - q_a(y)]^{1+\alpha}$. *M. P. Geppert.*

Zwinggi, E.: Notiz zur Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung. *Experientia* **11**, 383 (1955).

Barnett, H. A. R.: The variance of the product of two independent variables and its application to an investigation based on sample data. *J. Inst. Actuaries* **81**, 190 (1955).

Approximative Formel für die Berechnung der Varianz der zu erwartenden Anzahl von Gestorbenen einer Menge N vom Alter x , wenn eine Stichprobe vom Umfang $N/100$ beobachtet wird. *W. Saxer.*

Spring, Osc. W.: Die maschinelle Berechnung der Erneuerungsfunktion. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. **55**, 417—422 (1955).

Verf. beschreibt die Berechnung mittels Lochkarten der Erneuerungsfunktion $m_1(t)$ aus der Relation $m_1(t) = \sum_{r=0}^{\infty} r f(r, t)$, wo sich die $f(r, t)$ aus dem Faltungsintegral

$f(r, t) = \int_0^t f(r-1, t-\tau) q(\tau) d\tau$ ergeben. *E. Zwinggi.*

Leuenberger, Franz: Zur mathematischen Theorie der Einkommensverteilung in Abhängigkeit von Alter und Zeit. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. **55**, 577—615 (1955).

Zur mathematischen Behandlung von Fragen der Sozialversicherung ist die Kenntnis der Verteilung der gleichaltrigen Beitragspflichtigen auf die verschiedenen Einkommen notwendig. Dabei muß die zeitliche Änderung des Einkommens berücksichtigt werden. Sich hierauf beziehende dreidimensionale Verteilungen hat E. Kaiser [Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. **50**, 249—335 (1950)] untersucht. Es wird eine Personengesamtheit betrachtet, welche nach dem Einkommen u und dem Alter x zur Zeit t_0 verteilt ist. Die normierte Verteilungsfunktion sei $\varphi(u, x)$. Zur Bestimmung von $\varphi(u, x)$ benutzt E. Kaiser die drei Fundamentalfunktionen

$\lambda(x) = \int_0^{\infty} \varphi(u, x) du$ (die Altersstruktur), $f(u|x_0) = g(u) = \varphi(u, x)/\lambda(x)$ (die Einkommensverteilung der x_0 -Jährigen) und $s(x) = \int_0^{\infty} u f(u|x) dx \bigg/ \int_0^{\infty} u f(u|x_0) du$ (die Skala s , die den Verlauf des mittleren Einkommens mit dem Alter wiedergibt).

Die von Kaiser benutzte Hypothese A, $f(u|x) = (1/s(x)) g(u/s(x))$, führt auf $g(u, x) = (\lambda(x)s(x)) g(u, s(x))$. — Verf. ersetzt nun diese Hypothese durch eine der beiden Forderungen:

Hypothese A₁: $f(u|x) = (1/b(x)) g([u - u_0(1 - b(x))]/b(x))$

Hypothese A₂: $f(u|x) = g[u, c(x)] \quad (c(x_0) = c)$ mit

$$\int_{u_0}^{\infty} g[u, c(x)] du = 1, \quad \int_{u_0}^{\infty} u g[u, c(x)] du = s(x) \int_{u_0}^{\infty} u g[u, c] du.$$

Beide Hypothesen werden auf zwei Beispiele angewandt: 1. Paretoverteilung: $f(u|x_0) = \lambda u_0^\lambda u^{-\lambda-1} \quad (\lambda > 1)$ und 2. Pearson-Kurve vom Typus III (semi-normale Verteilung): $f(u|x_0) = (\gamma^\varepsilon/\Gamma(\varepsilon)) (u - u_0)^{\varepsilon-1} e^{-\gamma(u-u_0)} \quad (\varepsilon > 0, \gamma > 0)$.

G. Reichel.

Åkerberg, Bengt: Some notes on Lidstone's and other approximations to temporary life annuities when the force of mortality is $(1+k)\mu_{x+t}$. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 55, 409—415 (1955).

Verf. zeigt, daß für den Barwert $\bar{a}_{x:n}$ der Verbindungsrente auf zwei gleichaltrige Leben die folgenden Ungleichungen gelten: 1.) $a_{x:n} > 2 \bar{a}_{x:n} - a_n$ 2.) $a_{x:n} \geq (a_{x:n})^2 / a_n$. 3.) Für genügend großes n $a_{x:n} > (2/\bar{a}_{x,n} - 1/\bar{a}_n)^{-1}$ (Lidstone'sche Näherung). 4. Für Gompertz-Makehamsche Sterbegesetze gibt Verf. Schranken für n bzw. $x+n$ an, so daß unterhalb dieser Schranken

$$(a_{x:n})^2 / \bar{a}_n \leq \bar{a}_{x:n} < (2/\bar{a}_{x,n} - 1/\bar{a}_n)^{-1}.$$

gilt.

G. Reichel.

Rufener, Ernst: Überlebensordnungen, für welche sich der Leibrentenbarwert durch Zeitrenten darstellen läßt. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 55, 423—473 (1955).

Es werden diejenigen Sterbegesetze $l(x)$ gesucht, die eine Darstellung der Leibrentenbarwerte $a_{x:t}$ in der Form $a_{x:t} = \sum_{v=1}^k A_v(t, \delta) \Phi_v(x)$ zulassen. Die Summanden dieser Barwertformel sind Produkte, deren einer Faktor als Parameter nur die Rentendauer t und die Zinsintensität δ enthält, während der andere Faktor nur vom Alter x abhängt. Der Fall $k=2$ wurde vom Verf. in einer vorausgegangenen Arbeit (dies. Zbl. 57, 122) untersucht. Die vorliegende Betrachtung behandelt den allgemeinen Fall für endliches k und führt im wesentlichen zu folgenden Ergebnissen: Die obige Barwertformel läßt sich auf die Gestalt $a_{x:t} = \sum_{v=1}^k y_v(t, \delta) \frac{l^{(v-1)}(x)}{l(x)}$

normieren. Es zeigt sich, daß $l(x)$ genau dann diese Darstellung zuläßt, wenn es Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung k -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist. Dabei sind die Funktionen $y_v(t, \delta)$ als Zeitrentenbarwerte eindeutig bestimmt. Diese Ergebnisse gelten auch für den diskontinuierlichen Leibrentenbarwert. Abschließend wird der Fall $k=3$ diskutiert. G. Reichel.

Ogborn, M. E. and G. E. Wallas: Deferred annuities with participation in profits. J. Inst. Actuaries 81, 261—299 (1955).

Behr, Ismar von: Gemischte Kapitalversicherungen mit erhöhter Erlebensfallsumme. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. 2, 279—284 (1955).

Für die gemischte Versicherung von ganzjähriger Dauer gilt die Gleichung $d + P = 1/\bar{a}_{x:n}$. Der Verf. überträgt diese Gleichung auf gemischte Versicherungen von nicht ganzjähriger Dauer durch formale Verallgemeinerung des für die Barwerte ganzjähriger Leib- und Zeitrenten gültigen Symbolismus. W. Saxer.

Jecklin, Heinrich: Über die Möglichkeit, Sterbetafeln so auszugleichen, daß die Reservekurven generell hyperbolisch sind. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. 2, 285—289 (1955).

Verf. untersucht im Anschluß an die von ihm abgeleitete F -Methode zur Reserveberechnung die Möglichkeit, die Sterbetafel so auszugleichen, daß die Reservekurven generell hyperbolisch verlaufen. *E. Zwinggi.*

Bierlein, Dietrich: Optimalmethoden für die Summenapproximation in Jecklins F -Methode. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. 2, 291—352 (1955).

Die F -Methode zur näherungsweise Reserveberechnung basiert auf zwei Annahmen: Annäherung der Einzelreserve durch ein oder mehrere Hyperbeläste und Approximation der Summe der Hyperbeläste. Verf. untersucht die Annäherungen mit Hilfe der Spieltheorie. *E. Zwinggi.*

Aribaud, Henri: Le delai d'attente dans certains systèmes financiers et ses conséquences. Bull. trimestr. Inst. Actuaires Français 66, 255—302 (1955).

Soll eine Bausparkasse nach n Jahren das Kapital liefern, während die Raten durch $n + p$ Jahre zahlbar sind, so ist offenbar ihr Betrieb von einem hinreichenden Verlauf der Neugeschäfte abhängig. Die Frage wird mathematisch behandelt und praktisch erörtert. *B. de Finetti.*

Nolfi, P.: Zur mathematischen Darstellung des Nutzens in der Versicherung. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 55, 395—407 (1955).

Verf. versucht, die „Zweckmäßigkeit“ der verschiedenen Versicherungsformen für einen Versicherten mittels einer Berechnung des Nutzens zu vergleichen. So wird z. B. erklärt, eine Rente sei besser als das gleichwertige Kapital. *B. de Finetti.*

Ammeter, Hans: Über die risikothoretischen Grenzen der Versicherbarkeit. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. 2, 261—277 (1955).

Baker, A. C.: Ordinary life office organization using a largescale electronic computer. J. Inst. Actuaries 81, 203—260 (1955).

Copeland, Morris A.: Statistics and objective economics. J. Amer. statist. Assoc. 50, 639—659 (1955).

Verf. behandelt in breit angelegter Darstellung die Entwicklungslinien und Aufgabengebiete der neueren Wirtschaftsstatistik, beginnend in der Zeit nach dem ersten Weltkrieg und fortschreitend bis zur heutigen ökonomischen Forschung. Dabei werden u. a. auch die Gründe aufgezeigt, die nach Meinung des Verf. dafür bestimmend sind, daß die moderne mathematisch-statistische Methodik, wie sie besonders in Physik, Biologie usw. zu großer Bedeutung gelangt ist, in der wirtschaftswissenschaftlichen Forschung nur geringerem Interesse begegnen kann. Die Ausführungen sind allgemein gehalten; irgendwelche mathematische Entwicklungen bzw. Darstellungen enthält die Arbeit nicht. *G. Wünsche.*

Roos, Charles F.: Survey of economic forecasting techniques. — A survey article. Econometrica 23, 363—395 (1955).

Longo, Antonio: Considerazioni sulla nozione di „Modello econometrico“. Atti XIII e XIV Riun. sci. Roma 1953—1954, 203—207 (1955).

Morin, François: Note on an inventory problem. Econometrica 23, 447—450 (1955).

Verf. greift ein von F. Modigliani und F. E. Hohn (dies. Zbl. 64, 395) behandeltes Problem auf und löst es unter etwas abgeänderten Bedingungen als Variationsproblem. Das Integral (totale Produktionskosten)

$$C = \int_0^T [\alpha (X(t) - S(t)) + f(X')] dt$$

ist bei gegebener stückweise stetiger Verkaufsfunktion $S(t) \geq 0$ zum Minimum zu machen unter den Bedingungen $X(0) = h_0$, $X(T) = S(T)$, $X(t) \geq S(t)$. Die Lösung der Extremalengleichung $X'' f''(X') = \alpha$ [wo $f(x)$ mit $f''(x) > 0$ die Produktionskosten für x Einheiten pro Zeiteinheit bedeuten] ist von der Form $X - \bar{X} = \Phi(t - \bar{t})$ und wird unter der Eckenbedingung

$$f(X'_{+0}) - f(X'_{-0}) = (X'_{+0} - X'_{-0}) f'(X'_{-0})$$

aus nach oben konkaven Kurven zusammengesetzt, die im Spezialfall $f(x) = a x^2 + b x + c$ ($a > 0$) Parabeln der Form $X - \bar{X} = \alpha (t - \bar{t})^2 / 4 a$ sind.

M. P. Geppert.

Eisemann, Kurt: Linear programming. Quart. appl. Math. 13, 209—231 (1955).

An excellent survey of the theory of Linear Programming, dealing mainly with the Simplex Method in its most recent version. The conclusion reads as follows: „The impressive power of Linear Programming holds the promise of a significant contribution to the economic machinery of human society“.

S. Vajda.

San Juan Llosá, Ricardo: Die Simplexmethode beim linearen Programmieren. Revista de Ciencia aplicada 43, 133—136 (1955) [Spanisch].

This is a new version of section 3 of the author's earlier paper (this Zbl. 57, 125). He then claimed to expound a new method of finding a first feasible solution; the new text is very nearly a copy of the appropriate section of G. B. Dantzig's original paper on the Simplex Method (see this Zbl. 45, 98). There is also a long list of errata, but it does not include all those noticed by the reviewer. (The remaining objections mentioned in the review of the earlier paper still hold.)

S. Vajda.

Antosiewicz, H. A.: A theorem on alternatives for pairs of matrices. Pacific J. Math. 5, 641—642 (1955).

A. W. Tucker in „Theorems of alternatives for pairs of matrices“, Symposium on Linear Inequalities and Programming, Washington 1951, has indicated a proof of the following two statements [which may be considered as generalizations of the „Theorem of the alternative for matrices“ on p. 140 of v. Neumann and Morgenstern, Theory of games and economic behavior (this Zbl. 53, 93) and of other known theorems by Farkas, Stiemke, Motzkin and Ville]. I. Either $A' u > 0$, $B' u \geq 0$ for some u or $A x + B y = 0$ for some $x \geq 0$, $y \geq 0$. II. Either $A' u \geq 0$, $B' u \geq 0$ for some u or $A x + B y = 0$ for some $x > 0$, $y \geq 0$. Here A and B are matrices, x , y and u are vectors and $x \geq 0$ means $x_i \geq 0$ but $x \neq 0$. As Tucker had already mentioned, both statements are equivalent to the following: A linear subspace contains some $x > 0$, $y \geq 0$ or its orthogonal complement contains some $x \geq 0$, $y \geq 0$. In the present paper the author gives a simple algebraic proof of the equivalence of I and II.

S. Vajda.

Bellman, R.: Some functional equations in the theory of dynamic programming. I. Functions of points and point transformations. Trans. Amer. math. Soc. 80, 51—71 (1955).

Für den vom Verf. früher aus den Anwendungen motivierten Gleichungstyp

$$f(p) = \sup_q [g(p, q) + h(p, q) f(T(p, q))],$$

wo f die unbekannte Funktion ist, werden in dieser Arbeit z. T. schon angekündigte (dies. Zbl. 47, 138) Existenz- und Eindeutigkeitsätze unter verschiedenen Voraussetzungen erbracht. Dabei sind g , h gegebene reellwertige, T eine gegebene vektorwertige Funktion und p und q durchlaufen n -dimensionale Bereiche. Statt des letzten Gliedes wird auch eine Summe oder ein Stieltjessches Integral zugelassen. Die Konstruktion der Lösung erfolgt durch die Iteration

$$f_{n+1}(p) = \sup_q [g(p, q) + h(p, q) f_n(T(p, q))],$$

deren Konvergenz, ebenso wie die Eindeutigkeit der Lösung, aus den darauf zugeschnittenen speziellen Voraussetzungen über g , h und T mittels des Banach-Weissingerschen Fixpunktsatzes gefolgert wird, und die im Falle $h(p, q) \geq 0$, angeregt durch Betrachtungen im „policy“-Raum [den Funktionen $q(p)$, für die das Maximum angenommen wird], als monoton nachgewiesen wird. Der Einfluß der Abänderung von g ergibt sich leicht. Als neue Beispiele werden Probleme des

Überlebens in der Spieltheorie behandelt, bei denen unter Voraussetzungen, die die Anwendung des Hauptsatzes der Theorie der Spiele gestatten, in der Gleichung auch ein „ $\sup \inf$ “ an Stelle von „ \sup “ stehen darf. *D. Morgenstern.*

Bellman, Richard: Functional equations in the theory of dynamic programming. II. Nonlinear differential equations. Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 482—485 (1955).

This paper gives results, to be proved elsewhere, concerning existence and uniqueness of the solution of the functional equation $dx/dt = \text{Max}_q [f(x, t; q)]$, $x(0) = c$, where x , f and c are n -dimensional vectors and q is an m -dimensional vector. The solution may be obtained by successive approximations. For f linear in x , a second method of successive approximations is exhibited which works under given conditions. *S. Vajda.*

Bellman, Richard: Functional equations in the theory of dynamic programming. V. Positivity and quasi-linearity. Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 743—746 (1955).

The author states conditions under which the solution of the functional equation $u(p) = \text{Max}_q L(u, p, q) + a(p, q)$, where $L(u, p, q)$ is a linear operator for every value of q , can be written as $u(p) = \text{Max}_q v(p, q)$, v being the solution of $v(p, q) = L(v, p, q) + a(p, q)$. He deals also with the corresponding problem for $u(p) = \text{Max}_q \text{Min}_{q'} L(u, p, q, q') + a(p, q, q') = \text{Min}_{q'} \text{Max}_q L(u, p, q, q') + a(p, q, q')$, and illustrates his results by examples. *S. Vajda.*

Shubik, M.: A comparison of treatments of a duopoly problem. II. Econometrica **23**, 417—431 (1955).

This is a continuation of an earlier study (Mayberry-Nash-Shubik, this Zbl. **50**, 151). It deals with a modified Edgeworth duopoly, an alternate move duopoly, a non-cooperative price game, and a non-cooperative price-quantity game. The latter is discussed, but not solved. *S. Vajda.*

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Bruck, R. H.: Recent advances in the foundations of Euclidean plane geometry. Amer. math. Monthly **62**, Nr. 7, Part 2, 2—17 (1955).

Hall jr., Marshall: Finite projective planes. Amer. math. Monthly **62**, Nr. 7, Part 2, 18—24 (1955).

Ryser, H. J.: Geometries and incidence matrices. Amer. math. Monthly **62**, Nr. 7, Part 2, 25—31 (1955).

Die drei Noten geben einen guten Überblick über einige bisher bekannte Ergebnisse der Theorie der projektiven Ebenen und verwandter Gebilde. — R. H. Bruck bringt eine Zusammenstellung der wichtigsten Beziehungen zwischen Schließungssätzen in affinen Ebenen (vom Verf. „euclidean planes“ genannt) einerseits und Eigenschaften der diese Ebenen erzeugenden Ternärkörper (ternary rings) andererseits. — M. Hall bringt Ergebnisse und Probleme über endliche Ebenen und lateinische Quadrate. (Dem Ref. neu war die Bemerkung, daß durch eine Untersuchung mit der SWAC-Maschine sich die Nichtexistenz von nicht-desarguesschen projektiven Ebenen mit 9 Punkten auf jeder Geraden ergab.) — H. J. Ryser gibt eine Übersicht über die wichtigsten bekannten Eigenschaften der Inzidenzmatrizen zu den (v, k, λ) -Konfigurationen (auch als symmetrische Blockpläne bekannt; die Spezialisierung $\lambda = 1$ ergibt projektive Ebenen), insbesondere über Fragen der Existenz bzw. Nichtexistenz solcher Matrizen; einige noch offene Probleme führt er im folgenden an. — Zu den Ergebnissen vgl. insbesondere M. Hall, Trans. Amer. math. Soc. **54**, 229—277 (1943) und G. Pickert, Projektive Ebenen, Heidelberg 1955.

J. André.

Pickert, Günter: Einfacher Beweis eines Satzes von M. Hall über offene Inzidenzstrukturen. Arch. der Math. 6, 417—419 (1955).

M. Hall, nella sua ormai classica memoria: Projectives planes [Trans. Amer. math. Soc. 54, 229—277 (1943)] ha stabilito tra l'altro il seguente teorema: „Un piano parziale libero aperto non degenerare è equivalente-libero ad un piano parziale costituito, per un determinato numero intero positivo n , esattamente da n punti e da una retta passante esattamente per $n - 2$ tra di essi“ (Piano parziale o „Inzidenzstruktur“: insieme costituito da „punti“ e „rette“, tra punti e rette sussistendo una relazione di incidenza che soddisfa alla condizione: da $A_i \in a_k$ ($i, k = 1, 2$) segue $A_1 = A_2$ oppure $a_1 = a_2$: un piano parziale è aperto se è finito, e se in nessun suo sottoinsieme di punti e rette ogni elemento incide con almeno tre elementi; degenerare se tutti i punti, eccetto al più uno, sono su di una retta e se tutte le rette al di fuori di una (al più), passano per un medesimo punto; due piani parziali sono tra di loro equivalenti-liberi se si possono ottenere l'uno dall'altro eseguendo un certo numero di volte le seguenti due operazioni: „aggiunta“ o „rimozione“ di un punto appartenente esattamente a due rette, di una retta passante esattamente per due punti). La dimostrazione originaria di Hall, sostanzialmente adottata dal Pickert nel suo recente volume „Projektive Ebenen“ (Berlin 1955), viene nella presente nota grandemente semplificata, con un elegante procedimento induttivo rispetto al numero dei punti di un piano parziale. *L. Lombardo-Radice.*

Wesson, J. R.: Finite plane projective geometries. Amer. math. Monthly 62, Nr. 7, Part 2, 32—40 (1955).

Verf. untersucht endliche H -Systeme oder Ternärkörper H [vgl. M. Hall, Trans. Amer. math. Soc. 54, 229—277, insbes. p. 247—248 (1943) oder G. Pickert, Projektive Ebenen, Heidelberg 1955, S. 36]. Die A -Ordnung eines Elementes $x \in H$ ist die kleinste positive Zahl m , für die $x_m = 0$ ist. Hierbei wird x_i für jede ganze nicht negative Zahl i induktiv durch $x_0 = 0$, $x_i = 1 x_{i-1} x$ definiert. [Mit $a b c$ werde die in H definierte ternäre Verknüpfung von a, b, c bezeichnet; M. Hall bezeichnet diese mit $a \cdot b \circ c$, G. Pickert mit $T(a, b, c)$.] Jedes Element eines endlichen Ternärkörpers hat eine A -Ordnung. H heißt distributiv, wenn $a b_i 0 = a_i b 0 = (a b 0)_i$ und assoziativ, wenn $1 (1 a b) c = 1 a (1 b c)$ gilt. Es werden einfache Sätze über die Anzahl der Elemente von solchen Ternärkörpern gegeben. Ferner zeigt Verf., daß ein endlicher assoziativer und distributiver Ternärkörper, für den außerdem $1_x = a$ für jedes $a \in H$ nach x lösbar sein soll, zu einem Körper wird, wenn man $a - b = 1 a b$ und $a b = a b 0$ setzt. — Die vom Verf. angegebene Konstruktion der Ternärkörper aus einer endlichen projektiven Ebene weicht von denen von M. Hall und G. Pickert etwas ab. *J. André.*

Havel, Václav: Harmonical quadruplet in Moufang plane. Czechosl. math. J. 5 (80), 76—82 und russ. Zusammenfassg. 82 (1955).

Die Note dient im wesentlichen der Ableitung einer Bedingung für die Koordinaten von vier harmonischen Punkten auf der Koordinatenachse einer affinen Ebene über einem Alternativkörper der Charakteristik $\neq 2$. Diese Bedingung wird in der nachfolgend besprochenen Arbeit gebraucht. *H. Salzmann.*

Havel, Václav: On the theorem of Staudt in Moufang plane. Czechosl. math. J. 5 (80), 83—89 und russ. Zusammenfassg. 89—90 (1955).

Es werden projektive Ebenen betrachtet, in denen der Satz vom vollständigen Viereck gilt, das sind Ebenen über einem Alternativkörper mit von 2 verschiedener Charakteristik. Verf. bemerkt, daß in diesen Alternativkörpern der Beweis von L. K. Hua (dies. Zbl. 50, 260) richtig bleibt, daß jeder Semiautomorphismus (Automorphismus σ der additiven Gruppe mit $(x y x)^\sigma = x^\sigma y^\sigma x^\sigma$ und $(x^2)^\sigma = (x^\sigma)^2$) ein Automorphismus oder Antiautomorphismus ist und daß man die Semiautomorphismen auch durch $(x y + y x)^\sigma = x^\sigma y^\sigma + y^\sigma x^\sigma$ kennzeichnen kann. Mit Hilfe der vom Verf. in der vorstehend besprochenen Arbeit bewiesenen Tatsache, daß

sich die harmonische Lage der Punkte mit den Koordinaten a, b, c, d durch $(a - c)^{-1} \cdot (b - c) = -(a - d)^{-1} (b - d)$ ausdrückt, ergibt sich, daß die umkehrbar eindeutigen Abbildungen einer Geraden auf sich, welche die harmonische Lage von Punktequadrupeln erhalten, genau diejenigen sind, die sich aus einer Projektivität und einem Semiautomorphismus zusammensetzen.

H. Salzmann.

Segre, Beniamino: Curve razionali normali e k -archi negli spazi finiti. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 39, 357—379 (1955).

Sia γ un corpo finito di ordine $q = p^f$; la caratteristica p di γ sia un numero primo dispari; sia $S_{r,q}$ uno spazio lineare di dimensione r su γ . L'A. chiama, per analogia con il caso classico, curve razionali normali di $S_{r,q}$ le varietà irriducibili V'_1 di $S_{r,q}$ non appartenenti a uno spazio lineare subordinato di dimensione inferiore ad r ; chiama k -arco di $S_{r,q}$ ogni insieme di k punti di $S_{r,q}$ linearmente indipendenti se $k \leq r$, o altrimenti tali che mai $r + 1$ tra essi giacciono in uno stesso iperpiano. Nel corso della Memoria (dedicata a M. Picone nel suo 70-mo compleanno) l'A. stabilisce una serie di importanti teoremi sulle V'_1 e sui k -archi di $S_{r,q}$, nella ipotesi che q sia dispari; ne riassumeremo qui i principali. Il Teorema I afferma, tra l'altro che (nella ipotesi $q > r + 1$) una V'_1 è un $(q + 1)$ -arco; che una V'_1 può venire rappresentata parametricamente con le equazioni $x_0 : x_1 : \dots : x_r = 1 : t : t^2 : \dots : t^r$; che le V'_1 di $S_{r,q}$ (due a due omografiche) sono in numero di

$$\prod_{i=0}^r (q^{r+1} - q^i) (q^4 - q^3 - q^2 + q);$$

che si determina una ed una sola V'_1 assegnando ad arbitrio $r + 3$ punti di $S_{r,q}$ ad $r + 1$ linearmente indipendenti. Il Teorema II stabilisce che il massimo valore di k tale che in $S_{r,q}$ esista qualche k -arco, è $q + 1$, non solo per $r = 2$ (come era già noto), ma anche per $r = 3, r = 4$. Il Teorema III inverte il primo risultato del Teorema I, non solo per $r = 2$ (v. B. Segre, questo Zbl. 65, 134) ma anche per $r = 3$; si ha cioè che, così come in $S_{2,q}$ ogni $(q + 1)$ -arco è una conica V_1^2 , in $S_{3,q}$ ogni $(q + 1)$ -arco è una cubica sghemba V_1^3 . Nel teorema IV infine, è contenuto tra l'altro il seguente singolare risultato: „ogni q -arco di $S_{2,q}$ è contenuto in una conica, univocamente determinata non appena $q > 3$ “. La dimostrazione di quest'ultimo risultato presenta particolari difficoltà: e richiede alcune premesse proiettive (§ II), anche di per sè interessanti; da esso consegue facilmente il teorema III. Nella presente Memoria, l'A. propone anche tre gruppi di problemi più generali: I. Determinare il massimo valore di k per il quale in $S_{r,q}$ (r, q dati) esiste qualche k -arco. II. Vedere se, e in quali casi, ogni $(q + 1)$ -arco di $S_{r,q}$ è una curva razionale normale. III. Determinare se esistono valori di k ($\leq q$) tali che ogni k -arco è contenuto in qualche curva razionale normale di $S_{r,q}$. Questi problemi, ed altri suggeriti dall'A., hanno già dato luogo ad altre ricerche, di recente pubblicazione o in corso di pubblicazione (di Tallini sulla caratterizzazione delle quadriche come insieme di punti in $S_{r,q}$; di Panella sullo stesso problema in $S_{3,q}$; di Lombardo-Radice su certe classi di k -archi non contenuti in una conica in $S_{2,q}$; di Ostrom e di Hughes sugli eventuali $(q + 1)$ -archi in un piano non desarguesiano finito, ecc.). I teoremi di Segre più su riassunti offrono una prima risposta ai problemi enunciati per alcuni valori di r e q .

L. Lombardo-Radice

Ostrom, T. G.: Ovals, dualities and Desargues's theorem. Canadian J. Math. 7, 417—431 (1955).

Nei primi quattro paragrafi l'A. studia piani grafici finiti di rango n dispari ($n + 1$ punti su di ogni retta). Chiama ovale (con Segre), un insieme di $n + 1$ punti tre a tre non allineati. È possibile, rispetto a un'ovale, anche nel caso non-desarguesiano (Qvist), distinguere le rette del piano in tangenti, secanti, esterne; i punti in „assoluti“ (della ovale), esterni o interni (a seconda che da essi si possano

concorre una, due o nessuna tangente alla ovale). Nel caso desarguesiano B. Segre ha dimostrato (questo Zbl. 65, 134) che ogni ovale determina una conica, e quindi una polarità. Nel caso non-desarguesiano, non è detto che una ovale determini una polarità; una „quasi-polarità“ si può però sempre definire, in modo analogo a quello usuale, limitatamente ai punti esterni e alle rette secanti. L'A. studia fino a che punto, e sotto quali condizioni, una ovale „assomiglia a una conica“ („an oval resembles a conic“), anche nel caso non-desarguesiano. A questo scopo, nel n. 1 l'A. studia le collineazioni σ che : (1) trasformano in sè una ovale \mathfrak{C} ; (2) nessuna potenza di σ ad eccezione della identità possiede punti fissi diversi da quelli di σ . Dopo aver dimostrato alcune proprietà aritmetiche di σ relative ai suoi punti fissi e al suo ordine, l'A. fa vedere che, se i punti fissi di σ sono i punti di una retta u ed un punto U non appartenente ad u , valgono per σ le principali proprietà dell'ordinaria omologia armonica avente per centro un punto U e per asse la polare di u rispetto a una data conica. Se una collineazione σ siffatta esiste per ogni U non su \mathfrak{C} , σ determina una polarità $U \lesssim u$, non limitata come prima ai soli punti esterni e alle rette secanti (1. 4). Nel n. 2, l'A. parte da una generalizzazione del concetto di gruppo armonico ($\{A B : C D\}$ allineati formano un gruppo armonico se A e B sono sulla ovale, C esterno, D sulla polare di C); chiama prospettività su \mathfrak{C} (simbolo \wedge) una prospettività tra due secanti nella quale a punti assoluti corrispondono punti assoluti (se il punto di incontro A è assoluto, il centro della prospettività è sulla tangente a \mathfrak{C} in A); chiama poi ovale armonica una ovale che soddisfi alla ipotesi A_1 , soddisfatta nel caso desarguesiano: „Se $\{A B : U E\}$ e $\{A_1 B_1 : U E_1\}$ sono gruppi armonici su due secanti che si incontrano in U (esterno), allora $A B U E \wedge A_1 B_1 U E_1$, e $A B U E \wedge B_1 A_1 U E_1$ “. Per due punti esterni U e V di una ovale armonica vale il teorema di reciprocità delle polari, e si estendono alcuni teoremi della geometria proiettiva ordinaria (per es., con ovvia estensione della terminologia ordinaria, si ha il teorema: (2. 3) due triangoli fondamentali $A B C$, $A_1 B_1 C_1$, tali che AB e $A_1 B_1$, AA_1 e BB_1 si incontrano in punti esterni, sono non solo prospettivi ma anche omologici). Nella trattazione, da un certo momento in poi, si riscontrano delle differenze a seconda che $n \equiv 1 \pmod{4}$ oppure $n \equiv -1 \pmod{4}$. Nel primo caso, ad es., il quarto armonico di un punto esterno è sempre esterno, nel secondo sempre interno. Aggiungendo alla ipotesi A_1 altre due opportune ipotesi, (nel caso $n \equiv -1 \pmod{4}$) si riesce a definire una polarità determinata dalla ovale armonica (2. 8). Nel n. 3 l'A. chiama quasi-conica un insieme di $n - 1$ punti tre a tre non allineati, che siano i punti assoluti di una polarità (per un teorema di R. Baer, tali punti formano una ovale, se n è dispari e non è un quadrato); chiama conica una quasi-conica tale che (ipotesi A): „se $\{A B : U E\}$, $\{A_1 B_1 : U E_1\}$ sono gruppi armonici rispetto a \mathfrak{C} , allora $A B U E \wedge A_1 B_1 U E_1$, $A B U E \wedge B_1 A_1 U E_1$ “. Si ottengono allora teoremi dimostrati validi nel n. 2 (ovali armoniche) e nuovi teoremi (ad es: 3. 4. Due triangoli prospettivi aventi i vertici su di una medesima conica sono anche omologici; 3. 5. 1. Un gruppo armonico può essere anche definito mediante un opportuno quadrangolo costruttore; ecc). In generale, in un piano che ammetta una polarità, triangoli autopolari prospettivi sono addirittura omologici. Nel n. 4, vengono studiate certe classi di quasi-coniche nei piani ciclici (dotati di un gruppo ciclico di collineazioni transitivo sui punti del piano), che si presentano come insieme dei punti assoluti di certe polarità e di certe correlazioni. La trattazione è svolta con l'ausilio dei „sistemi di differenze“, e risultati aritmetici vengono ottenuti sui cosiddetti „moltiplicatori“; la trattazione è poi estesa ai piani transitivi regolari (abeliani), dotati cioè di un gruppo abeliano di collineazioni transitivo sui punti e sulle rette, tale che la sola identità lascia fisso un dato punto O [introdotti e studiati da Zappa, *Ricerche Mat.* 2, 274—287 (1953)]. Nel n. 5, infine, l'A. dimostra che, in un piano finito di rango n pari, i punti diagonali di certi quadrangoli sono allineati (configurazione di Fano) se: (5. 1) i punti assoluti di una polarità giacciono

su di una retta; oppure se: (5. 2) il piano è ciclico, di rango n pari non quadrato; o infine se: (5. 3) il piano ammette una collineazione di ordine 2 nella quale sono fissi i punti di una retta l e le rette per un punto P di l . L. Lombardo-Radice.

Edge, W. L.: The conjugate classes of the cubic surface group in an orthogonal representation. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 233, 126—146 (1955).

Die in der Überschrift genannte Gruppe wird durch orthogonale Matrizen mit der Determinante $+1$ über dem Körper $GF(3)$ dargestellt. Die 25 Klassen konjugierter Elemente werden diskutiert. Die Arbeit stützt sich auf vom Verf. früher entwickelte Methoden (dies. Zbl. 55, 144; 64, 143). F. W. Levi.

Klingenberg, Wilhelm: Desarguessche Ebenen mit Nachbarelementen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 20, 97—111 (1955).

The author continues his earlier work on affine planes ε_a with neighbouring elements (this Zbl. 57, 126; 57, 363). A translation τ of ε_a is a map with the following properties: 1. any line h is mapped on a parallel line h^τ , 2. to any points Q, R and any trace j of τ through Q (i. e. any line through Q and Q^τ) there exists a trace of τ through R parallel to j . ε_a is called Desarguesian if it satisfies the little theorem of Desargues δ : the set \mathfrak{T} of all translations is a (simply) transitive group, and the great theorem of Desargues Δ : if every trace of $\tau \in \mathfrak{T}$ is a trace of $\tau' \in \mathfrak{T}$ then there exists a trace preserving endomorphism a of \mathfrak{T} such that $a\tau = \tau'$. It is proved that ε_a is Desarguesian if and only if it can be represented at the affine analytic geometry over a skew Hjelmslev ring. F. A. Behrend.

Graeb, W.: Der Jordansche Kurvensatz in der affinen Geometrie. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 181, 13 S. (1955).

Für Ebenen, in denen lediglich die Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome (einschließlich des Axiomes von Pasch), dagegen nicht die Axiome der Stetigkeit, Kongruenz und das euklidische Parallelenaxiom vorausgesetzt werden, beweist Verf. das folgende Analogon zum Jordanschen Kurvensatz: Ein geschlossenes Polygon (sich nicht selbst schneidender Streckenzug) π zerlegt die Ebene in genau zwei Teile, derart, daß es wohl möglich ist, zwei Punkte desselben Teiles durch einen π nicht treffenden Streckenzug zu verbinden, jedoch nicht zwei Punkte aus verschiedenen Teilen. Ein offenes Polygon zerlegt die Ebene nicht auf diese Weise. J. André.

Gheorghiu, O. Em.: Au sujet d'un espace quasi Euclidéen. Acad. Republ. popul. Romine, Baza Cerc. sti. Timişoara, Studii Cerc. sti., Ser. I 2, 27—35, russ. Zusammenfassg. 35 und franz. Zusammenfassg. 36 (1955) [Rumänisch].

Aus dem französischen Résumé: Verf. führt im S_3 ein System von hyperkomplexen Zahlen ein. Er führt ferner drei Funktionen von zwei Argumenten ein, die die Rolle von Kosinus spielen und als Sonderfall die Appellschen Funktionen enthalten. Dann werden das Linienelement

$$ds = \sqrt[3]{(dx + dy \lambda_1 + dz \lambda_1^2)(dx + dy \lambda_2 + dz \lambda_2^2)(dx + dy \lambda_3 + dz \lambda_3^2)},$$

die Gleichungen einer Geraden, deren Richtungskosinus die obigen drei Funktionen sind, die Gleichung einer Ebene, die isotropen Ebenen (in denen die Entfernung je zweier beliebiger Punkte Null ist) und die Gleichung einer Kugel eingeführt. Er definiert die Orthogonalität in verallgemeinertem Sinn zweier Richtungen und beweist den Satz, daß zu einer gegebenen Richtung genau zwei in verallgemeinertem Sinn orthogonale Richtungen existieren. M. Zacharias.

Elementargeometrie:

● **Jaglom, J. M.:** Geometrische Transformationen. I: Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen. (Bibliothek des mathematischen Zirkels. Bd. 7.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1955. 282 S. R. 5,45 [Russisch].

Das vorliegende Büchlein ist der erste Band eines auf 2 Bände berechneten

Werks. Nach den Worten der Einleitung wird bei der Anlage des Ganzen bewußt auf elementaren Charakter Wert gelegt, und es werden dabei sogar Worte wie Inzidenz, kollinear usw. vermieden. Das Buch dürfte somit jedem Schüler verständlich sein, enthält aber eine solche Fülle vorzüglichen Materials, das sich in dieser Form etwa in der neueren deutschen Literatur wohl kaum zusammengestellt findet. Leitender Gedanke ist das Erlanger Programm F. Kleins. Demnach ist der vorliegende Band der Geometrie der Hauptgruppe gewidmet, der darauffolgende soll Aufgaben der projektiven und konformen Geometrie enthalten. In diesem Band werden die Begriffe Bewegung, Parallelverschiebung, Spiegelung, Drehung, Gleitspiegelung, zentrale Ähnlichkeitstransformationen, evtl. noch mit einer Drehung verknüpft, sowie einiges aus der ebenen Kinematik, um die es sich handelt, jeweils kurz erläutert, aber ohne alle Formeln oder ausführliche Axiomatik. Das Wesentliche sind jedoch die sich daran knüpfenden insgesamt 106 Aufgaben mit den zugehörigen Lösungen, die die zweite Hälfte des Bandes füllen. Die Aufgaben betreffen vielfach Konstruktionen oder Probleme, die mit Hilfe der zuvor eingeführten elementaren Transformationen (Bewegungen, Ähnlichkeiten usw.) zu lösen sind. Einige Andeutungen über das reichhaltige, darin enthaltene Material mögen genügen: Konstruktion der kürzesten Verbindung zwischen 2 Punkten mit Brücke über einen Fluß dazwischen oder nach Reflektion an einer gegebenen Geraden; Konstruktion von Dreiecken, Quadraten usw., von denen die Ecken vorgeschriebene Lagen auf Geraden haben oder bestimmte Teilverhältnisse definieren; Satz von den 3 Ähnlichkeitszentren. Satz des Ptolemäus, Satz von der Simsongeraden, Konstruktion ähnlicher Figuren zu gegebenen, die bestimmte Bedingungen zu erfüllen haben. *W. Burau.*

Court, N. A.: Three mutually orthogonal real circles. Amer. math. Monthly **62**, Nr. 7, Part 2, 59—65 (1955).

Drei paarweise orthogonale reelle Kreise (A) , (B) , (C) haben sechs Schnittpunkte $P, P'; Q, Q'; R, R'$. Diese bilden vier Paare von „komplementären Schnittdreiecken“ $PQR, P'Q'R'; PQ'R', P'QR; P'Q'R', PQ'R; P'Q'R, PQR'$. Die Dreiecke jedes Paares liegen perspektiv bezüglich des reellen Mittelpunktes M des imaginären Orthogonalkreises der drei Kreise. Die vier Perspektivitätsachsen fallen mit den Ähnlichkeitsachsen der Kreise zusammen. Betreffs der weiteren Ergebnisse der Untersuchung dieser Figur muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

M. Zacharias.

Castaldo, Pietro: I rapporti anarmonici di punti e di rette e le formule di addizione e sottrazione degli angoli. Archimede **7**, 272—274 (1955).

Goormaghtigh, R.: Couples de polygones bordés de parallélogrammes. Mathesis **64**, 340—344 (1955).

Ulčar, Jože: Über die nichtinzidenten Seiten einiger Polytope. Fac. Philos. Univ. Skopje, Sect. Sci. natur., Annuaire **8** (1955), 3—23 und deutsche Zusammenfassg. 24—25 (1955) [Serbokroatisch].

Für einen Komplex K sei $[K]$ die Menge aller Seiten von K ; die Menge $[K]$ sei geordnet durch die Relation \subset . Es handelt sich dann um die Bestimmung der größten Antiketten von $[K]$, d. h. von größten Teilsystemen A von $[K]$, die aus nichtinzidenten Elementen bestehen. Der Ref. hat das Problem für Simplexe gelöst (dies. Zbl. **51**, 40; **52**, 373), der Verf. beweist nun diese Resultate für einige Polytope. Insbesondere für jedes reguläre Polytop K_n besteht A , wenn dazu $|A|$ maximal sein soll, aus Seiten von K_n , die alle von derselben Dimension sind; wenn $n \equiv 1 \pmod{6}$ oder $n \equiv 3 \pmod{6}$, existiert nur eine solche maximale Antikette; wenn $n \equiv 2 \pmod{6}$, existieren zwei solche Antiketten; in keinem Falle kann man mehr als 2 solche maximalen umfangreichsten Antiketten M haben. Insbesondere im Raum R_4 hat man 6 reguläre Polytope $Z_n: Z_5, Z_8, Z_{16}, Z_{24}, Z_{120}, Z_{600}$ (im Z_n bedeutet n die Anzahl der begrenzenden Grenzräume von Z_n). Im Falle Z_{120} (Z_{600}) besteht M aus allen 2- (1-) dimensional Seiten. Für $n > 4$ enthält R_n drei reguläre Polytope: A_n (das Simplex),

B_n (das Maßpolytop) und C'_n (reziprok verwandt zu B_n). Für B_n, C'_n existieren ein oder zwei Mengen M , je nachdem ob $n \not\equiv 2 \pmod{3}$ oder $n \equiv 2 \pmod{3}$ ist. Für jedes simpliziale Polytop S im R_n mit $n+2$ Eckpunkten besteht M aus allen $[n/2]$ -dimensionalen Seiten von S . Wenn ein Polytop im R_n gerade $n+2$ Grenzräume R_{n-1} hat, dann besteht M aus allen $[(n-1)/2]$ -dimensionalen Seiten desselben Polytops.

D. Kurepa.

Petty, C. M. and D. Waterman: An extremal theorem for N -simplexes. *Monatsh. Math.* **59**, 320—322 (1955).

In Verallgemeinerung eines Satzes von Fejes-Tóth [Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum (dies. Zbl. **52**, 184), S. 11—12] von 3 auf n Dimensionen wird bewiesen: Sind R_i ($i = 0, \dots, n$) die Abstände eines beliebigen Punktes P von den Ecken eines nichtausgearteten Simplexes im E^n vom Volumen Δ , so ist

$$R_0 + \dots + R_n \geq (n+1)^{(n-1)/2n} n^{1/2} (n!)^{1/n} \Delta^{1/n},$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn das Simplex regulär und P sein Höhenschnittpunkt ist. Der Beweis benutzt folgenden Hilfssatz: Hat ein n -Simplex den Höhenschnittpunkt P und sind u_i die Einheitsvektoren von P in Richtung zu den Ecken, so ist das Simplex dann und nur dann regulär, wenn $u_0 + \dots + u_n = 0$ ist.

H. Gericke.

Heppes, A.: Über mehrfache Kreislagerungen. *Elemente Math.* **10**, 125—127 (1955).

Eine Kreispackung wird k -fach genannt, wenn jeder Punkt der Ebene zum Inneren von höchstens k Kreisen gehört. Es wird für ein jedes $k \geq 2$ eine k -fache Lagerung kongruenter Kreise von einer Dichte $8\pi k/7 \sqrt{15}$ konstruiert. Die Konstante $8\pi/7 \sqrt{15}$ übertrifft die Dichte $\pi/\sqrt{12}$ der dichtesten einfachen Kreislagerung.

L. Fejes Tóth.

Schütte, Kurt: Überdeckungen der Kugel mit höchstens acht Kreisen. *Math. Ann.* **129**, 181—186 (1955).

Es handelt sich um das Problem, zu gegebener Zahl N den kleinsten Radius r zu bestimmen, so daß die Einheitskugel durch N Kreisscheiben vom Radius r überdeckt wird. Für $N = 3, 4, 6$ und 12 spannen die Kreismittelpunkte bekanntlich ein reguläres Dreieckspolyeder auf. Hier wird die Lösung des Problems für $N = 5$ und 7 gegeben. In beiden Fällen (ebenso wie bei $N = 6$) bestimmen die Mittelpunkte eine reguläre Doppelpyramide. Für $N = 8$ wird eine ziemlich unregelmäßige Kreisüberdeckung der Kugel angegeben, die vermutlich die dünnste ist. *L. Fejes Tóth.*

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Stockton, F. G.: A set of triply perspective triangles associated with projective triads. *Amer. math. Monthly* **62**, Nr. 7, Part 2, 41—51 (1955).

In der Papposschen Konfiguration (9_3) bilden die 9 Punkte drei Dreiecke A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, 3$), von denen je zwei in umgekehrter Ordnung dreifach perspektiv liegen bezüglich der Ecken des dritten. Drei solche Dreiecke nennt Verf. eine „zentrale Zelle“ dreifach perspektiver Dreiecke. Die duale Figur nennt er eine „axiale Zelle“. Nach dem Desarguesschen Dreieckssatz sind je zwei Dreiecke der zentralen Zelle dreifach axial perspektiv, und die beiden Dreiecke bilden mit dem Dreieck der drei Perspektivitätsachsen eine axiale Zelle. Die Gesamtheit der Dreiecke, die von zwei dreifach perspektiven Dreiecken durch wiederholte Anwendung des Desarguesschen Satzes und seines dualen abgeleitet werden können, wird „Dreiecksgitter“ genannt. Hält man bei dieser Ableitung das eine Dreieck A des Ausgangspaares A, B fest und paart es jedesmal mit dem zuletzt abgeleiteten Dreieck, so erhält man einen „Zyklus von Dreiecken um A “. Jedes Dreieck des Zyklus ist zu A dreifach perspektiv. Der Zyklus ist eine geschlossene Menge von sechs Drei-

ecken. Die Beziehungen zwischen den Dreiecken eines Zyklus bilden den Inhalt der Arbeit.

M. Zacharias.

Sispánov, Sergio: Eine analytische Methode zur Bestimmung von Kegelschnitten und Kubiken. *Revista Un. mat. Argentina* **16**, 129—150 (1955) [Spanisch].

Zweck der vorliegenden Abhandlung ist hauptsächlich die analytische Bestimmung des neunten Punktes, in welchem sich alle Kurven dritter Ordnung, die durch 8 gegebene Punkte gehen, notwendig treffen müssen. — Die Gleichungen des Kegelschnitts durch 5 Punkte und der Kurve dritter Ordnung durch 9 willkürlich gegebene Punkte werden in einer Form gegeben, welche, nach Meinung des Verf., zum Zeichnen der Kurven dienen soll.

M. Piazzolla-Beloch.

Bell, P. O.: Generalized theorems of Desargues for n -dimensional projective space. *Proc. Amer. math. Soc.* **6**, 675—681 (1955).

Verf. beweist folgende Verallgemeinerung des Desarguesschen Dreieckssatzes: Wenn zwei Simplexe $A_1 A_2 \dots A_n, A'_1 A'_2 \dots A'_n$ bezüglich eines Punktes q perspektiv sind, und wenn A_j nicht mit A'_j für $k < j \leq n$ zusammenfällt, so gibt es einen $A_i A_j, A'_i A'_j$ ($k < i < j, i = 1, 2, \dots, n-1$) gemeinsamen Punkt P_{ij} , der linear abhängt von den $j-1$ Punkten $P_{i, i+1}, P_{i+1, i+2}, \dots, P_{j-1, j}$. Die weitere Untersuchung betrifft die Umkehrung und Sonderfälle.

M. Zacharias.

Pimiä, Lauri: Die quaternionische Begründung der reellen Liniengeometrie. *Soc. Sci. Fennica. Commentationes math.-phys.* **17**, Nr. 10, 20 S. (1955).

Teilweise im Anschluß an frühere Arbeiten des Verf. zur Kugelgeometrie [dies. Zbl. **27**, 243; *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, Ser. A I, Math.-Phys. Nr. 32 (1945)] wird die reelle Liniengeometrie durch eine reelle Zuordnung zwischen den Geraden des Raumes und homogenen hyperbolischen Quaternionen begründet. (Diese gehen durch eine einfache Substitution aus den Hamiltonschen Quaternionen hervor.) Jedem Punkt des projektiven R_3 entspricht eine hyperbolische Quaternion $X = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 - x_3 e_3$. Ist eine Gerade des R_3 durch zwei Punkte gegeben, so werden ihre Plückerschen Linienkoordinaten mit dem Quaternionenpaar verknüpft, das den gegebenen Punkten zugeordnet ist. Jeder reellen Geraden ist eineindeutig ein Punkt der projektiven quaternionischen Geraden, ein homogenes Quaternionenpaar, zugeordnet. Regelscharen zweiten Grades, Regelscharbüschel und lineare Strahlenkongruenzen, Regelscharbündel und lineare Strahlenkomplexe lassen sich durch lineare Quaternionenfunktionen darstellen. Mit Hilfe dieses Kalküls wird eine Reihe von Sätzen über diese liniengeometrischen Mannigfaltigkeiten hergeleitet.

F. Reutter.

Godeaux, Lucien: Une congruence linéaire de coniques. *Mathesis* **64**, 337—340 (1955).

Mahler, Kurt: The p -th compound of a sphere. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. **5**, 385—391 (1955).

Es seien $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(p)}$ p Punkte eines Raumes G_n von n Dimensionen, die dem Kugelraum $|X| \leq 1$ angehören. Aus den Koordinaten der Punkte $X^{(i)}$ bilde man eine Matrix mit p Zeilen und n Spalten; die $\binom{n}{p} = N$ Unterdeterminanten der Ordnung p einer solchen Matrix sind die Koordinaten eines Punktes \mathcal{E} in einem Raume G_N von N Dimensionen. Verf. betrachtet den Ort $\Sigma_n^{(p)}$ aller Punkte \mathcal{E} bei veränderlichen Punkten $X^{(i)}$ und die konvexe Hülle $\Gamma_n^{(p)}$ von $\Sigma_n^{(p)}$ und beweist: 1. $\Sigma_n^{(p)}$ ist der Durchschnitt des Kugelraumes $|\mathcal{E}| \leq 1$ mit der Grassmannschen Mannigfaltigkeit $\Omega(n, p)$; 2. $\Gamma_n^{(p)}$ ist die konvexe Hülle des Durchschnitts von $\Omega(n, p)$ mit der Kugel $|\mathcal{E}| = 1$. — Als Anwendung wird der Fall $n = 4, p = 2$ betrachtet. Nennt man ξ_i ($i = 1, \dots, 6$) die Unterdeterminanten der Matrix $|X^{(1)} X^{(2)}|$, die miteinander durch die Beziehung $\xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_5 + \xi_3 \xi_6 = 0$ verbunden sind, so findet man, daß $\Gamma_4^{(2)}$ aus allen Punkten ξ_i besteht, die den beiden

Ungleichungen $(\xi_1 + \xi_4)^2 + (\xi_2 + \xi_5)^2 + (\xi_3 + \xi_6)^2 \leq 1$, $(\xi_1 - \xi_4)^2 + (\xi_2 - \xi_5)^2 + (\xi_3 - \xi_6)^2 \leq 1$ genügen.
E. Togliatti.

Algebraische Geometrie:

Severi, Francesco: *Complementi alla teoria della base*. Ann. Mat. pura appl. IV. Ser. **40**, 1—14 (1955).

Seit der ersten 1906 erschienenen Arbeit (Math. Ann. **62**, 194—225) über das Problem der Basis (für die Menge aller algebraischen Kurven auf einer algebraischen Fläche) ist dies der 18. Beitrag des Verf. zum verallgemeinerten Problem, eine endliche Basis für die Menge aller k -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten V_k einer M_r anzugeben. M_r wird irreduzibel und singularitätenfrei vorausgesetzt. Die Grundlage der Theorie bilden Kriterien für die lineare, bzw. algebraische Äquivalenz von V_{r-1} auf der M_r (vgl. dies. Zbl. **64**, 401). Aus den ersten Kriterien folgt, daß die Dimension der kompletten algebraischen Systeme $\{|V_{r-1}|\}$, deren Elemente lineare Vollscharen $|V_{r-1}|$ sind, eine gewisse ganze Zahl q , die „Flächenirregularität“ (irregolarità superficiale) von M_r , nicht überschreitet. Daraus kann das wichtige Kriterium für algebraische Äquivalenz abgeleitet werden: Zwei effektive $(r-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten V, W von M_r sind algebraisch äquivalent, $V \equiv W$, wenn $VF \equiv WF$ und F in einem allgemeinen Büschel F variabel ist. Wahrscheinlich gilt auch noch die Verallgemeinerung auf k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten V_k, W_k : diese sind algebraisch äquivalent, wenn für den Schnitt mit einer genügend allgemeinen Hyperfläche F die Äquivalenz $V_k F \equiv W_k F$ erfüllt ist. V_{r-1} und W_{r-1} sind schließlich unter sehr allgemeinen Voraussetzungen algebraisch äquivalent oder wenigstens „pseudoäquivalent“ (d. h. $\lambda V \equiv \lambda W$ für passendes λ), wenn $[Vr] = [Vr-1 W] = \dots = [W]$ ist. Man nennt zwei Untermannigfaltigkeiten V_k, W_k auf der M_r arithmetisch äquivalent (Verf. zieht jetzt die Benennung „numerativamente equivalente“ vor), wenn für jede komplementäre Z_{r-k} gilt: $[VZ] = [WZ]$. Dieser Äquivalenz entspricht topologisch auf der M_r zugeordneten Riemannschen Mannigfaltigkeit eine Pseudohomologie der zugehörigen Zykel (auch umgekehrt für $k = r-1$). Damit kann das Basisproblem hinsichtlich der arithmetischen Äquivalenz vollständig (für alle Dimensionen k) gelöst werden, hinsichtlich der algebraischen Äquivalenz zunächst nur für $k = r-1$ und für allgemeines k dann, wenn man den Satz, daß zwei V_k, W_k wenigstens algebraisch pseudoäquivalent sind, falls sie arithmetisch äquivalent sind, als bewiesen voraussetzt; Verf. skizziert dafür einen Beweis.

W. Gröbner.

Nakai, Yoshikazu: *On the arithmetic normality of hyperplane sections of algebraic varieties*. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A **29**, 159—163 (1955).

Verf. beweist mit Hilfe garbentheoretischer Methoden nach J. P. Serre, daß der Schnitt einer algebraischen Mannigfaltigkeit V_r , die in einem projektiven Raum R_n liegt und keine $(r-1)$ -dimensionalen Singularitäten besitzt (algebraisch abgeschlossener Grundkörper!), mit einer allgemeinen Hyperfläche immer dann und nur dann arithmetisch normal ist, wenn die V_r selbst arithmetisch normal und eine die Kohomologiegruppen betreffende Bedingung erfüllt ist. (Vgl. auch A. Seidenberg, dies. Zbl. **40**, 235.) Diese Bedingung würde viel einfacher und klarer aus der von Hilbert [Math. Ann. **36**, 473—534 (1890)] begründeten Syzygientheorie in der Weise folgen, daß die zur V_r gehörende Syzygienkette höchstens $n-2$ Glieder besitzen darf. Das ist von selbst für alle perfekten Mannigfaltigkeiten einer Dimension ≥ 2 , insbesondere also für vollständige Schnittmannigfaltigkeiten (Hauptklassenideale) erfüllt. Daher ist der zweite Satz dieser Arbeit, daß eine im bezeichneten Sinne singularitätenfreie V_r , die vollständiger Schnitt von r Hyperflächen ist, immer arithmetisch normal ist, von diesem Standpunkt aus beinahe trivial.

W. Gröbner.

Nagata, Masayoshi: On the normality of the Chow variety of positive O -cycles of degree m in an algebraic variety. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 29, 165—176 (1955).

Es bedeute $V(m)$ die Mannigfaltigkeit der Punktgruppen der Ordnung m auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit V ; $V(m)$ wird in üblicher Weise durch Chowsche Koordinaten, d. h. durch die Koeffizienten der Form $\Pi_i (\sum u_j x_j^{(i)})$ ($i = 1, \dots, m$), parametrisch dargestellt. Verf. untersucht die Frage, ob aus der Tatsache: „ V ist normal“ immer folgt: „ $V(m)$ ist normal“. Das ist richtig, wenn der Grundkörper die Charakteristik 0 hat; andernfalls gibt es wenigstens immer eine zu V biregulär äquivalente V' , so daß $V'(m)$ normal ist. Übrigens folgt allgemein aus der biregulären Äquivalenz von V und V' immer dieselbe Äquivalenz von $V(m)$ und $V'(m)$. Die Beweise beruhen auf Sätzen über die Darstellbarkeit der symmetrischen Formen in den $(x^{(i)})$ durch Fundamentalformen. Spezielle Beispiele zeigen die Notwendigkeit der Voraussetzungen. Die analoge Frage hinsichtlich „arithmetisch normal“ kann ähnlich beantwortet werden, sobald der noch ausstehende Beweis, daß $P(m)$ arithmetisch normal ist ($P = n$ -dimensionaler projektiver Raum über dem Grundkörper der Charakteristik 0), geglückt sein sollte.

W. Gröbner.

Luis, Emilio: Sur l'immersion des variétés algébriques. Ann. of Math., II. Ser. 62, 120—127 (1955).

Die Projektion einer Mannigfaltigkeit V_r eines projektiven Raumes R_n auf eine Hyperebene ist ausnahmslos birational und biregulär, wenn weder das Projektionszentrum auf der V_r liegt, noch irgendeine Sekante oder Tangente von V_r durch dasselbe geht. Die Gesamtheit aller Sekanten erfüllt eine Punktmannigfaltigkeit der Dimension $2r + 1$, die Tangenten erfüllen eine solche höchstens der Dimension $r + d - 1$, wo $d = \max(\dim Z(x))$ in allen singulären Punkten (x) der V_r , und $Z(x)$ den linearen Raum (espace tangent de Zariski) $\sum \partial F_\alpha / \partial x_i (X_i - x_i) = 0$ der durch die Gleichungen $F_\alpha(X) = 0$ definierten V_r bedeuten. Es folgt schließlich, daß die V_r sich in der angegebenen Weise immer auf eine in einem R_m eingebettete Mannigfaltigkeit V'_r projizieren läßt, falls $m = \max(r + d - 1, 2r + 1)$ ist.

W. Gröbner.

Severi, Francesco: Sulla teoria degli integrali semplici di 3^a specie sopra una superficie o varietà algebrica. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 14, 551—563 (1955).

On dit que les intégrales J_h ($h = 1, \dots, \sigma$) simples de troisième espèce attachées à une surface algébrique S sont essentiellement indépendantes, quand toute combinaison linéaire des J_h à coefficients constants non tous nuls est une intégrale de troisième espèce. Soient C_i ($i = 1, \dots, l$) des courbes algébriques de S , l'A. détermine le nombre des intégrales de troisième espèce essentiellement indépendantes dont les courbes logarithmiques se trouvent parmi les C_i . Les J_h étant essentiellement indépendantes on dit qu'elles sont linéairement indépendantes quand toute combinaison linéaire à coefficients constants non tous nuls admet des périodes cycliques. Des résultats concernant l'indépendance linéaire ainsi que les intégrales de troisième espèce sans périodes cycliques finissent le travail. Ces résultats s'obtiennent comme des conséquences, ou par des petites modifications, d'autres exposés par l'A. dans son ouvrage Funzioni quasi abeliane (ce Zbl. 41, 482).

G. Ancochea.

• **Roth, L.:** Algebraic threefolds with special regard to problems of rationality. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Reihe: Algebraische Geometrie, Heft 6). Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer Verlag 1955. VIII, 142 S. DM 19,80.

Die neue Folge der „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete“ gibt mit diesem 6. Heft eine sehr reiche und wertvolle Darstellung eines wichtigen Gebietes der algebraischen Geometrie. Verf., welcher zum Fortschritt dieser Theorien durch persönliche Untersuchungen viel beitragen hat, geht hier, so weit es möglich ist, vom klassischen algebraisch-geometrischen Standpunkt aus; nur wenn es unvermeidlich ist, benutzt er transzendente und topologische Methoden. Das Werk kann

in zwei Teile eingeteilt werden. Der erste Teil, die drei ersten Kap. umfassend, enthält die allgemeine Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten V_3 von drei Dimensionen: zunächst die Invariantentheorie (lineare Flächensysteme auf V_3 , Jacobische Systeme, kanonische und mehrkanonische Systeme, Geschlechter und Mehrgeschlechter, Irregularitäten, adjungierte Systeme); dann die Äquivalenzsysteme von Punktgruppen auf V_3 ; und schließlich den Satz von Riemann-Roch mit der Basistheorie und mit Anwendungen auf die Mannigfaltigkeiten von Picard. Wo die Ergebnisse mit denselben Methoden wie in der Flächentheorie erhalten werden können, werden die Beweise nicht entwickelt; sonst werden von den Beweisen wenigstens hinreichende Andeutungen gegeben. In den folgenden drei Kap., dem zweiten Teil des Titels entsprechend, werden Rationalitätsfragen für V_3 ausführlich behandelt. Es ist nicht möglich, über alle Einzelheiten einer Darstellung zu berichten, die alle verschiedenen möglichen Standpunkte und alle neueren Methoden und Ergebnisse berücksichtigt. Im Kap. 4 findet man verschiedene Bedingungen für die Rationalität oder Unirationalität einer V_3 (V_3 mit Kongruenzen von rationalen Kurven; die allgemeine Frage der Unisekanten; V_3 mit Systemen von elliptischen oder hyperelliptischen Kurven; V_3 mit Systemen von rationalen Flächen; Satz von G. Fano über V_3 mit rationalen hyperebenen Schnitten; V_3 mit Flächensystemen mit $p^{(1)} \leq 1$; usw.). Kap. 5 behandelt Fragen, die mit der Operation der Adjunktion verbunden sind (V_3 , auf welchen das Adjunktionsverfahren abbricht; V_3 mit antikanonischen Systemen; die V_3 von G. Fano und ihre Klassifikation; usw.). Kap. 6 betrachtet schließlich die V_3 , die kontinuierliche Gruppen von Automorphismen in sich zulassen (Fall einer Gruppe von Kollineationen; Abelsche, fast-Abelsche und pseudo-Abelsche V_3 ; elliptische und hyperelliptische V_3 ; usw.). Verschiedene der gefundenen Sätze können auf Mannigfaltigkeiten mit mehr als drei Dimensionen ausgedehnt werden. Ein kurzer Anhang am Schluß des Bandes enthält ein Verzeichnis der wichtigsten Begriffe und Sätze der Geometrie auf einer algebraischen Kurve oder Fläche. Eine reiche Bibliographie beschließt den Band.

E. Togliatti.

Godeaux, Lucien: Sur la surface des couples de points de la quintique de Snyder. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **41**, 1258—1263 (1955).

La quintique Q de Snyder $\sum a_i x_i^4 x_{i+1} = 0$ ($i = 1, 2, 3$), possède une involution rationnelle I d'ordre 13 ayant trois points unis aux sommets du triangle de référence; sur la surface F image des couples de points de Q , l'involution I détermine une involution J d'ordre 13 avec six points unis, dont trois correspondent aux points unis de I comptés deux fois, et trois aux couples de ces points; la structure de ces points unis est connue par des travaux antérieurs de l'A. Etude de la surface f image de J ; étude du comportement aux six points de diramation des courbes canoniques et bi-canoniques éventuelles; à partir de la construction des canoniques de F par leurs relations à la série canonique de Q (Severi), l'A. montre que $p_g = P_2 = 0$, puis que $p_a = 0$. La surface f est donc rationnelle. Détermination des singularités des points de diramation de f .

B. d'Orgeval.

Rosina, B. A.: Ulteriori sviluppi della teoria diametricale delle superficie algebriche. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. **4**, 51—67 (1955).

Dans cette note l'A. s'occupe de la théorie diamétrale des surfaces algébriques, de laquelle étaient connues seulement les définitions fondamentales (v. M. Piazzolla-Beloch, ce Zbl. **50**, 372). L'A. donne les principales propriétés diamétrales des surfaces algébriques. Ainsi il précise les conditions pour l'existence du point principal. (Les plans diamétraux en général, ne passent pas par un même point. Dans le cas particulier qu'ils y passent, ce point prend le nom de point principal.) Si le point principal existe, il peut être situé à distance finie ou à l'infini, ou être indéterminé: sur une droite, (les plans principaux passent alors tous par cette droite, en particulier ils sont parallèles) ou sur un plan (plan diamétral unique de la surface, con-

jugué à toutes les directions de l'espace). En chacun de ces cas l'A. détermine la forme de l'équation de la surface. Il s'occupe ensuite des plans principaux (plans diamétraux perpendiculaires à la direction conjuguée), et démontre que: Pour une surface algébrique d'ordre n qui ne passe pas par l'absolu de l'espace et rencontrant le plan à l'infini selon une courbe c irréductible ou réductible sans composantes multiples, le nombre des plans principaux est $\leq n^2$; si au contraire la courbe c se décompose en h courbes d'ordre respectivement r_1, r_2, \dots, r_h et de multiplicités $\alpha_i \geq 1$, ($i = 1, 2, \dots, h$), où au moins une de ces valeurs est > 1 , alors le nombre des plans principaux est $\leq (r_1 + r_2 + \dots + r_h)^2$, chacun d'eux compté α_i fois ($i = 1, 2, \dots, h$). Dans le cas exclus (où la surface passe par l'absolu de l'espace) l'A. démontre que tous les plans diamétraux sont principaux et réciproquement; et il donne la forme de l'équation de la surface (d'ordre pair) correspondante, laquelle est une quadrique généralisée. On en déduit l'équation d'une surface ayant tous ses plans diamétraux principaux et passant par un même point: cette surface est une sphère généralisée. L'A. s'occupe ensuite des surfaces ayant comme principaux tous ses plans diamétraux, parallèles à une direction donnée, et en détermine le type de l'équation, qui est toujours d'ordre pair.

M. Piazzolla-Beloch.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

● Newell, Homer E.: *Vector analysis*. (International Series in Pure and Applied Mathematics.) New York: Mc Graw-Hill Book Company 1955. XI, 228 p. \$ 5.50.

Das Buch zerfällt in zwei Hauptabschnitte, „Theorie“ und „Anwendungen“. Aber bereits im theoretischen Teil findet sich eine Fülle von Bemerkungen praktisch-angewandter Natur, und wenn es Darstellungen dieses mathematischen Gebietes gibt, deren Untertitel auf physikalische Leser zielt, ohne diese zu treffen, so ist die „Vector Analysis“ des Verf. ohne solchen Untertitel gerade Physikern wärmstens zu empfehlen. Bereits auf der zweiten Seite des theoretischen Teils wird die Ableitung des Exponentialgesetzes für den Druck einer Flüssigkeit im Gravitationsfeld der Erde als Aufgabe (5) gestellt; in Aufgabe (7) wird darauf hingewiesen, daß in Aufgabe (5) die Erdbeschleunigung g stillschweigend als Konstante angesehen worden ist und daß somit das Resultat der früheren Aufgabe entsprechend modifiziert werden muß. Wer genügend von Begriffen wie Ringen, Abelschen Gruppen mit Operatoren belastet ist, wird gern auch wieder einmal eine Definition des Vektors zur Kenntnis nehmen wie die folgende: Quantities which possess magnitude and direction and which combine according to the parallelogram law are known as vectors. Doch ist sich Verf. des invarianten- und gruppentheoretischen Charakters des Vektorbegriffs sehr wohl bewußt, und so folgt denn nach einigen gut gelungenen ingenieurmäßigen Zeichnungen auch ein kurzer Abschnitt über den Gruppenbegriff und über Vektoren als Elemente Abelscher Gruppen mit Multiplikatorenbereich. Wiederum wird diese abstrakte Besinnung zugunsten weiterer anschaulich ingenieurmäßiger Deutungen gelegentlich der Einführung skalarer und vektorieller Produkte verlassen. Das der Vektoralgebra gewidmete erste Kapitel schließt mit zahlreichen Übungsaufgaben. — Die Differentiation der Vektorfelder des euklidischen dreidimensionalen Raumes wird im dritten Kapitel behandelt, vorher wird im zweiten Kapitel an eine beträchtliche Reihe von Begriffen der reellen Analysis (Punktmengen, Abgeschlossenheit, Zusammenhang usw.) erinnert. Dabei finden sich in den Übungsaufgaben dieses zweiten Kapitels Diskussionen so wohlbekannter klassischer Funktionen wie $\sin(1/x)$, $x \sin(1/x)$ usw. Ja sogar die wesentlichen Sätze der Differential- und Integralrechnung werden rekapituliert. Auch im dritten Kapitel herrscht zunächst engster Anschluß an die Analysis der reellen Funktionen reeller Argumente. Erst mit der Einführung des Gradienten beginnt die spezifische Vektoranalysis. Das vierte Kapitel ist der Behandlung der Divergenz und Rotation eines Vektors

gewidmet, naturgemäß in engem Zusammenhang mit den Integralsätzen von Gauß und Stokes. Die Beweise dieser Integralsätze werden hinterher noch beide kritisch untersucht. Dabei stehen koordinateninvariante Definitionen, wie z. B. $\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oint_{\text{bdy of } \Delta V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ im Vordergrund. Analog bildet im fünften, dem Laplaceschen Operator gewidmeten Kapitel die Definition $\Gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oint_{\text{bdy of } \Delta V} d\mathbf{S}$ den Ausgangspunkt.

Kapitel 7 bringt in vorbildlicher Weise die Einführung krummliniger Koordinaten in die dreidimensionale Vektoranalysis. In zahlreichen Übungsaufgaben werden insbesondere zylindrische und sphärische Polarkoordinaten, parabolische Koordinaten, bipolare Koordinaten, sphäroidale, paraboloidale und ellipsoidale Koordinaten behandelt und Divergenzen und Rotationen und Laplacesche Operatoren in allen diesen und noch allgemeineren Fällen dargestellt. Der erste Hauptabschnitt schließt mit einem Exkurs in die Potentialtheorie skalarer und vektorieller Felder. Der zweite Hauptabschnitt enthält nur mehr drei weitere Kapitel, deren letztes und größtes eine Einführung in die elektromagnetische Feldtheorie behandelt, während die beiden anderen den kinematischen Grundbegriffen und der Theorie der räumlichen Bewegungen vorbehalten sind.

M. Pinl.

Finzi, Bruno: *Calcolo tensoriale negli spazi euclidei.* Conference Sem. Mat. Univ. Bari **11—15**, 3—16 (1955).

Finzi, Bruno: *Calcolo tensoriale negli spazi generali.* Conference Sem. Mat. Univ. Bari **11—15**, 17—23 (1955).

Finzi, Bruno: *Teoria gravitazionale di Einstein.* Conference Sem. Mat. Univ. Bari **11—15**, 24—32 (1955).

Finzi, Bruno: *Campo elettromagnetico nello spazio-tempo.* Conference Sem. Mat. Univ. Bari **11—15**, 33—41 (1955).

Finzi, Bruno: *Teorie relativistiche unitarie.* Conference Sem. Mat. Univ. Bari **11—15**, 42—51 (1955).

In einem vorzüglich zusammengestellten Zyklus von fünf Vorlesungen gibt der Verf. anläßlich des 50-sten Geburtsjahres der Relativitätstheorie eine gut verständliche Übersicht der wichtigsten Begriffe, die nötig sind, um einigermaßen zu erfassen, worum es sich in dieser Theorie handelt. I. Die erste Vorlesung ist eine Einleitung. In 14 Seiten wird das Notwendigste über Vektor- und Tensorkalkül im gewöhnlichen Raum zusammengestellt, sogar bis zu den krummlinigen Koordinaten und zugehörigen Christoffelsymbolen. II. Die Ergänzungen in dieser zweiten Vorlesung beziehen sich zunächst auf die Ebene und auf die Fläche im gewöhnlichen Raum, sodann aber auf die allgemeine V_n sogar mit metrischer aber nicht symmetrischer Übertragung. Es ist ein historischer Fehler, daß der Torsionstensor auf Cartan zurückgeführt wird. Zwar rührt der Name sowie eine sehr hübsche geometrische Deutung von Cartan her [C. r. Acad. Sci., Paris **174**, 593—595 (1922)], der Begriff findet sich aber schon bei G. Hessenberg 1916 [Math. Ann. **70**, 187—217] und R. König 1920 [J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **20**, 213—228], vgl. J. A. Schouten [Math. Z. **13**, 56—81 (1922)]. III. Diese Vorlesung enthält eine Zusammenstellung einiger Begriffe der ersten Form der allgemeinen Relativitätstheorie auf der Basis einer V_n mit symmetrischer Riemannscher Übertragung. Die Beispiele sind die üblichen. IV. Es wird gezeigt, wie sich die elektromagnetischen Erscheinungen im Riemannschen Raum darstellen lassen. Resultat ist, daß dieser Raum zwar die Erscheinungen der Gravitation geometrisch deuten kann, nicht aber die elektromagnetischen Phänomene. Daraus ergibt sich dann ein Hinweis auf eine mögliche Verallgemeinerung der Geometrie. V. In dieser letzten Vorlesung kommt es dann zur unitären Relativitätstheorie und damit zum Ziel des ganzen Zyklus. Nach einigen Vorbereitungen kommt erst die Weylsche Theorie zur Sprache und es folgen einige Ausführungen über die fünfdimensionale Theorie Kaluzas. Zum Schluß folgt dann

einiges über die neue Theorie Einsteins, bei der weder Fundamentaltensor noch Übertragung symmetrisch ist. *J. A. Schouten.*

Kustaanheimo, Paul: On the equivalence of some calculi of transformable quantities. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 17, Nr. 9, 35 p. (1955).

Verf. will die gemeinsame Struktur einiger der gebräuchlichen Bezeichnungsweisen der endlichdimensionalen Tensor- und Matrizenalgebra (Ricci-Kalkül, Dyaden, Matrizen, Bracket-Formalismus von Dirac, Multilinearalkül von Nevanlinna) dadurch beschreiben, daß er „Tensorringe“ betrachtet, das sind Ringe, die als zusätzliche Operation („Konjugation“) einen linearen involutorischen Antiautomorphismus $a \rightarrow a'$ besitzen. Es werden „tensorielle Erweiterungen“ von Tensorringen betrachtet, von denen speziell der Fall wichtig ist, daß ein Koeffizientenkörper C durch endlich viele Symbole E_i mit $E_i \cdot E_k \in C$ und $\det |E_i \cdot E_k| \neq 0$ zu einem Tensorring über C erweitert wird. Verf. legt besonderen Wert auf die Bemerkung, daß man (z. B. geometrische) Größen unter geeigneten Voraussetzungen — wie er sagt — „skalarisieren“ kann, d. h.: Eine Größe ist zunächst durch Darstellungen in verschiedenen Koordinatensystemen gegeben, kann dann aber auch durch ein unter der Gruppe der Koordinatentransformationen invariantes Element einer Struktur (einen „Skalar“) wiedergegeben werden. Dies wird an Beispielen aus den eingangs erwähnten Kalkülen erläutert. *D. Laugwitz.*

Kawaguchi, Akitsugu: General direction transformation and generalized homogeneous function. Tensor, n. Ser. 5, 68—70 (1955).

La transformation $f^a \rightarrow f^a(v^i)$ (dans un espace euclidien à n dimensions) est appelée „general direction transformation“ si $f^a(q, v^i) = \sigma(q, v^i) f^a(v^i)$ (q réel) et $\sigma(1, v^i) = 1$. Les fonctions $f^a(X^i) = f^a(q, v^i)$ sont alors appelées fonctions homogènes généralisées, ayant comme degré d'homogénéité la fonction $F(X^i) = X^i \partial [\log f^a(X^i)] / \partial x^i$ qui est indépendante de a . *G. Marinescu.*

Gheorghiu, Octavian: La détermination de la loi de transformation des objets différentiels-géométriques de deuxième classe, à deux composantes, en X_1 . Comun. Acad. Republ. popul. Romine 1, 1017—1019, russ. Zusammenfassg. 1019, franz. Zusammenfassg. 1020 (1951) [Rumänisch].

Gheorghiu, O. Em.: Objets géométriques différentiels de 1^e classe à deux composantes en X_1 . Acad. Republ. popul. Romine, Baza Cerc. şti. Timişoara, Studii Cerc. şti., Ser. I 2, 21—24, russ. Zusammenfassg. 24, franz. Zusammenfassg. 25 (1955) [Rumänisch].

Verf. sucht die geometrischen Objekte zweiter bzw. erster Klasse von zwei Komponenten im eindimensionalen Raum. Er behauptet, daß die allgemeinsten derivierbaren Lösungen der bezüglichen Gleichungssysteme

- $$(1) \quad F_\lambda [F_1(x_1, x_2, x, y), F_2(x_1, x_2, x, y), u, v] = F_\lambda(x_1, x_2, x u, x^2 v + y u),$$
- $$F_\lambda(x_1, x_2, 1, 0) = x_\lambda \quad (\lambda = 1, 2), \quad \text{bzw.}$$
- $$(2) \quad F_\lambda [F_1(x_1, x_2, x), F_2(x_1, x_2, x), u] = F_\lambda(x_1, x_2, x u), \quad F_\lambda(x_1, x_2, 1) = x_\lambda \quad (\lambda = 1, 2)$$
- die Funktionen
- $$(3) \quad \bar{x}_\lambda = F_\lambda(x_1, x_2, x, y) = x_\lambda/x + h y/x^2 + k(1 - 1/x) \quad (\lambda = 1, 2) \quad \text{bzw.}$$
- $$\bar{x}_\lambda = F_\lambda(x_1, x_2, x) = x_\lambda + A_\lambda \psi(x_2 - A_2 x_1) r \log |x|,$$
- $$(4) \quad (\lambda = 1, 2; A_1 = 1, A_2, \psi \text{ beliebig})$$

sind, bemerkt aber, daß auch $\bar{x}_\lambda = F_\lambda(x_1, x_2, x, y) = \Phi_\lambda[\varphi_\lambda(x_\lambda)/x - y/x^2]$ bzw.

$$\bar{x}_\lambda = F_\lambda(x_1, x_2, x) = \Phi_\lambda\{\varphi_\lambda(x_\lambda) + A_\lambda \psi[\varphi_2(x_2) - A_2 \varphi_1(x_1)] r \log |x|\}$$

($\lambda = 1, 2$; $A_1 = 1$, die φ_λ sind beliebige streng monotone Funktionen mit den Inversen Φ_λ ; die Konstanten A_2, r und die Funktion ψ bleiben beliebig) dieselben Gleichungen erfüllen. Tatsächlich sind auch diese nicht die allgemeinsten Lösungen, z. B. läßt sich $\bar{x}_1 = F_1(x_1, x_2, x) = x_1, \bar{x}_2 = F_2(x_1, x_2, x) = x_2 x$ in die letzte Formel nicht einreihen,

erfüllt aber (2) offenbar. Der Fehler steckt darin, daß Verf. z. B. in der zweiten Arbeit aus $F_\lambda[F_1(x_1, x_2, x), F_2(x_1, x_2, x), 1] = F_\lambda(x_1, x_2, x) = \bar{x}_\lambda$; ($\lambda = 1, 2$) das Bestehen von $(\partial/\partial \bar{x}_\mu) F_\lambda[F_1(x_1, x_2, x), F_2(x_1, x_2, x), 1] = (\partial/\partial x_\mu) F_\lambda(x_1, x_2, x)$ ($\lambda = 1, 2$) folgert, was unrichtig ist. Deshalb gibt (4) nicht alle Lösungen von (2), sondern nur die von der Gestalt $F_\lambda(x_1, x_2, x) = x_\lambda + R_\lambda\{\Psi[x_2 - A(x_1, x), x]\}$ $[R_1(u) = u, R_2'\{\Psi[x_2 - A(x_1, x), x]\} = (\partial/\partial x_1) \cdot 1(x_1, x), \Psi(x_2, 1) = 0, R_2(0) = 0]$ an. Ebenso ist in der ersten Arbeit z. B. der Beweis der Relation $F_\lambda(x_1, x_2, 1, y) = x_\lambda + h y \psi(x_1 - x_2)$ ($\lambda = 1, 2$) unrichtig, sie muß also vorausgesetzt werden, um das Resultat (3) des Verf. zu erhalten. Weiter steht am Ende der Formel (11) (Seite 1018) statt $\psi[G_1(x_1, x_2; x) - G_2(x_1, x_2; x)]$ das fehlerhafte $\psi(x_1 - x_2)$. was um so weniger richtig ist, als aus der Formel (15) des Verf. $G_1(x_1, x_2, x) - G_2(x_1, x_2; x) = (x_1 - x_2)/x$ folgt. Tatsächlich sind aber die allgemeinen Lösungen der Funktionalgleichungen (14) bzw. (16) die Funktionen $G_\lambda(x_1, x_2; x) = x_\lambda/x + \varphi_\lambda(x_1 - x_2, x)$ ($\lambda = 1, 2$), bzw. $\Gamma(x_1, x_2; x) = \varphi(x_1 - x_2, x)$ und nicht die vom Verf. behaupteten (15) bzw. (17), so daß das richtige Ergebnis dieser Arbeit sich auf die Bestimmung aller Objekte der Gestalt (18) beschränkt. Y. Aczél.

Gönenç, Süeda: Cinematica generalizzata. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A. **20**, 17—47 (1955).

Verf. gibt eine ausführliche Darstellung der elementaren Eigenschaften einparametrischer Scharen von Transformationen

$W(t) = (A(t)W^* + B(t))/(C(t)W^* + D(t))$ (t reell, A, B, C, D, W, W^* komplex) der gebrochen-linearen Gruppe in der Gaußschen Ebene. Da W einer Riccatischen Differentialgleichung genügt, ist die „Geschwindigkeit“ W' quadratisch in W ; daher gibt es i. a. zwei momentan ruhende Punkte m, n , die „Pole“. Es werden u. a. berechnet: Geschwindigkeit und Beschleunigung der Pole, die Schmiengkreise der Trajektorien der Pole und entsprechende Größen für allgemeine Punkte. Sodann werden tetrazyklische Koordinaten eingeführt mit Hilfe von vier einem Punkte p zugeordneten Kreisen: dem Kreis C_2 durch m, n, p , dem zu C_2 orthogonalen Kreis C_3 durch die Pole, dem zu C_2 orthogonalen Kreis C_1 durch p und den vierten harmonischen Punkt q zu m, n, p und dem zu allen diesen Kreisen orthogonalen Kreis C_0 . Mit diesen Koordinaten gelingt die einfache Behandlung von Spezialfällen (zusammenfallende oder im Unendlichen gelegene Pole etc.). Zum Abschluß wird mit Hilfe einer Darstellung durch Quaternionen u. a. gezeigt, daß die Kinematik der betrachteten Gruppe identisch ist mit der (orthogonalen) Kinematik der komplexen 2-Sphäre. D. Laugwitz.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

• **Finikov, S. P.: Differentialgeometrie.** Lehrbuch für physikalisch-mathematische Fakultäten von pädagogischen Instituten. Moskau: Staatsverlag für Lehrbücher und Pädagogik des Bildungsministeriums der RSFSR 1955. 215 S. R. 5,— [Russisch].

As the title indicates this textbook is written with an eye on the education of future teachers, in connection with the plans for polytechnical education in secondary schools. It contains the classical material on curves in the plane and curves in space, together with surface theory, presented wherever possible with cinemathical methods. Vector methods are used throughout, with here and there a touch of the ω -notation. The exposition is sober and attractive, the illustrations are clear. Instructors, faced with the task of giving a one-semester introduction to differential geometry, will find a look at this book very helpful. D. J. Struik.

Franckx, E.: Sur les surfaces réglées gauches. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **24**, 296—300 (1955).

Es sei $F: \mathbf{y}(s, u) = \mathbf{x}(s) + u \mathbf{i}(s)$, $|\mathbf{i}| = 1$, eine Regelfläche, $\mathbf{x}(s)$ die Striktions-

linie, s deren Bogenlänge und $\mathbf{t}(s)$ deren Tangentenvektor. $\mathbf{z}(s_0, u) = \mathbf{x}(s_0) + u \mathbf{t}(s_0)$ heiße der zu $\mathbf{y}(s_0, u)$ assoziierte Punkt. Die Schnittgerade $\perp(s_0, u)$ der Tangentialebene von F im Punkte $\mathbf{y}(s_0, u)$ mit der durch $\mathbf{t}(s_0)$ und $\mathbf{j}(s_0) = K(s_0) \frac{d\mathbf{i}}{ds}$, $s=s_0$, $K > 0$, $\mathbf{j} = 1$, aufgespannten Ebene durch $\mathbf{y}(s_0, u)$ heiße die zu $\mathbf{y}(s_0, u)$ assoziierte Gerade. Es wird gezeigt, daß alle Geraden, die durch die assoziierten Punkte gehen und die zugehörige assoziierte Gerade jeweils senkrecht schneiden, einen festen Punkt gemeinsam haben. Weiterhin ist $1/K = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \chi/\Delta s$, wobei χ den Winkel zwischen $\mathbf{i}(s)$ und $\mathbf{i}(s + \Delta s)$ bedeutet. Ferner wird eine Verallgemeinerung einer Formel von Chasles angegeben und der Sonderfall der Torsen betrachtet.

E. Kreyszig.

Pan, T. K.: A generalized theorem of center of geodesic curvature. Amer. math. Monthly **62**, 717—718 (1955).

Let C be a curve and v a vector field on a surface S . Denote by R the ruled surface formed by the tangents to S which are perpendicular to v at each point P of C . If A is the point on the generator PG of R at which the plane tangent to R is perpendicular to the plane tangent to S at P , then A is the center of associate curvature for P of v with respect to C . (If $r_g = r_g^{-1}$ is the reciprocal of the magnitude of the derived vector of v with respect to C , this Zbl. **47**, 404, and θ denotes the angle between C and v at P , the center of associate curvature is defined as the point Q such that $PQ = r_g \cos \theta$.)

L. A. Santaló.

Semin, F.: On an extension of Liouville's formula. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sr. A **20**, 91—94 (1955).

Verallgemeinerung der Formel von Liouville für die geodätische Krümmung einer Flächenkurve für den Fall nichtorthogonaler Koordinaten auf der Fläche.

E. Kreyszig.

Tryuk, K.: On B -curvatures of curves on surfaces of the Euclidean space. Ann. Polon. math. **2**, 14—28 (1955).

Für eine Kurve in einer in L_p eingebetteten aber nicht eingespannten X_p hat S. Golab (dies. Zbl. **17**, 424) eine Reihe von Invarianten definiert, die hier B -Krümmungen genannt werden. Ausgangspunkt ist der bis auf einen skalaren Faktor gegebene tangierende p -Vektor, der entlang der Kurve nach dem affinen Parameter der Kurve differenziert wird. Es ergibt sich dann eine Reihe von p -Vektoren (des E_n , nicht aber des E_p), die abbricht, sobald sich lineare Abhängigkeit einstellt, und sodann ein Normierungsprinzip für den skalaren Faktor liefert. Die Koeffizienten der für diese Normierung verwendete Reihe sind dann eben die B -Krümmungen (B von Bivektor für $n = 3$, $p = 2$) und die Zahl m , bei der die Reihe abbricht, ist die „Ordnung der Ebenheit“ der Kurve. Anwendungen werden gegeben für die V_2 in R_3 . Eine Kurve ist dann entweder allgemein oder B -eben oder B -gerade. Die B -Krümmungen sind nicht identisch mit den Krümmungen, die man erhält bei Normalisierung des Vektors senkrecht zur V_2 . Besonderes Interesse haben die B -Krümmungen auf abwickelbaren Flächen.

J. A. Schouten.

Wintner, Aurel: On the local embedding problems in the differential geometry of surfaces. Amer. J. Math. **77**, 845—852 (1955).

If the coefficients $g_{ik}(u^1, u^2)$ of a non degenerate riemannian metric are functions of class C^2 [on a sufficiently small domain D in the (u^1, u^2) plane] then the metric is called a C^2 -metric. If the corresponding gaussian curvature $K = K(u^1, u^2)$ turns out to be of class C^1 (rather than just continuous) then the metric is called a regular C^2 -metric. In order that a metric $ds^2 = g_{ik} du^i du^k$ admits some C^3 -embedding (that is, a surface S exists which has a one-to-one C^3 -parametrization $X = X(u^1, u^2)$ and $|dX|^2 = g_{ik} du^i du^k$) it is necessary that the metric be a regular C^2 -metric. This condition is not sufficient. About this fact some theorems and some unsolved questions are pointed out. For instance: 1. Every regular C^2 -metric which is of

non-vanishing curvature [that is, which is either hyperbolic, $K(u^1, u^2) < 0$, or elliptic, $K(u^1, u^2) > 0$, on D] possesses locally C^2 -embeddings, which, however, can fail to be C^3 -embeddings. 2. If an elliptic, regular C^3 -metric possesses a C^4 -embedding, then all of its C^2 -embeddings are C^3 -embeddings. As unsolved questions the following are typical: 1. Every regular C^2 -metric with non-vanishing curvature must there admit a C^3 -embedding?; 2. Must every elliptic, regular C^1 -metric possess an embedding which is a surface of class C^2 ?; 3. Does every C^∞ -metric possess some C^∞ -embedding or, at least, some C^2 -embedding? L. A. Santaló.

Wintner, Aurel: On indefinite binary Riemannian metrics. Amer. J. Math. **77**, 853—867 (1955).

With the nomenclature of the preceding paper, the following theorem is now proved. If a binary, indefinite C^n -metric $g_{ik}(u^1, u^2) du^1 du^2$ is a regular C^n -metric, then it is isometric to a C^n -metric having the „non euclidean conformal“ normal form $2\lambda(u, v) du dv$ (which is, of course, a regular C^n -metric). Applications: 1. If a surface S admits a C^m -parametrization $X = X(u, v)$ [on a sufficiently small (u, v) -domain] and if its Gaussian curvature is negative, then S possesses C^{m-1} -parametrizations in which the parameter lines $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ are asymptotic lines of S . 2. If an S possesses a C^{m-1} -parametrization in which the parameter lines are asymptotic lines, then S possesses a C^m -parametrization. L. A. Santaló.

Chern, Shiing-Shen: An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 771—782 (1955).

Let $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ ($i, j = 1, 2$, $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$, $g_{11} > 0$) be a positive definite Riemannian metric defined in a neighborhood of a surface with the local coordinates x, y . The author gives a new proof of the following theorem of Korn and Lichtenstein: If the functions g_{ij} satisfy a Hölder condition of order λ , $0 < \lambda < 1$, in a domain D (i. e. $|g_{ij}(x, y) - g_{ij}(x', y')| < C r^\lambda$ for any two points of D , where C is a constant and r denotes the euclidean distance between these two points), then every point of D has a neighborhood whose local coordinates are isothermal parameters (i. e. parameters u, v relative to which the metric takes the form $ds^2 = \alpha(u, v) \cdot (du^2 + dv^2)$, $\alpha > 0$). L. A. Santaló.

Vincensini, Paul: Sur une transformation des surfaces minima. C. r. Acad. Sci., Paris **241**, 153—154 (1955).

L'A. établit une nouvelle transformation des surfaces minima métriques qui se traduit par la suivante construction géométrique: Etant donnée une surface minima (\mathfrak{M}) décrite par le point M , le point P déduit de M en soumettant le point A , homologue de M sur l'adjointe (\mathfrak{M}), à une homothétie de rapport i , et en projetant orthogonalement le point obtenu en P sur la parallèle menée par M au support d'un vecteur fixe \vec{r} , décrit une nouvelle surface minima (\mathfrak{P}). La relation entre les surfaces (\mathfrak{M}) et (\mathfrak{P}) est réciproque. Elles ont la propriété: les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de l'une des deux surfaces correspondent respectivement aux lignes asymptotiques et aux lignes de courbure de l'autre. La correspondance entre les deux surfaces est une projection cylindrique. En partant d'une surface minima l'on peut construire une chaîne de surfaces minima dont toute surface est en correspondance ponctuelle cylindrique avec la précédente, et de plus, de deux en deux, en correspondance conforme. Gh. Th. Gheorghiu.

Sauer, Robert: Wackelige Zwölfkante. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **20**, 1—9 (1955).

Die aus 12 Stäben bestehenden Zwölfkante sind entweder Achtfläche oder Sechsfäche, je nachdem die Stäbe wie die Seiten eines Oktaeders oder eines Würfels miteinander verknüpft sind. Die Seitenflächen der Achtfläche sind ebene Dreiecke, die der Sechsfäche ebene oder windschiefe Vierecke. Seien \mathfrak{r}_i die Ortsvektoren der Ecken eines Zwölfkants (\mathfrak{r}), $\mathfrak{r}_{ie}^* = \mathfrak{r}_i + \varepsilon \mathfrak{r}_i$ ($\varepsilon = \text{const}$) die Ortsvektoren der Ecken einer einparametrischen Menge von Zwölfkanten (\mathfrak{r}_i^*). Das Zwölfkant soll „wackelig“

heißen, wenn für $\varepsilon \rightarrow 0$ die Längen entsprechender Stäbe von (γ) und (γ_ε^*) sich nur um Beträge der Größenordnung $O(\varepsilon^2)$ unterscheiden und entweder die einander entsprechenden Seitenflächen oder die einander entsprechenden Vierkante oder Dreikante der Ecken bis auf Abweichungen der Größenordnung $O(\varepsilon^2)$ kongruent bleiben. Das Zwölfkant heißt bezüglich der infinitesimalen Verknickung $(\gamma) \rightarrow (\gamma_\varepsilon^*)$ im ersten Fall „flächenstarr“, im zweiten „eckenstarr“ wackelig. Achtflächen können nur flächenstarr wackelig sein. Unter den Sechsecken gibt es dagegen sowohl flächenstarr wie eckenstarr wackelige. — Die Existenz der wackeligen Achtfläche wird auf die Existenz der Möbiusschen Tetraederpaare zurückgeführt. — Zum Schluß wird die Bildung eines Kranzes aus je vier wackeligen Achtflächen, vier flächenstarr wackeligen und vier eckenstarr wackeligen Sechsecken beschrieben, die untereinander in bestimmten Beziehungen stehen und sich zu einem Kranz zusammenschließen, den Verf. als Darboux-Kranz bezeichnet. M. Zacharias.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Ancochea, Germán: Über die geometrische Interpretation der projektiven Krümmung einer reellen ebenen Kurve. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **20**, 52–56 (1955) [Spanisch].

Adottato il consueto triangolo di riferimento locale (determinato dalla cubica nodata osculatrice) e scelto convenientemente il punto unità, l'A. determina le formule di Frenet per detto riferimento e se ne vale per interpretare la curvatura proiettiva. P. Buzano.

Bompiani, Enrico: Sull'equazione differenziale di Jacobi ed altre analoghe. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **39**, 15–24 (1955).

Se in un'omografia fra piani sovrapposti a ogni punto x si associa la retta che lo unisce al corrispondente punto y , si determina un campo di elementi del 1° ordine E_1 che risulta rappresentato da un'equazione differenziale di Jacobi. L'A. generalizza tali considerazioni sostituendo l'omografia con una trasformazione quadratica (crmoniana) e ne deduce un procedimento d'integrazione grafica della corrispondente equazione differenziale. Un'altra generalizzazione si ha invece considerando il sistema di E_1 che con due fissate coppie di E_1 formano invarianti (proiettivi) di rapporto costante: l'A. determina l'equazione differenziale del 1° ordine che rappresenta detto sistema di E_1 sia nel caso generale che in quello in cui le 4 rette delle due coppie passano per un punto. Dell'equazione differenziale vengono poi studiati i punti singolari e la curva discriminante. P. Buzano.

Speranza, Francesco: Sulle trasformazioni puntuali fra spazi proiettivi sovrapposti. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **10**, 61–68 (1955).

Si studia una trasformazione puntuale T fra due spazi lineari S_r , ad r dimensioni, sovrapposti, nell'intorno di una coppia regolare A, \bar{A} di punti corrispondenti distinti. Nel caso generale, quando cioè è generale la proiettività Ω subordinata da T fra le stelle di centri A, \bar{A} , si considerano i punti uniti delle omografie tangenti a T in A, \bar{A} , la curva C^r razionale normale luogo delle intersezioni di rette corrispondenti in Ω e si ottengono, rimanendo nell'intorno del 1° ordine di A, \bar{A} , riferimenti proiettivi intrinseci. Non si hanno invarianti proiettivi nell'intorno del 1° ordine, mentre ve ne sono $(r^3 + r^2)/2$ in quello del secondo ordine. Si considera poi il caso in cui Ω è una prospettività. Allora le omografie tangenti a T in A, \bar{A} subordinano sulla retta $A, \bar{A} \infty^1$ proiettività fra le quali ve ne sono due paraboliche (siano U_1, U_2 i relativi punti uniti). Sia K l'intersezione di A, \bar{A} con l' S_{r-1} di prospettiva e $(A, \bar{A}, K, U_1) = \alpha$, da cui $(A, \bar{A}, K, U_2) = -\alpha$. Le omografie tangenti hanno tutte un S_{r-2} di punti uniti; fra esse ve ne sono due paraboliche, ed una omologia, generale se $\alpha^2 \neq 1$,

speciale se $\alpha^2 = 1$, di caratteristica α^{-2} . Per ottenere riferimenti intrinseci occorre qui passare all'intorno del 2° ordine (si ricorre alle direzioni caratteristiche). Gli invarianti del 2° ordine sono ora $(r^3 - r^2 + 2r)/2$. In entrambi i casi studiati si scrivono le equazioni canoniche della trasformazione. [Per $r = 2$ si veda L. Muracchini, Boll. Un. Mat. Ital., III. Ser. 9, 360—366 (1954).] *M. Villa.*

Villa, M. e L. Muracchini: L'applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 313—327 (1955).

L'applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali era già stata considerata in un precedente lavoro di Muracchini (questo Zbl. 46, 396): gli AA. eliminano ora dalla definizione una condizione superflua e danno una nuova e corretta espressione dell'elemento lineare-proiettivo. Vieni tenuto conto anche dell'interpretazione delle trasformazioni su varietà di Segre, mentre non si considerano le relazioni fra i problemi trattati e le deformazioni proiettive dei reticoli piani di Fubini e Čech. *P. Buzano.*

Fava, Franco: Varietà integrali di particolari sistemi di due equazioni di Laplace per una funzione di tre variabili. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 14, 189—237 (1955).

Fava, Franco: Sulle varietà integrali del sistema

$$x_{uv} = a_1 x_u + a_2 x_v + a_3 x_r + a x, \quad x_{ur} = L x_{ur} + b_1 x_u + b_2 x_v + b_3 x_r + b x.$$

Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 14, 239—256 (1955).

I due lavori concernono lo stesso sistema: il 1° però si riferisce al caso particolare in cui $L = 0$. Il sistema considerato è una delle otto forme canoniche a cui il sottoscritto ha ricondotto il sistema di due equazioni di Laplace per una funzione di tre variabili (questo Zbl. 12, 224). Entro ogni V_3 integrale l'A. definisce due famiglie di superficie caratteristiche che verificano equazioni alle derivate parziali lineari, omogenee del 3° ordine: a tali famiglie nel caso $L = 0$ si deve aggiungere un altro sistema di superficie notevoli. Inoltre per ogni punto x di una V_3 integrale passano 3 linee caratteristiche, due doppie e una semplice che è pure quasi-asintotica $\gamma_{1,2}$. Infine, in relazione con ciascuna delle due superficie caratteristiche, al punto x si può associare una configurazione punto-retta-piano- S_3 caratteristici dove ogni elemento S_{i-1} appartiene al successivo S_i e tale che, al variare di x su detta superficie, la varietà luogo di S_i ha lungo S_i uno spazio tangente di dimensione $i + 3$ anziché $3i + 2$: risultano così geometricamente interpretate le 8 condizioni di integrabilità del sistema. *P. Buzano.*

Čech, Eduard: Deformazioni proiettive nel senso di Fubini e generalizzazioni. Conferenze Sem. mat. Univ. Bari 9, 12 p. (1955).

The author summarizes and points out certain questions on projective deformation of surfaces (cf. G. Fubini-E. Čech, Géométrie projective différentielle des surfaces, Paris 1931, chap. VI) and indicates some possible generalizations.

L. A. Santaló.

Mayer, O.: Familles R de surfaces transversales dans les congruences de droites. Acad. Republ. popul. Romîne, Fil. Iași, Studii Cerc. ști., Ser. I 6, Nr. 1/2, 69—88, russ. Zusammenfassg. 88—89 u. franz. Zusammenfassg. 89 (1955) [Rumänisch].

Dans deux mémoires antérieures l'A. a introduit et étudié la notion de „famille R “ d'une congruence de droites dans un espace à n dimensions. On définit par cette notion les surfaces qui jouissent des propriétés suivantes: a) Elles coupent les rayons de la congruence dans un seul point. b) Elles déterminent des ponctuelles homographiques sur les rayons de la congruence. Certaines familles R , parmi celles attachées à une congruence à foyers distincts, que l'A. a désigné par le nom de „famille R_0 “, jouissent de la propriété de contenir les surfaces focales. Il y a une infinité de familles R_0 qui dépend du facteur de proportionnalité des coordonnées homogènes des foyers x et y de la congruence; l'A. désigne comme familles principales celles

kongruenz hindurchgehen, deren unendlich benachbarte $(k-1)$ -dimensionale Ebenen einander in einer $(k-2)$ -dimensionalen Ebene schneiden. Dann geht der Verf. über zur Untersuchung einer Pseudokongruenz R , die k Systeme von abwickelbaren Flächen besitzt, derart, daß die k entsprechenden Fokalfunkte in bezug auf die absolute Hyperquadrik Q_n zueinander in Polarbeziehung stehen (§ 4). Als besonderen Fall fügt er die Theorie der zweiparametrischen Linienfamilien hinzu (§ 5). Nach ausführlicher Erörterung der Übertragung von $'S_{n+1}$ nach M_n (§ 6), wird die erhaltene Theorie in M_n übersetzt (§ 7). A. Kawaguchi.

Gejdel'man, R. M.: Zur Theorie der Kreiskongruenzen im mehrdimensionalen konformen Raume. Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 669—672 (1955) [Russisch].

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der vorstehend referierten, sie behandelt den Fall von Kreiskongruenzen. Im n -dimensionalen konformen Raume M_n heißt eine $(n-1)$ -parametrische Kreisfamilie eine Kreiskongruenz. In bezug auf eine Kreiskongruenz wählt der Verf. ein bewegliches Hyperkugelbezugssystem, das aus zwei auf dem betrachteten Kreis liegenden Punkten S_0, S_{n+1} und aus n Hyperkugeln S_1, S_2, \dots, S_n besteht, wobei die zwei Punkte auf den n Hyperkugeln liegen und $n-1$ Hyperkugeln S_1, \dots, S_{n-1} durch den betrachteten Kreis der Kreiskongruenz hindurchgehen. Ein Punkt $P(p)$ auf dem Kreis stellt sich in der Form $P = S_0 + p S_n - \frac{1}{2} p^2 S_{n+1}$ dar. Am Fokalfunkt (Schnittpunkt von zwei unendlich benachbarten Kreisen $[S_i]$ und $[S_i - dS_i]$) gelten dann zwischen den Differentialformen die Gleichungen $2\omega_i^{n+1} + 2p\omega_i^n - p^2\omega_i^0 = 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n-1$), wobei $dS_\alpha = \omega_\alpha^\beta S_\beta$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots, n+1$). Daraus folgt, daß eine Kreiskongruenz $2n-2$ Fokalhyperflächen und $2n-2$ Systeme von abwickelbaren Flächen besitzt. Unter einer abwickelbaren Fläche verstehen wir eine einparametrische Kreisfamilie der Kreiskongruenz, in welcher zwei unendlich benachbarte Kreise einander schneiden. Wählen wir die S_i so, daß jedes S_i eine der $n-1$ abwickelbaren Flächen $F_i = S_0 + p_i S_n - \frac{1}{2} p_i^2 S_{n+1}$ berührt, dann ist die Kreiskongruenz durch die Pfaffschen Formen $\omega_i^n = C_i^{nj} \omega_j^0$, $\omega_i^{n+1} = \frac{1}{2} p_i^2 \omega_i^0 - p_i \omega_0^n$ bestimmt. Eine Kongruenz, bei der die a Systeme von abwickelbaren Flächen, die einer Fokalhyperfläche F_g entsprechen ($g = 1, 2, \dots, a$), aus Kanalfächen bestehen, ist bestimmt durch das System $\omega_g^n = C_g^{nh} \omega_h^0 + C_g^{n\bar{h}} \omega_{\bar{h}}^0$, $\omega_h^n = C_h^{n\bar{h}} \omega_{\bar{h}}^0$, $\omega_i^{n+1} = \frac{1}{2} p_i^2 \omega_i^0 - p_i \omega_i^n$ ($h, \bar{h} = a+1, \dots, n-1$); insbesondere reduziert sich das System im Fall $a = n-1$ auf $\omega_i^n = C_i^{n0} \omega_0^n$, $\omega_i^{n+1} = C_i^{n+1} \omega_i^0$. In dieser Richtung untersucht der Verf. das Gleichungssystem für die Differentialformen der Kreiskongruenzen in vielen speziellen Fällen und gibt auch seine geometrischen Deutung an. Wegen knapper Darstellung ist es etwas schwierig, den Inhalt dieser Arbeit völlig zu verstehen. A. Kawaguchi.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Singal, M. K. and Ram Behari: Generalization of normal curvature of a curve in a Riemannian V_n . Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 42, 309—316 (1955).

Vermöge einer Kongruenz wird in jedem Punkte P eines in einem $(n+1)$ -dimensionalen Riemannschen Raum isometrisch eingebetteten n -dimensionalen Riemannschen Raumes V^n eine Richtung $R(P)$ vorgegeben. Dann läßt sich jeder Kurve C in V^n eine Invariante, die „verallgemeinerte Normalkrümmung“ zuordnen. Diese hängt von $R(P)$ in dem betrachteten Kurvenpunkte P und von der Richtung von C in P ab und ist mit der üblichen Normalkrümmung identisch, wenn $R(P)$ in die Normale des V^n fällt; in diesem Sonderfalle stimmen die für die verallgemeinerte Normalkrümmung hergeleiteten Eigenschaften mit bekannten Eigenschaften der Normalkrümmung überein, wie gezeigt wird. E. Kreyzig.

Vrănceanu, G.: Sur les espaces à courbure constante. Acad. Republ. popul. Romîne. Fil. Iași. Studii Cerc. ști., Ser. I 6. Nr. 1/2, 59–64, russ. und franz. Zusammenfassg. 64 (1955) [Rumänisch].

Si la métrique d'un espace Riemannien Γ_n est donnée par la formule $ds^2 = \lambda^2 \Sigma (dx^k)^2 + \beta (\Sigma x^k dx^k)^2$ où λ et β sont des fonctions de distance $r^2 = \Sigma (x^k)^2$, l'espace a une courbure constante k , et β a l'expression

$$\beta = (\alpha'^2 + 2\alpha\alpha'/r + k\alpha^4)(1 - k\alpha^2 r^2)^{-1}.$$

On indique ensuite la manière dont on peut déduire de la forme précédente les différentes formes canoniques connues des métriques des espaces à courbure constante.

Gh. Th. Gheorghiu.

Debever, R.: Sur un théorème de B. Segre. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 19, 26–27 (1955).

B. Segre hat bewiesen (dies. Zbl. 35, 239) daß eine konformeuklidische Γ_n , deren geodätische Linien alle mit Kurven konstanter Krümmung der R_n korrespondieren, ein Raum konstanter Krümmung ist. Es wird ein kurzer Beweis gegeben, der sich stützt auf einen Satz von Fialkow (dies. Zbl. 21, 56) über die konforme Transformation der einem Flächenelement beliebiger Lage zugeordneten skalaren Krümmung. In der Transformationsformel treten Ableitungen der Krümmungen auf, die geodätische Linien nach der Transformation aufweisen, und diese Ableitungen verschwinden im hier betrachteten Falle, da die Linien ja in Kurven konstanter Krümmung übergehen.

J. A. Schouten.

Švarc, A. S.: Inhaltsinvarianten von Überlagerungsmannigfaltigkeiten. Doklady Akad. Nauk SSSR 105, 32–34 (1955) [Russisch].

Let M, M' be Riemann manifolds with the property that the volume of a ball with fixed radius but variable centre is bounded below and above. Select two points $x \in M$ and $x' \in M'$. Let $\chi(r), \chi'(r)$ denote the volumes of balls with radius r and centres x and x' . It is known that if there is a both ways uniformly continuous homeomorphism between M and M' then χ and χ' have the same rate of growth, i. e. there exist constants a, b, c, d such that $\chi(r) \leq a \chi'(b r)$ and $\chi'(r) \leq c \chi(d r)$. Let now M be the universal covering of a compact manifold C' . Then it follows from the above said that the rate of growth of $\chi(r)$ is a topological invariant of C . Let the fundamental group $\pi_1(C')$ of C' be finitely generated, generators a_1, \dots, a_k . Let $n(r)$ denote the number of elements of $\pi_1(C')$ representable by a word in the a_i of length $\leq r$. The main result of this note is that the rate of growth of $\chi(r)$ and $n(r)$ is the same.

W. T. van Est.

Sasaki, Shigeo and Morikuni Goto: Some theorems on holonomy groups of Riemannian manifolds. Trans. Amer. math. Soc. 80, 148–158 (1955).

M_n est une variété riemannienne de dimension n , $E_n(P)$ l'espace tangent en P , H , (resp. H^0 , resp. h , resp. h^0) le groupe d'holonomie, (resp. homogène, resp. restreint, resp. homogène restreint) de M_n . Les deux principaux résultats de ce travail concernent des variétés complètes. Pour le premier (Theorem 2), on suppose h réductible et, en désignant par R, S les deux systèmes de feuilles correspondantes, qu'une feuille donnée R_0 de R coupe toute feuille de S en au plus un ensemble discret de points. Alors R_0 , munie de la métrique induite, est un revêtement riemannien de l'espace R^* obtenu en identifiant les points de R_0 situés sur une même feuille de S et le groupe d'holonomie de R^* s'obtient par „projection“ dans l'espace tangent, à partir de H . Le deuxième (Theorem 4) affirme que si H^0 admet un point fixe, alors M_n est localement euclidienne. Il suffit de considérer le cas où M_n est simplement connexe; alors $H^0 = H$ et les étapes de la démonstration sont les suivantes: (a) on détermine un point P tel que H , défini relativement à P , laisse fixe l'origine de $E_n(P)$; ensuite, en étudiant le champ, à dérivée covariante nulle, formé par les points fixes de H dans les différents espaces tangents, on prouve (b) que M_n est

euclidienne au voisinage de P , (c) que deux géodésiques issues de P ne se rencontrent plus; enfin, un résultat du premier A. [J. Phys. Math. Soc. Japan **16**, 193—200 (1942), (en japonais)], sur la forme locale du ds^2 dans les circonstances présentes, permet de voir que si M_n est localement euclidienne dans une boule géodésique de centre P , rayon r , elle l'est encore dans une boule de rayon $> r$. Les AA. démontrent aussi un résultat communiqué par le rapp. disant que si h^0 est irréductible, (M étant complète ou non), alors h ou bien contient toutes les translations ou bien admet un point fixe.

A. Borel.

Kostant, Bertram: Holonomy and the Lie algebra of infinitesimal motions of a Riemannian manifold. Trans. Amer. math. Soc. **80**, 528—542 (1955).

Etant donnée, sur une variété riemannienne V_m , une algèbre de Lie L d'isométries infinitésimales, à tout élément $X \in L$ on peut associer un champ A_X d'endomorphismes de l'espace vectoriel T_x tangent en $x \in V_m$ défini par $(A_X(x))_j^i = -D_j X^i$, où D est l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion riemannienne. Pour le crochet usuel des endomorphismes, les $A_X(x)$ engendrent une algèbre de Lie qui est l'algèbre d'un groupe $K_x(L)$ de rotations de T_x . Les deux principaux résultats du papier sont les suivants: 1. si L est transitive sur V_m , on a $\sigma_x \subset K_x(L) \subset N_0(\sigma_x)$, où σ_x est le groupe d'holonomie homogène restreint et $N_0(\sigma_x)$ son normalisateur connexe dans le groupe des rotations de T_x (Ce résultat peut être étendu au cas d'une variété V_m à connexion affine et à une algèbre transitive de transformations infinitésimales affines. Note du rapporteur). 2. Si Γ_m est compacte, $K_x(L) \subset \sigma_x$. Ces résultats rapprochés de l'étude du centralisateur connexe de σ_x faits par le rapporteur montrent que si L est transitive sur Γ_m , on a $K_x(L) = \sigma_x$ soit si V_m est compacte, soit si, σ_x étant irréductible dans le réel, Γ_m est non pseudokählerienne ou si, étant pseudokählerienne, elle admet une courbure de Ricci différente de zéro.

A. Lichnerowicz.

Kurita, Minoru: On the holonomy groups of the conformally flat Riemannian manifold. Nagoya math. J. **9**, 161—171 (1955).

Proof of the theorem that the local homogeneous holonomy group H_p of a space with $ds^2 = a^2 \sum dx_i^2$, $a = a(x_1, \dots, x_n)$ of class C_2 , is in general the full rotation group $SO(n)$. Exceptions are 1. H_p is an identity and the metric is flat in a coordinate neighborhood U ; 2. H_p is $SO(k) \times SO(n-k)$ and U is a direct product of a k -dimensional manifold of constant curvature K and an $(n-k)$ -dimensional manifold of constant curvature $-K$ ($K \neq 0$); 3. H_p is $SO(n-1)$ and U is a direct product of a straight line (or a segment) and an $(n-1)$ -dimensional manifold of constant curvature. Attention is also paid to such tensors as $a_{11} = p_1 \cos^2 \theta + p_2 \sin^2 \theta$, $a_{22} = p_1 \sin^2 \theta + p_2 \cos^2 \theta$, $a_{12} = a_{21} = 2(p_1 - p_2) \sin \theta \cos \theta$, where $\theta = (x_1 - x_2)^{-1}$, $p_1 - p_2 = (x_1 - x_2)^n$, p_i of class C_n , in the euclidean plane with rectangular coordinates (x_1, x_2) , tensors for which the characteristic values are p_1, p_2 , but the angle of rotation θ which brings the tensor to diagonal form is not continuous for $x_1 = x_2$. Reference is made to A. Nijenhuis, this Zbl. **51**, 132. D. J. Struik.

Lelong-Ferrand, Jacqueline: Groupes d'isométries et formes harmoniques décomposables. C. r. Acad. Sci., Paris **240**, 835—837 (1955).

Sur une variété riemannienne orientable V_N , l'A. suppose l'existence d'un groupe infinitésimal abélien g d'isométries de dimension $\nu \leq N$ et dont F est l'ensemble des points fixes. Par la dualité définie par la métrique, les générateurs de g peuvent être définis par ν formes linéaires ω^α ($\alpha, \beta = 1, \dots, \nu$). Pour qu'il existe sur $V_N - F$, ν champs harmoniques linéairement distincts, de la forme $\theta^\alpha = k_\beta^\alpha \omega^\beta$, il faut et il suffit que sur $V_N - F$ la métrique puisse s'écrire

$$ds^2 = h_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta + g_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, \dots, n; \quad n + \nu = N)$$

où les coefficients $h_{\alpha\beta}, g_{ij}$ ne dépendent que des coordonnées x^i . Si cette condition est réalisée, toute forme harmonique invariante de V_N est somme directe de formes

harmoniques pures des différents types. L'A. envisage le cas où g dérive d'un groupe G d'isométries opérant sur V_N et où il existe une variété V_n orthogonale aux trajectoires de G dans V_N et telle que V_N puisse être engendrée à partir de V_n par l'action de G . Il montre ainsi que, si G est un groupe de Lie, abélien, compact, et V_n une variété riemannienne, orientable, à bord, la solution du problème de Dirichlet pour $G \times V_n$ muni d'une métrique convenable, conduit à la solution d'un problème généralisant celui étudié par Gergen et Dressel [ce Zbl. 42, 89; Trans. Amer. math. Soc. 77, 151—178 (1954)].

A. Lichnerowicz.

Yano, Kentaro: Quelques remarques sur les variétés à structure presque complexe. Bull. Soc. math. France 83, 57—80 (1955).

L'A. donne un exposé d'ensemble des travaux récents concernant la géométrie différentielle des variétés à structure presque complexe, pseudocomplexe (presque complexe intégrable), hermitienne, kählerienne, etc. ... La technique employée est celle du calcul tensoriel classique complété par l'usage des coordonnées non holonomes et des objets d'anholonomie. Les principaux résultats d'Ehresmann, Eckmann, Lichnerowicz, Bochner, Patterson et de l'A. lui-même sont rappelés et complétés par quelques remarques nouvelles: ainsi pour qu'une structure presque complexe φ^i_j soit pseudocomplexe, il faut et il suffit qu'il existe sur la variété une connexion linéaire semi-symétrique telle que $D_k \varphi^i_j = 0$. A. Lichnerowicz.

Guggenheimer, Heinrich: Sopra una successione esatta e sulle modificazioni di varietà kähleriane di dimensione quattro. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 153—160 (1955).

V étant une variété à structure complexe, sans singularités, pourvue d'une métrique kählérienne, on complète un résultat de Hodge (ce Zbl. 44, 368) en montrant que si une forme φ vérifie $d'\varphi = \delta''\varphi = 0$ sur V , on a $\varphi = \mu + d'\delta''\sigma$, μ étant harmonique; d' est la différentiation par rapport aux z_i seuls, d'' par rapport aux \bar{z}_i seuls; $\delta'' = -d''$. On étudie l'action d'une modification analytique de V , exercée en un sous ensemble $W \subset V$, sur les groupes de cohomologie $H_{r,s}(V, W)$ des formes de type (r, s) à support compact contenu dans $V - W$. P. Lelong.

Dalla Volta, Vittorio: Varietà totalmente geodetiche nello spazio delle matrici simmetriche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 619—622 (1955).

In einer vorhergehenden Arbeit [Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 37, 291—332 (1954)] studierte der Verf. den symplektischen Raum, d. h. den Raum von symmetrischen Matrizen, der zur Theorie der modularen abelschen Funktionen von p Veränderlichen in enger Beziehung steht. Im Zusammenhang damit studiert der Verf. jetzt die totalgeodätische Mannigfaltigkeit im Raum. Die erhaltenen Resultate werden ohne Beweis angegeben; daraus ein Beispiel: Notwendig und hinreichend dafür, daß durch eine Geodätische γ eine eindeutige charakteristische totalgeodätische Fläche hindurchgehe, ist, daß die nicht verschwindenden λ_i von den p Invarianten $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ längs γ alle einander gleich sind. Daher ergeben sich p Familien von charakteristischen geodätischen Flächen; zwei Flächen einer Familie sind immer äquivalent in bezug auf die Gruppe G der Bewegungen des Raumes (für zwei Flächen aus verschiedenen Familien gilt das nicht allgemein) und für solche Flächen sind die λ_i dieselben auf jeder Geodätischen. Wenn $0 \leq q \leq p - 1$ die Zahl der verschwindenden λ_i ist, so hat die entsprechende Fläche die negative konstante Krümmung $-1/(p - q)$, und diejenige Untergruppe von G , die die Fläche invariant läßt, bestimmt auf der Fläche die Bewegungsgruppe G_3 der hyperbolischen Metrik der Fläche.

A. Kawaguchi.

Koszul, J. L.: Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes. Canadian J. Math. 7, 562—576 (1955).

G désigne un groupe de Lie connexe, B un sous-groupe fermé de G , g, b l'algèbre de Lie de G (resp. B). On suppose que l'espace homogène quotient G/B possède une structure analytique complexe et un volume invariants par G .

A ce dernier on associe par le procédé de Bergmann une forme hermitienne h , invariante, (la même pour tous les volumes invariants). Les résultats de ce Mémoire reposent sur l'étude de h ; ils sont étroitement liés à des travaux de A. Lichnerowicz (ce Zbl. 53, 116) et du rapp. [Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 1147—1151 (1954)]. Soit α la forme extérieure de degré 2 sur G qui est l'image réciproque de la partie imaginaire de h . Le premier but de l'A. est de montrer que 2α est la différentielle extérieure de la 1-forme ψ , invariante à gauche, qui sur $X \in \mathfrak{g}$ est égale à la trace de l'endomorphisme de $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ induit par $\text{ad}(J \cdot X) - J \cdot \text{ad} X$, où J est un endomorphisme de \mathfrak{g} nul sur \mathfrak{b} , induisant sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ la transformation I correspondant à la multiplication par $\sqrt{-1}$ dans la structure complexe donnée. Parmi les conséquences relatives au cas où h est non dégénérée, citons: B est un sous-groupe ouvert du sous-groupe B' laissant ψ invariante; si G est semi-simple, B est sous-groupe ouvert du centralisateur d'un sous-groupe à 1 paramètre. Supposons dorénavant G semi-simple, B compact, h non dégénérée. Soient G^c la complexification du groupe adjoint G_a de G , G' un sous-groupe compact maximal de G^c contenant l'image B_a de B dans G_a . L'A. montre que B est connexe, G de centre fini, établit une correspondance biunivoque entre structures complexes invariantes sur G/B et G'/B_a , décrit le passage de h à la forme canonique h' de la structure complexe correspondante sur G'/B_a , prouve que h' est négative, et que h possède un nombre de carrés négatifs égal à la différence entre la dimension d'un sous-groupe compact maximal K de G et celle de B . Comme sur un domaine borné homogène, la forme canonique est la métrique de Bergmann, donc est positive non dégénérée, il s'ensuit que si G/B est isomorphe à un domaine borné, alors $B = K$, et le domaine est symétrique au sens de E. Cartan, ce qui répond partiellement (car G est supposé semi-simple) à un problème bien connu posé par ce dernier. [Rem. La correspondance entre structures complexes invariantes de G/B et G'/B_a peut se préciser en montrant que G/B s'identifie à un ouvert de G'/B_a , (cf. le rapp., loc. cit.). La formule (6. 7) donnée pour ψ lorsque $G = G'$ traduit le fait que la partie imaginaire de h appartient à la classe canonique, autrement dit à l'opposée de la première classe de Chern. Erratum communiqué par l'A.: p. 572, terminer la ligne 2 du bas par: on peut choisir J de sorte que $J^2 \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$].

A. Borel.

Matsushima, Yozô: Un théorème sur les espaces homogènes complexes. C. r. Acad. Sci., Paris 241, 785—787 (1955).

Le rapp. a établi par une méthode de géométrie différentielle (ce Zbl. 57, 382) que tout espace homogène complexe G/H (G connexe effectif, H compact) à groupe linéaire connexe d'isotropie irréductible admet une structure d'espace hermitien symétrique sous l'une des conditions suivantes: a) G est compact, b) la classe de Chern de degré 2 de l'espace est différente de zéro. L'A. montre ici, par une méthode basée sur la théorie des groupes, que le résultat subsiste indépendamment des conditions a) ou b) qui sont inutiles. Il en déduit en particulier le corollaire suivant: tout espace homogène hermitien à groupe linéaire connexe d'isotropie irréductible et à courbure de Ricci nulle est globalement unitaire.

A. Lichnerowicz.

Auslander, Louis: On curvature in Finsler geometry. Trans. Amer. math. Soc. 79, 378—388 (1955).

The purpose of the present paper is to generalise to Finsler geometry some well-known global theorems of Riemannian geometry. This was done by H. Busemann (this Zbl. 38, 100) with respect to theorems relating the non-positive curvature properties of the metric to the topological properties of the manifold, whereas here both positive and non-positive curvature properties are considered. — Let M be a differentiable manifold endowed with a Finsler metric, T the tangent bundle to M , S the associated sphere bundle, and $p: S \rightarrow M$ the projection map. To each $m \in M$ we associate an n -dimensional vector space $V(m)$ with the $(n-1)$ -dimensional space $D(m)$ of directions in $V(m)$, so that $V(m)$ and $D(m)$ is the fiber

over m in T and S respectively, whose elements are denoted by (m, v) and (m, d) . To each (m, d) associate a right-handed orthonormal frame of vectors (e_1, \dots, e_n) , and let P' denote the set of all such objects $(m, d; e_1, \dots, e_n)$. Theorem: There exists a principal bundle P' over S with fiber and group $O(n)$. Further, if U_i is an indexed family of coverings of M by coordinate neighbourhoods, one may choose $p^{-1}(U_i) = \bar{U}_i$ as coordinate neighbourhoods of this bundle structure. Conversely: if a principal bundle P' may be constructed over S , then M may be given a Finsler metric. Let P be the subset of elements of P' with the property that e_n lies in the direction of d , so that P is a bundle over S with fiber and group $O(n-1)$. The equations of structure (i. e. equations giving exterior derivatives of the relevant Pfaffian forms) for a Finsler space — all forms being considered over P — as given by Chern [Proc. nat. Acad. Sci. USA **29**, 38—43 (1943)] are used to define a Riemannian metric on \bar{U} , where $\bar{U} \subset S$ is a local cross-section over $U \subset M$ such that p is a differentiable homeomorphism. The Finsler metric assigns arc-lengths to those paths of S which can be obtained from paths in the base space by associating with each point of the curve its tangent direction. The author calls this process „lifting“; if C is a curve of M , the lifted curve is denoted by \bar{C} . If \bar{U} is any cross-section containing a lifted geodesic \bar{G} , then \bar{G} is a geodesic in \bar{U} with respect to the induced Riemannian metric. — Curvature: Suppose G is a geodesic of M tangent to d at m , and let \bar{G} be contained in a local cross-section \bar{U} of S . A two-dimensional plane $E \subset U(m)$ containing d goes into $\bar{E} \subset U(\bar{m})$ under the homeomorphism between M and \bar{M} . The sectional curvature for E relative to \bar{U} is defined to be the sectional curvature for \bar{E} in the induced Riemannian metric and is denoted by $R(\bar{U}, m, d, v)$, where d, v span E . If \bar{U}_1, \bar{U}_2 satisfy the same conditions and are tangent at \bar{m} , then $R(\bar{U}_1, m, d, v) = R(\bar{U}_2, m, d, v)$. Similarly mean curvature is defined, and M is said to have positive mean (sectional) curvature $\geq e^2$ if the mean (sectional) curvature of all cross-sections is $\geq e^2$ at all points in all directions (all plane elements). Theorems: A complete n -dimensional Finsler manifold F whose mean curvature is $\geq e^2$, is compact and has diameter less than or equal to π/e . A complete F with positive mean curvature has finite fundamental group. A complete orientable even-dimensional F of positive sectional curvature is simply connected. A complete, simply connected analytic F of non-positive curvature is homeomorphic to the Euclidean space of the same dimension.

H. Rund.

Nagata, Yukiyoishi: Normal curvature of a vector field in a hypersurface in a Finsler space. Tensor, n. Ser. **5**, 17—22 (1955).

The normal curvature of a vector field in subspaces of a Riemannian space was introduced by T. K. Pan (this Zbl. **47**, 404; **55**, 156). The present paper generalizes these results to hypersurfaces of a Finsler space. Some properties of the normal curvature of a vector field with respect to particular curves on the hypersurface are given.

L. A. Santaló.

Galvani, O.: Réalisations euclidiennes des plans de Finsler. Ann. Inst. Fourier **5**, 421—454 (1955).

In an earlier paper (this Zbl. **44**, 373) the author studied the possibility of a local realisation of an analytic Finsler space F in a euclidean space of sufficiently high dimensionality. This realisation is attained by means of a manifold W whose elements consist of triplets $S = (M, A, P)$, where M is a point of F , A a direction through M , and P a plane element through A . The present work is devoted to the problem of realising 2-dimensional Finsler spaces F by means of W , the latter being embedded in a 3-dimensional euclidean space E^3 or in a Riemannian space R^3 , such realisations leading to geometrical relationships between W and F . After a detailed discussion of Cartan's parallelism in the 2-dimensional F , the author obtains a

number of theorems, the most important of which appear to be the following: If F possesses an absolute parallelism it may be realised (in the above sense) in an E^3 , if not, it is realisable in an R^3 . The possibility of a realisation in an E^4 is also discussed briefly, after which the structure of the realisations in an E^3 and R^3 is considered in more detail. It is shown that the images of points of F are the orthogonal trajectories of a one-parameter family of ruled developables of R^3 (or of E^3), and the images of geodesics of F are the generators of these developables. In these investigations the author's chief tool seems to consist of an extensive use of the differential forms of E. Cartan.

H. Rund.

Flanders, Harley: Methods in affine connection theory. Pacific J. Math. 5, 391—431 (1955).

This paper is a continuation of a previous one (this Zbl. 52, 179) and uses the notation of that paper without reintroduction. With the aid of the operator d^2 the Ricci tensor is obtained in operator form, a contraction operator is introduced which allows the setting up of a duality in certain linear spaces, and allows invariant characterizations of symmetric and skew transformations. A series of invariants introduced by S. S. Chern (see this Zbl. 32, 310) are studied, and a version is given of a proof of A. Weil's theorem that the trace ξ_r of the r^{th} power of the curvature matrix defines a cohomology class independent of the given connection. At the end the invariance of the Weyl tensor under projective change of connection as well as some related tensors are discussed.

D. J. Struik.

Castoldi, Luigi: Significato geometrico del divario Riemanniano nelle connessioni metriche in X_n . Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 25, 15—20 (1955).

A connection L_{ij}^k is called metric with respect to a symmetric tensor a_{ij} if $\nabla_k a_{ij} = 0$ (∇ = covariant derivative with respect to L_{ij}^k). Some results of Bompiani (this Zbl. 44, 187) are analyzed for the case of metric connections.

L. A. Santaló.

Castoldi, Luigi: Caratterizzazione a priori delle connessioni metriche in X_n . Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 25, 21—25 (1955).

A necessary and sufficient condition in order that a given connection be metric (see the preceding review) is expressed in terms of the compatibility of a system of differential equations.

L. A. Santaló.

Ôtsuki, Tominosuke: Note on compact manifolds with non-symmetric metric connections. Math. J. Okayama Univ. 4, 103—114 (1955).

In einem Raume mit einer metrischen, aber nicht symmetrischen Übertragung können die Übertragungsparameter Γ_{ji}^h ausgedrückt werden in den $g_i, \begin{Bmatrix} h \\ i \end{Bmatrix}$ und den Bestimmungszahlen des Torsionstensors $S_{ji}^{\cdot\cdot h}$. Für den Fall, daß der Raum kompakt ist, werden notwendige und hinreichende Bedingungen für $S_{ji}^{\cdot\cdot h}$ aufgestellt für die Existenz eines Skalarfeldes φ , bei dem das Raumintegral von $\Delta\varphi$ verschwindet. Sodann wird bewiesen, daß es zu jeder kompakten V_n eine Übertragung gibt, für welche $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\lambda} \neq 0$ aber $\overset{0}{\nabla}_\nu S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\lambda} = 0$, und es werden notwendige und hinreichende Bedingungen abgeleitet dafür, daß im kompakten Falle ein Multivektorfeld $\varphi_{i_1 \dots i_p}$ pseudoharmonisch (definiert in bezug auf Γ_{ji}^h) sei. Es ergeben sich Identitäten, denen pseudoharmonische Multivektorfelder zu genügen haben. Zum Schluß werden unter denselben Voraussetzungen notwendige und hinreichende Bedingungen und eine Identität abgeleitet für Multivektorfelder, die pseudo-Killingsch sind nach der Definition von Bochner und Yano (dies. Zbl. 48, 158).

J. A. Schouten.

Suguri, Tsuneo and Shigeru Nakayama: Note on Riemannian spaces and contact transformations. Tensor, n. Ser. 5, 1—16 (1955).

Homogene Berührungstransformationen und ihre Beziehungen zu Riemannschen Räumen V_n und Finslerschen Räumen F_n wurden von verschiedenen Autoren betrachtet. Es werden hier nur folgende zitiert: L. P. Eisenhart, dies. Zbl. 30, 219; T. Ohkubo, dies. Zbl. 48, 402; K. Takano, dies. Zbl. 56, 413; K. Yano und E. T. Davies, dies. Zbl. 56, 399. Der Verf. stellt sich die Aufgabe, die Theorie zu vervollständigen und namentlich auch auf die Notwendigkeit der aufgestellten Bedingungen einzugehen. Die F_n wird als eine Transformierte der V_n behandelt. Anschließend werden in F_n die Vektoren betrachtet und ein absolutes Differential definiert. Die Arbeit schließt mit Betrachtungen über die Beziehungen zwischen den kovarianten Ableitungen in F_n und in dem Raume V_n^* , der Produktraum der V_n mit dem linearen Raum der kovarianten Vektoren ist. Die Beurteilung dieser sehr eingehenden und interessanten Arbeit wird sehr erschwert durch den Umstand, daß, der japanischen Gewohnheit entgegengesetzt, gar keine Theoreme formuliert werden und demzufolge nur ein eingehendes Studium lehren könnte, was neu ist und als Verbesserung begrüßt werden kann. *J. A. Schouten.*

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Dekker, David: Convex regions in projective n -space. Amer. math. Monthly 62, 430—431 (1955).

Eine offene Menge K im n -dimensionalen projektiven Raum heißt konvex, wenn (1) K mit je zwei Punkten mindestens eine sie verbindende Strecke enthält und (2) eine Hyperebene existiert, die K nicht trifft. Verf. zeigt, daß die Bedingungen (1) und (2) durch folgende ersetzt werden können: K enthält mit je zwei Punkten genau eine sie verbindende Strecke. *H. Gericke.*

Bieri, H.: Über das Hauptproblem bei konvexen Rotationskörpern. Experientia 11, 167—168 (1955).

Ist K ein konvexer Körper des gewöhnlichen Raumes und K_h der Parallelkörper von K in der Entfernung $h > 0$, so gilt für das Volumen $V(K_h)$ von K_h nach Steiner

$$V(K_h) = V + O h + M h^2 + \frac{4}{3} \pi h^3$$

Zwischen diesen Größen bestehen bekanntlich die klassischen Ungleichungen $O^2 \geq 3 M V$ und $M^2 \geq 4 \pi O$, die sämtlich von Minkowski bewiesen wurden. Nun vermutet man aus verschiedenen Gründen eine weitere Ungleichung, die von den hier angegebenen unabhängig ist. Verf. gibt in dieser Note zwei interessante Ansätze, die zum Ziele führen könnten. Der etwas längere Rechenapparat erschwert ihre ausführliche Wiedergabe. *A. Dinghas.*

Hadwiger, H. und H. Debrunner: Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie in der Ebene. Enseignement math., II. Ser. 1, 56—89 (1955).

37 Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie mit alten und neuen Beweisen. Die ersten 4 Probleme beziehen sich auf Inzidenzverhältnisse bei Punkten, Geraden und Kreisen, z. B. „Geht durch den Schnittpunkt je zweier Geraden einer endlichen Geradenmenge stets wenigstens eine dritte Gerade, so gehen alle Geraden durch einen Punkt“. Hieraus folgt z. B., daß die Konfiguration $7_3, 7_3$ nicht realisierbar ist. Die Sätze 5—9 beziehen sich auf Mengen mit ganzzahligen oder rationalen Distanzen oder Winkelmaßen. Beispiel: „Ist $\cos \alpha$ rational, $0 < \alpha < \pi/2$, $\alpha \neq \pi/3$, so ist α/π irrational“. Nr. 10—13 behandeln konvexe Hüllen und Separation ebener Punktmengen. Beispiel: „Jede Punktmenge, die mindestens 4 Punkte enthält, läßt sich in 2 nicht-leere, punktfremde und nicht separierbare Teilmengen zerlegen“, Nr. 14—18 gehören zur Konvexgeometrie und hängen mit dem Hellyschen Satz zusammen. Beispiel: „Läßt sich ein Eibereich so verschieben, daß er je 3 Bereiche einer Eibereichmenge enthält, dann auch so, daß er alle Bereiche der Menge enthält“. Die letzten 8 Sätze beziehen sich auf Überdeckung von Punktmengen von

gegebenem Durchmesser. Z. B.: „Eine Punktmenge vom Durchmesser $D = 1$ läßt sich von einem regulären Sechsecksbereich der Seitenlänge $s = 1/\sqrt{3}$ überdecken.“
F. W. Levi.

Schäffer, Juan J.: Minimum figure covering points of a lattice. II. Fac. Ing. Montevideo, Publ. Inst. Mat. Estadíst. **2**, 173—199 (1955) [Spanisch mit engl. Zusammenfassg.].

The paper continues earlier work by the author and J. L. Massera (this Zbl. **44**, 378). Even though a more complete form of the principal result is found in the author's paper (this Zbl. **64**, 168; appeared first but submitted for publication after the present paper), some complementary details on convex covering figures make the paper interesting and not superfluous.
L. A. Santaló.

Santaló, L. A.: Fragen der Differential- und Integralgeometrie in Räumen konstanter Krümmung. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **14**, 277—295 (1955) [Spanisch].

Soit S une hypersurface, fermée et orientable, d'un espace à courbure constante K n -dimensionnel, S bordant un domaine Q . La formule de Gauss-Bonnet donnée par Chern [Ann. of Math., II. Ser. **46**, 674—684 (1945)] peut s'écrire alors sous les formes

$$(n \text{ pair}) \quad \sum c_{2i+1} M_{2i+1} + K^{n/2} V = \frac{1}{2} O_n \chi(Q); \quad 0 \leq i < n/2;$$

$$(n \text{ impair}) \quad c_0 F + \sum c_{2i} M_{2i} = \frac{1}{2} O_n \chi(Q), \quad 0 < i \leq (n-1)/2;$$

où les M_j sont les intégrales des courbures moyennes de S , F l'aire de S , V le volume de Q , les $c_j = \binom{n-1}{j} \frac{O_n K^{(n-1-j)/2}}{O_j O_{n-1-j}}$ l'aire de la sphère h -dimensionnelle et $\chi(Q)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré. De ces formules l'A. fait des applications: a) pour généraliser au cas n -dimensionnel des formules (duales) établies par Blaschke pour l'espace elliptique à 2 et 3 dimensions; et b) pour étendre aux espaces à courbure constante une formule donnée par Hadwiger (ce Zbl. **41**, 311) pour l'espace euclidien à n dimensions.
G. Ancochea.

Topologie:

Borsuk, K.: Was ist Topologie? Wiadom. mat. **1**, Nr. 1, 65—74 (1955) [Polnisch].

Wiedergabe eines populären Vortrages, in dem die charakteristischsten Beispiele, Probleme, Methoden und Namen im Zusammenhang mit der Topologie sowie einige allgemeine Betrachtungen über die Rolle der Mathematik überhaupt erwähnt werden.

D. Kurepa.

● **Kelley, John L.: General topology.** (The University Series in Higher Mathematics.) New York: D. van Nostrand Co., Inc. 1955, 298 p., illustr. \$ 8,75.

L'A. présente dans cet ouvrage un traité complet de topologie générale. Les matières y sont abordées à peu près dans le même ordre que dans le Traité de N. Bourbaki. Au chap. I sont exposées les notions fondamentales (ensembles ouverts, ensembles fermés, voisinages, adhérence, intérieur, bases, sous-espaces, espaces connexes). Le chap. II est consacré à la „convergence à la Moore-Smith“, fondée sur la notion de „net“ (application d'un ensemble filtrant dans un autre ensemble), sur laquelle l'A. fait reposer le traitement des limites, au lieu d'utiliser les filtres comme N. Bourbaki; la raison de ce choix semble être de rester plus près de la notion „intuitive“ de suite; les inconvénients résident dans une technique moins maniable (nécessité de faire constamment intervenir des ensembles „auxiliaires“ en dehors de l'espace étudié, technique moins commode pour le „raffinement“ d'un filtre, l'introduction des ultrafiltres, des filtres de Cauchy, etc.). Au chap. III sont introduits les fonctions continues, les espaces produits et espaces quotients. Vient ensuite un chapitre sur les espaces métriques et le problème de métrisation, plus

développé que le chapitre correspondant de Bourbaki, et contenant entre autres les critères de métrisation de Urysohn et de Nagata-Smirnov. Les espaces compacts (non séparés, dans la terminologie de l'A.) et localement compacts sont traités au chap. V, qui contient aussi beaucoup plus de détails que dans Bourbaki sur la compactification de Stone-Čech et les espaces paracompacts. Les espaces uniformes et leurs relations avec les espaces métriques forment l'objet du chap. VI, où sont aussi exposées les questions de „catégorie“ (th. de Baire). Enfin le dernier chapitre est consacré aux topologies sur les espaces fonctionnels; à noter une notion, introduite par l'A. et A. P. Morse („even continuity“) qui généralise la notion d'équicontinuité pour les applications d'un espace topologique dans un espace topologique quelconque (non-nécessairement uniformisable). — Le livre est pratiquement indépendant de tout autre ouvrage: un chapitre préliminaire contient les notions élémentaires de théorie des ensembles, d'algèbre et de théorie des nombres réels nécessaires pour la suite; en outre l'A. a pris la peine, dans un long Appendice, de développer en détail une théorie axiomatique des ensembles, sur le modèle von Neumann-Bernays-Gödel. Chaque chapitre est suivi de nombreux exercices, où sont souvent traitées succinctement des applications variées de la topologie (notamment aux groupes topologiques et aux espaces vectoriels topologiques); en outre il y a une bibliographie très complète et à jour. Si on ajoute que les démonstrations sont claires et concises, et le style agréable (encore qu'affectant par moments une allure un peu trop désinvolte et „journalistique“, à la mode aux USA), on voit que ce volume mérite une place de choix dans la littérature sur le sujet. Toutefois, l'A. annonce que son ouvrage est conçu spécialement en tant que „base de l'analyse moderne“ („background for modern analysis“) et la critique la plus sérieuse qu'on puisse lui adresser est de n'avoir guère tenu compte de ce programme. Dans l'état actuel des mathématiques la Topologie générale a cessé d'être un champ de recherches „sérieux“: j'entends par là qu'il ne s'y pose plus que des problèmes plus ou moins tatarologiques. Il importe donc que le débutant qui en aborde l'étude se rende compte le plus tôt possible que la Topologie générale n'est importante qu'en tant qu'outil pour d'autres domaines, et ne soit pas tenté de s'égarer dans la pathologie. Or, il lui serait difficile d'acquiescer cette conviction par la lecture de cet ouvrage: pour citer quelques exemples, voici trois théorèmes d'importance essentielle dans les applications à l'Analyse, et qui sont rejetés en exercices: le fait qu'une fonction numérique continue atteint son maximum sur un compact, le th. d'extension de Tietze-Urysohn et le th. d'approximation de Weierstrass-Stone. Par contre, l'A. s'étend complaisamment sur les problèmes de métrisation ou les propriétés „fines“ des espaces paracompacts, qui du point de vue des applications ne sont guère à présent que des curiosités. Il est dommage que cette erreur d'optique diminue pour l'étudiant l'utilité d'un livre par ailleurs excellent.

J. Dieudonné.

Klee jr., V. L.: Some finite-dimensional affine topological spaces. *Portugaliae Math.* 14, 27—30 (1955).

Auf dem m -dimensionalen Raum E^m werden zwei pathologische Topologien eingeführt. Die offenen Mengen O der Topologie t_1 sind die Mengen, in denen jeder Punkt P radial innerer Punkt ist, d. h. der Durchschnitt jeder Geraden durch P mit O enthält P als inneren Punkt im Sinn der euklidischen Topologie. Die offenen Mengen der Topologie t_2 sind die Mengen der Form $G \cup H$, G im euklidischen Sinn offen, H eine Menge, deren Punkte P radial innere Punkte einer geeigneten euklidisch abgeschlossenen Teilmenge von $G \cup \{P\}$ sind. Beide Topologien machen E^m zu einem affintopologischen Raum im Sinn von Fréchet, jedoch für $m \geq 2$ nicht zu einem topologischen Vektorraum. $E^m[t_1]$ ist nicht regulär, $E^m[t_2]$ ist vollständig regulär, aber nicht normal. Beide Räume sind separabel, erfüllen aber nicht das 1. Abzählbarkeitsaxiom und haben nicht die Lindelöfeigenschaft. *G. Köthe.*

Collins, Heron S.: Completeness, full completeness and k -spaces. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 832—835 (1955).

Soit E un espace complètement régulier; l'A. dit que E est un k -espace si la topologie de E est la plus fine de celles qui induisent la même topologie sur les parties compactes de E . Il étudie les relations entre cette propriété et la propriété que l'espace $\mathcal{Q}(E)$ des fonctions numériques continues dans E est complet pour la topologie de la convergence compacte, et montre entre autres que ces deux propriétés sont équivalentes lorsque toute partie compacte de E est finie (auquel cas E est nécessairement discret si c'est un k -espace), et aussi lorsqu'il existe une suite (K_n) de parties compactes de E telle que toute partie compacte de E soit contenue dans une des K_n .
J. Dieudonné.

Schaefer, Helmut: Stetige Konvergenz in allgemeinen topologischen Räumen. Arch. der Math. **6**, 423—427 (1955).

Eine Folge von Abbildungen $\{u_n\}$ von einem topologischen Raum E in einen (vollständigen) metrischen Raum F wird stetig konvergent genannt, wenn der Filter $F(x_0; \{u_n\})$, erzeugt durch die Mengenfamilie $\bigvee_{i \geq n} u_i(U)$ (n natürliche Zahl ≥ 1 , U Element einer Umgebungsbasis von $x_0 \in E$) in F konvergiert. — Satz 1: Die definierende Bedingung ist gleichwertig mit: $\{u_n\}$ ist lokal gleichmäßig konvergent in $x_0 \in E$ und die Schwankung von u_n in x_0 strebt für $n \rightarrow \infty$ gegen 0. Satz 2: E sei lokal kompakt; $\{u_n\}$ ist stetig konvergent in jedem Punkt von E genau dann, wenn $\{u_n\}$ auf jeder kompakten Teilmenge $E_0 \subset E$ gleichmäßig konvergiert, und die Schwankung von u_n auf E_0 für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen 0 strebt. — Eine Menge $\{u\}$ von Abbildungen wie oben wird normal genannt, wenn jede unendliche Teilmenge von $\{u\}$ auf E stetig konvergente Teilfolgen enthält; eine nach den obigen Sätzen naheliegende Charakterisierung von normalen Mengen wird angegeben.
G. H. Müller.

Sikorski, R.: On the operation of cutting off mappings. Prace mat. **1**, 136—139, russ. Zusammenfassg. 139, engl. Zusammenfassg. 140 (1955) [Polnisch].

As positive answer to a question raised by Kuratowski this statement is proved: X, Y being metric spaces, Y bounded, let Y^X be the metric space of all continuous mappings of X into Y with the metrics $\rho(f, g) = \sup(f(x), g(x))$ ($x \in X; f, g \in Y^X$). For $F \subseteq X$, let $\Phi(f) = f^*$ be the induced mapping of F . If Y is an absolute neighbourhood retract, then the mapping $f \rightarrow f^*$ is interior i. e. for each open $U \subseteq Y^X$ the set $\Phi(U)$ is open in Y . Note that Y is an absolute neighbourhood retract, if for every metric space $Y_0 \supseteq Y$ there is an open set $V \subseteq Y_0$ and a function $r \in Y^V$ such that $Y \subseteq V$, $r(y) = y$ ($y \in Y$).
D. Kurepa.

Hanai, Sitiro: On quasi-interior mappings. Math. Japonicae **3**, 117—130 (1955).

Une application f d'un espace S sur un espace E est dite quasi-intérieure (d'après G. T. Whyburn) si elle est continue et si, quel que soit $p \in E$, pour tout ensemble ouvert U de S qui contient une composante compacte de $f^{-1}(p)$, p est point intérieur de $f(U)$. S et E étant des espaces T_1 , l'A. démontre qu'une application quasi-intérieure pour laquelle $f^{-1}(p)$ est compact quel que soit $p \in E$ laisse invariables les propriétés de compacité et de connexion locale. Si S est métrique et séparable et f non alternante et que $f^{-1}(p)$ sépare deux points dans S , alors p sépare leurs images dans E .
S. Stoilow.

Weier, Josef: Endliche Abbildungsscharen in kompakten topologischen Mannigfaltigkeiten. Monatsh. Math. **59**, 1—21 (1955).

H. Hopf [Math. Z. **29**, 493—524 (1929)] et G. Hirsch [Bull. Sci. math., II. Sér. **67**, 158—168 (1943)] ont démontré, respectivement pour des polyèdres finis et pour des variétés topologiques, qu'il est toujours possible de construire une application continue φ de cet espace en lui-même, arbitrairement proche d'une

application continue donnée quelconque f de cet espace en lui-même, q étant homotope à f et n'ayant (au plus) qu'un nombre fini de points fixes (dans toute portion compacte de l'espace, s'il s'agit d'une variété non-compacte). L'A. étend ce résultat à un faisceau continu F d'applications continues f^t ($0 \leq t \leq 1$) d'une variété compacte en elle-même: il est possible de construire un faisceau continu Φ d'applications continues q^t , telles que q^t soit arbitrairement proche de f^t , q^t étant homotope à f^t et n'ayant (au plus) qu'un nombre fini de points fixes. De plus, si f^0 et f^1 n'ont elles-mêmes qu'un nombre fini de points fixes, on peut encore imposer $q^0 = f^0$ et $q^1 = f^1$. — La démonstration se fait en supposant la variété plongée dans un espace euclidien à un nombre fini de dimensions et en étudiant les propriétés locales (c'est-à-dire valables dans des voisinages ouverts) des applications. G. Hirsch.

Alexandroff (Aleksandrov), P. S.: Über die Homöomorphie von Punktmengen. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. 4, 405—420 (1955) [Russisch].

Die Arbeit enthält ausführliche Beweise für die vom Verf. in einer früheren Note (dies. Zbl. 56, 417) mit Beweisandeutungen angekündigten Sätze. Es wird ein Problem bezüglich der Homöomorphie zweier Polyeder aufgestellt. F. Albrecht.

Heller, Alex: Homotopy resolutions of semi-simplicial complexes. Trans. Amer. math. Soc. 80, 299—344 (1955).

In this paper the author continues his programme of translating topological problems into combinatorial form [see Ann. of Math., II. Ser. 60, 283—303 (1954)]. In this case the topological problem is that of the classification of spaces with operators into equivariant homotopy types. Let $S(X)$ be the singular simplicial complex of the space X . If G is a topological group, then $S(G)$ is, in the author's terminology, a semi-simplicial group. If G operates on X , then $S(G)$ operates on $S(X)$. Thus the study of spaces with operators may be replaced by the study of semi-simplicial complexes operated on by semi-simplicial groups. If G operates on X without fixpoints, then $S(G)$ operates on $S(X)$ „without fixed simplexes“. This situation may therefore be thought of as the analogue of a principal fibre space; when the semi-simplicial group Γ operates on the semi-simplicial complex K without fixed simplexes, K is called a Γ -bundle. Then the base complex K/Γ may be defined and if X is a principal fibre space for the group G then $S(X)/S(G)$ is the singular complex of X/G . The author develops an obstruction theory for maps of semi-simplicial complexes as the main tool in the classification problem. The value groups of the obstruction cochains are called homotopy groups and are introduced axiomatically (cf. D. M. Kan, this Zbl. 65, 386, where homotopy groups are also defined for a subcategory of the category of semi-simplicial complexes). The author then describes a technique of homotopy resolution which may be thought of as parallel to the Cartan-Serre technique of killing homotopy groups. By this device one thinks of a space as a base space of a sequence of fibrations having Eilenberg-MacLane spaces as fibres. As formulated, for example, by J. C. Moore, one considers a „twisted“ product of Eilenberg-MacLane spaces $K(\pi_n(X), n)$, the twist being measured essentially by the Postnikov invariants which may be characterized as self-obstruction invariants. This procedure is imitated by the author; as constituents of a homotopy resolution the semi-simplicial Eilenberg-MacLane complexes are reinforced by universal bundles of operator groups, these being principal bundles with all homotopy groups vanishing. Then the main result, corresponding to the Postnikov theorem, is that two semi-simplicial complexes with operators are equivalent if and only if they have isomorphic homotopy resolutions. P. Hilton.

Inoue, Yoshiro: On exactness of the homotopy sequence of a p -ad. Math. Japonicae 3, 97—102 (1955).

By interpreting the homotopy group, π_{m+n} , of the p -ad $(X; X_1, \dots, X_{p-1})$ as the homotopy group π_m of a suitably defined function-space, the author is enabled to deduce the exactness of the homotopy sequence of a p -ad (see A. K. Blakers and

W. S. Massey, this Zbl. 42, 173) from the exactness of the homotopy sequence of a Serre pseudo-fibration. As a tool in the proof, the author introduces the notion of a G -space as a generalization of an H -space. However, if the reviewer has properly understood, a perfect G -space is just an H -space with homotopy-associative multiplication and homotopy-inverse, i. e., a group-like space in the sense of G. W. Whitehead [Commentarii math. Helvet. 28, 320—328 (1954)]. In that case, the notion of G -space would be superfluous to the author's purpose. It may also be pointed out that a simplicial G -space of S -type is just a simplicial group-like space. The reviewer would wish to remark on the absurd frequency of typographical errors. Among these, the following are particularly troublesome: on p. 97, l. 11, $Y^X \{X_0, X_0\}$ should be $Y^X \{X_0, Y_0\}$, and, on l. 17, (Y, V, e) should be (X, V, e) ; on p. 99, formula (1. 3), $\bar{\eta}(\bar{x}) \cdot \bar{\xi}(\bar{x})$ should be $\bar{\eta}(\bar{x}_0) \cdot \bar{\xi}(\bar{x}_0)$, and, l. 2 from bottom, the formula should read $Q_n^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n; x_i = 0\}$.

R. Hilton.

Spanier, E. H. and J. H. C. Whitehead: Obstructions to compression. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 6, 91—100 (1955).

Soit Y' un sous-espace de Y ; comprimer une application $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ dans Y' , c'est trouver une application g homotope mod A à f telle que $g(X) = Y'$. Si X, A, Y, B sont des CW-complexes, ce problème conduit à des obstructions qui sont des classes d'homologie de (Y, B) à valeurs dans les groupes de cohomotopie $\pi^k(X, A)$, au moins lorsque ceux-ci sont définis. Posant $\bar{Y}^n = Y^n \cup B$, le groupe $\pi^n(\bar{Y}^n, \bar{Y}^{n-1})$ s'identifie au groupe $C^n(\bar{Y}^n, \bar{Y}^{n-1})$ des cochaînes entières (supposé de type fini). Une application cellulaire $f: (X, A) \rightarrow (Y^k, B)$, où $\dim(X - A) \leq 2k - 2$, $k \geq 2$, définit un homomorphisme de $\pi^k(\bar{Y}^k, \bar{Y}^{k-1})$ dans $\pi^k(X, A)$. Cet élément de $\text{Hom}(C^k(\bar{Y}^k, \bar{Y}^{k-1}); \pi^k(X, A))$ peut être considéré comme un cocycle obstruction $z_k(f) \in H_k(Y, B)$. Si $\dim X \leq k$, on peut définir l'obstruction $z_k(i)$ de l'application identique i , et l'on a $z_k(f) = f_*(z_k(i))$. Les AA. démontrent alors la propriété classique de la première obstruction: Si Y^{k-1} est m -connexe avec $m \leq k - 1$, et si $\dim(X - A) \leq k + m - 1$, $z_k(f) \sim 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que f soit compressible dans Y^{k-1} . Esquisse de la démonstration: Si $f: X \times I \rightarrow (Y, B)$ est une homotopie reliant f à g , on peut lui associer une cochaîne différence telle que $\partial c = z_k(f) - z_k(g)$. Dans les conditions envisagées, l'ensemble des applications $f: X \rightarrow \bar{Y}^k$ peut être muni d'une structure additive de cohomotopie, pour laquelle l'obstruction $z_k(f)$ se comporte additivement. On montre alors, par addition que, f et la cochaîne c étant données, il existe une application g , homotope à f , telle que $\partial c = z_k(f) - z_k(g)$. Prendre alors $z_k(g)$ identiquement nulle.

R. Thom.

Vesentini, Edoardo: Campi di vettori dotati di peso sopra una varietà complessa compatta. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 14, 564—580 (1955).

Etant donnés r champs de vecteurs sur une variété complexe compacte (à m dimensions complexes), dotés de „poids“ w_i, \bar{w}_i , on se propose de déterminer la classe d'homologie de la sous-variété lieu des points où ces vecteurs cessent d'être linéairement indépendants. L'A. utilise dans ce but une formule de Kundert qui donne la seconde obstruction comme polynome par rapport au cocycle différence, les coefficients étant les classes de Chern. Il évalue ensuite ces cocycles différences avec un champ de vecteurs contravariants usuel, différence égale à $(\bar{w}_i - w_i) c_1$. Cas particuliers: Les coefficients d'une forme de type $(1, m)$ peuvent s'interpréter comme les composantes d'un champ de poids $(0, 1)$. De même pour les formes duales de type $(m - 1, 0)$.

R. Thom.

Chern, Shiing-Shen: On curvature and characteristic classes of a Riemann manifold. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 20, 117—126 (1955).

M désignant une variété riemannienne compacte, g_{ik} son tenseur métrique et $R^j_{i\ k l}$ son tenseur de courbure, l'A. introduit l'expression $\Omega = \frac{1}{2} (\partial/\partial x^i) \wedge (\partial/\partial x^j) \otimes R^j_{i\ k l} dx^k \wedge dx^l$. Si M est de dimension paire $n = 2s$ et si on pose $\Omega^s = e_1 \wedge \dots \wedge e_n \otimes \bigwedge$ [où e_1, \dots, e_n désigne une base orthonormée de l'espace tangent en x], la caractéristique d'Euler-Poincaré de M est donnée par $2^{2s} \tau^s s! = (-1)^s \int_M \Delta$;

et quel que soit n , $|\Omega^k|^2$ coïncide, à un facteur près, avec la forme ψ_k précédemment déterminée par l'A. (Topics in differential geometry. Mineographed lectures. Princeton 1951) et définissant la $k^{\text{ème}}$ classe de Pontrjagin p_k (ce Zbl. 37, 103). Quelques applications sont données, concernant les espaces à courbure constante, ou, plus généralement, ceux dont la courbure satisfait à certaines conditions; une autre conséquence est l'impossibilité de plonger M dans E^{n+2l-1} si la classe d'homologie duale \bar{p}_l est non nulle. Application à l'espace projectif complexe. J. Lelong.

Papy, Georges: Sur la définition intrinsèque des vecteurs tangents. C. r. Acad. Sci., Paris 241, 19—20 (1955).

L'A. établit le résultat intéressant suivant: en adaptant de façon naturelle à une variété différentiable de classe C^1 la définition intrinsèque des vecteurs tangents (Pour le cas analytique, voir Chevalley, Theory of Lie groups, Princeton 1946; voir aussi S. S. Chern, Topics in differential geometry, Princeton 1951; p. 14—15) on peut obtenir un "espace tangent" de dimension infinie quelle que soit la dimension (finie) de la variété. A. Lichnerowicz.

Kyle, R. H.: Embeddings of Möbius bands in 3-dimensional space. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A 57, 131—136 (1955).

Verf. betrachtet semilineare Einbettungen des Möbiusbandes und ihre Äquivalenz bezüglich semilinearer Isotopien der 3-Sphäre. Es wird gezeigt: (1) Zwei Einbettungen sind äquivalent, wenn es ihre Mittellinien sind und wenn sie dieselbe Verdrillung besitzen. (2) Der Einbettungstyp ist durch den Typ des Randes bestimmt, wenn dieser verknotet ist. Zu unverknotetem Rand gibt es zwei Typen von Einbettungen. Bei diesen ist die Mittellinie unverknotet und die Verdrillung ± 1 . Für die Einbettungen des Kreisringes überträgt sich (1) ohne weiteres, während an Stelle von (2) die Bemerkung tritt, daß die Ränder eines Kreisringes bei gleichsinniger Orientierung seine Verknotung und Verdrillung bestimmen. Horst Schubert.

Angewandte Geometrie:

● **Reutter, F.:** Darstellende Geometrie. I. Grundbegriffe, Orthogonale Zweifelp Projektion, Axonometrie. 4. erw. Aufl. Karlsruhe: Verlag G. Braun 1955. VIII, 203 S., 189 Abb., Halbln. DM 13,80.

Während die vorhergehenden Auflagen nur unbedeutende Veränderungen gegenüber der Erstauflage (dies. Zbl. 30, 321) aufwiesen, bringt die nun vorliegende 4. Aufl. unter Beibehaltung der wesentlichen Grundlinien in Aufbau und Methode eine wesentliche Vertiefung und Verbreiterung des Stoffes in fast allen Kapiteln. Neu hinzugekommen ist u. a. ein Abschnitt über Kegelschnittseigenschaften, eine Einführung in das axonometrische Prinzip am Anfang und zwei Kapitel über allgemeine und orthogonale Axonometrie am Ende des Buches; sehr erweitert und durch neue Aufgaben ergänzt wurden vor allem die Abschnitte über die konstruktive Darstellung krummer Flächen und ihrer Durchdringungskurven. H. Horninger.

Justinijanović, Juraj: Die Lösung zweier metrischen Fundamentalaufgaben in der orthogonalen Axonometrie ohne Umlegungen. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 10, 41—46 u. kroatische Zusammenfassung. 46 (1955).

In einer Ebene soll aus einem Punkt auf eine Gerade das Lot gefällt werden. Die wahre Länge einer Strecke soll ermittelt werden. Diese beiden metrischen Grundaufgaben löst Verf. durch Vervollständigung der zirkularen Involution, die durch

das axonometrische Bild von zwei Paaren normaler Geraden der betreffenden Ebene festgelegt wird. Im zweiten Fall wird die Strecke, die durch axonometrischen Riß und Grundriß gegeben ist, in eine zur Grundrißebene normale Ebene eingebettet.
H. R. Müller.

Hazay, I.: Die Umrechnung von der stereographischen Projektion und der konformen Zylinderprojektion auf die Gauß-Krügersche Projektion. Acta techn. Acad. Sci. Hungar. 10, 139—153, russ. Zusammenfassg. 153 u. engl. u. franz. Zusammenfassg. 154 (1955).

Die ungarische Landesvermessung führt gegenwärtig im Zusammenhang mit einer Neutriangulierung die in den meisten Staaten bereits gebräuchliche Gauß-Krügersche Abbildung ein und geht dabei gleichzeitig vom Besselschen Ellipsoid zu dem von Krassowsky über. Nach Erörterung der Möglichkeiten, die sich vom praktischen und vom theoretischen Standpunkt für die Überführung des alten Triangulationsnetzes in das neue System der Landesvermessung bieten, wird eine in solchem Fall sehr zweckmäßige Methode beschrieben, bei der die Umrechnung des in konformer Abbildung vorliegenden alten Netzes durch Heranziehung eines in beiden Systemen bekannten Koordinatenanschlußpunktes mit Hilfe der Richtungsreduktionen, der Projektionsmeridiankonvergenzen und der Faktoren der Längenverzerrung vor sich geht. Die genannten Reduktionen werden bei beiden Projektionen für das gleiche Ellipsoid berechnet. Die mit dem Ellipsoidübergang verbundenen Längenänderungen und azimutalen Drehungen werden zu den von der ebenen Abbildung herrührenden Reduktionen hinzugefügt. Durch zweckmäßige Wahl der Koordinatenanschlußpunkte (auf Meridianen des Ellipsoids mit runden Gradwerten im Abstand von $10'$ geographischer Breite) lassen sich unter Beachtung der in der Praxis tragbaren Vernachlässigungen sehr einfache, für Maschinenrechnung geeignete Umrechnungsformeln gewinnen. Die entsprechenden Ableitungen werden mit eingehender Diskussion für die beiden in Betracht kommenden Fälle gegeben (Übergang von stereographischer bzw. schiefachsiger Zylinderprojektion und Bessel-Ellipsoid zu Gauß-Krüger-Abbildung und Krassowsky-Ellipsoid). W. Hofmann.

Hazay, I.: Zeitgemäße Formeln für Reduktionen von winkeltreuen Zylinderprojektionen. Acta techn. Acad. Sci. Hungar. 11, 185—216 u. russ., engl. u. franz. Zusammenfassg. 216 (1955).

Um für die im vorstehenden Referat angegebenen Umformungen ein zur maschinellen Berechnung der Richtungs- und Streckenreduktionen besser geeignetes Formelsystem zu gewinnen, wird von geometrisch-anschaulichen Betrachtungen ausgegangen und zunächst eine Beziehung zwischen den Richtungsreduktionen in den Endpunkten eines Bogens $P_1 P_2$ und dem sphärischen Exzeß desjenigen Vierecks aufgezeigt, das der genannte Bogen mit dem Berührungskreis von Kugel und Projektionszylinder und mit den zu diesem Kreis normalen Großkreisbögen bildet, die durch P_1 und P_2 gehen. Durch Anwendung der aus der Theorie der geodätischen Abbildungen geläufigen Reihenentwicklungen auf das Projektionsbild zweier sphärischer Punkte wird diese Beziehung mathematisch analysiert. Dabei ergeben sich neben den gewünschten Gebrauchsformeln interessante Einblicke in differentialgeometrische Zusammenhänge. Eine ausführliche Betrachtung ist dem Vorzeichen der Richtungsreduktion gewidmet.
W. Hofmann.

Felstein, Milton: On spherical drawing and computation. Amer. math. Monthly 62, 631—635 (1955).

Theoretische Physik.

● **Schilpp, Paul Arthur** (Herausgegeben von): **Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher.** Stuttgart: W. Kohlhammer Verlag 1955. XV, 540 S. 2 Tafeln, 10 Zeichnungen. DM 24,—.

Es handelt sich um eine Übersetzung des bekannten im Jahre 1949 erschienenen Bandes aus der von Paul A. Schilpp herausgegebenen „Library of Living Philosophers“. Das Buch ist jedem zu empfehlen, der sich für die moderne Naturphilosophie interessiert. I. Eingeleitet wird es von einer sehr lesenswerten wissenschaftlichen Selbstbiographie Albert Einsteins, der einzigen, die wir besitzen. Dieser „eigene Nekrolog“, wie Einstein sagt, ist übrigens in deutscher Sprache verfaßt; ein Faksimile davon ist beigegeben. II. Der Hauptteil des Buches enthält 25 Beiträge bedeutender Physiker, Philosophen und Mathematiker, die sich mit Einsteins Lebenswerk — zum großen Teil kritisch — auseinandersetzen. Unter den Verff. findet man so bekannte Namen wie A. Sommerfeld, L. de Broglie, W. Pauli, M. Born, W. Heitler, N. Bohr, H. Margenau, P. Frank, H. Reichenbach, P. W. Bridgman, F. S. C. Northrop, E. A. Milne, G. E. Lemaitre, K. Menger, L. Infeld, M. v. Laue, H. Dingle, K. Gödel, A. Wenzel u. a. Einige Artikel konnten in der deutschen Originalfassung abgedruckt werden. Besonders wichtig ist der Bericht Bohrs von seiner „Diskussion mit Einstein über erkenntnistheoretische Probleme in der Atomphysik“. Zur Debatte steht hier die Gültigkeit und die richtige Interpretation des quantenmechanischen Formalismus. Die entgegengesetzten Auffassungen dieser beiden großen Gelehrten zu diesen Fragen werden dem Leser deutlich. Hingewiesen sei ferner auf Gödels Artikel, in dem ein neuartiges kosmologisches Modell mit folgenden bemerkenswerten Eigenschaften erörtert wird: a) Das Universum ist homogen und rotationssymmetrisch; b) die Materie rotiert überall relativ zum Raum; c) man kann mit einer geeigneten Beschleunigung beliebig weit in die eigene Vergangenheit reisen (natürlich mit Unterlichtgeschwindigkeit und jeweils „in die Zukunft hinein“ fahrend), obwohl die unbeschleunigten Weltlinien unendlich lang sind und nicht etwa zyklisch in sich zurücklaufen. Dieses Gödelsche Weltmodell des „rotierenden Kosmos“ zeigt nach Ansicht des Ref. besonders deutlich, daß das Machsche Prinzip in der Einsteinschen Gravitationstheorie bzw. Geometrie (der sog. Allgemeinen Relativitätstheorie) keineswegs erfüllt ist. III. Anschließend antwortet Einstein seinen Kritikern und Kommentatoren. Er geht dabei hauptsächlich auf die mit seiner Gravitationstheorie und der Quantenmechanik zusammenhängenden Grundsatz-Fragen ein. IV. Den Abschluß bildet die vollständige Bibliographie der Einsteinschen Veröffentlichungen (453 an der Zahl) und ein kurzes Register. — Man findet ferner ein gutes Photo-Porträt Albert Einsteins und eine Photo-Aufnahme, die ihn im Gespräch mit dem Herausgeber zeigt. — Der Ref. wünscht dem schönen Buch eine möglichst weite Verbreitung.

G. Süßmann.

Born, Max: *Continuity, determinism and reality.* Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. **30**, Nr. 2, 26 p. (1955).

Die grundlegenden Behauptungen der klassischen und der modernen Mechanik werden an Hand des Einsteinschen Modells (eindimensionaler makrophysikalischer Körper in einem Potentialkasten mit unendlich hohen Wänden) miteinander verglichen. Dazu werden die Lösungen der Bewegungsgleichungen explizit angegeben. Der Verf. spricht der klassischen Mechanik wegen des quasi-ergodischen Charakters der Phasenraumströmung nur einen „schwachen“ Determinismus zu. Als ein Argument wird dabei die Tatsache angeführt, daß keine Messung exakte reelle Zahlen als Anfangswerte liefern kann. Man habe es daher grundsätzlich nur mit statistischen Gesamtheiten zu tun. Gegen Einsteins Realitäts-Postulat wird geltend gemacht, daß die Quantenmechanik — in Übereinstimmung mit der Erfahrung — die Interferenzterme und die Unschärferelation enthält. Die Reduktion der Wellenpakete bei der Messung dagegen sei nicht typisch für die Quantenmechanik, da es sie auch in der klassischen Statistik gibt. Bei Makro-Körpern können die Quanteneffekte lange Zeit vernachlässigbar klein bleiben; auf die Dauer muß man aber mit Widersprüchen gegen die klassischen Vorstellungen rechnen.

G. Süßmann.

Bastin, E. W. and C. W. Kilmister: The concept of order. II. Measurements. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **51**, 454—468 (1955).

From the idea of the continuous development of an investigation, as expressed in the use of indefinitely continuing sequences of procedures, the concept of a measurement together with its result is formulated. The resulting theory is initially very general, but it is possible to restrict it in such a way as to make the construction of a consistent world possible. The physical condition providing the restrictions that make this construction possible is found in the use of the general idea of a test-particle in all fundamental investigations, which is shown to be a use case of the theory-languages of the previous paper (this *Zbl.* **56**, 422). Finally, the theory is applied to the solution of the problem of preferred inertial frames. Zusammenfassg. des Autors.

Dedecker, Paul: Une théorie algébrique des équations approchées. *Bull. Soc. math. France* **83**, 331—364 (1955).

Ce mémoire est une première tentative de construction d'une structure algébrique rendant possible un calcul rigoureux des équations approchées communément utilisées en physique, notamment en météorologie dynamique dans la théorie du mouvement de l'air et de la prévision du temps par intégration des équations du mouvement. Les équations qui régissent les phénomènes physiques ne sont résolubles, eu égard à leur très grande complexité, que moyennant des approximations qui ne satisfont généralement pas le mathématicien. L'A. jette les bases d'une théorie rigoureuse en axiomatisant la notion d'ordre de grandeur sur laquelle se fondent les simplifications usuelles de calcul du physicien. Cette notion est rattachée ici à une filtration et, mathématiquement, l'A. étudie les notions d'anneau filtré et d'anneau gradué associé à un anneau filtré. Son étude n'est pas encore directement applicable à la météorologie dynamique par exemple car on ne sait pas à l'heure actuelle définir des filtrations convenables. Néanmoins, sa théorie, qui devra peut-être subir quelques modifications, semble devoir être apte à rendre de grands services aux physiciens mathématiciens qui veulent étudier les phénomènes réels tout en faisant des calculs mathématiquement irréprochables. *R. Croisot.*

Mechanik:

Pihl, Mogens: From the history of the lever principle. *Nordisk mat. Tidskrift* **3**, 148—156 und engl. Zusammenfassg. 183 (1955) [Dänisch].

A „proof“ of the lever principle is defined as an attempt to reduce this law to still simpler principles, such as the equilibrium of equal weights etc. The article treats the proofs by Archimedes, Euclid, Huygens und Ole Römer. The law of the lever is also applied to the moment of forces, equilibrium on the inclined plane and the determination of the centre of oscillation of a compound pendulum. Engl. Zusammenfassg.

Honnorat, P.: Sur une approximation dans le problème du bipendule. *Publ. sci. Univ. Alger, Sér. A* **1**, 303—306 (1955).

Die von Th. Pöschl in seiner Theorie der Hauptschwingungen hergeleitete Differentialgleichung für die singuläre Lösung (dies. *Zbl.* **46**, 173; **51**, 154) liefert beim Doppelpendel andere Resultate als die Differentialgleichung für die Einhüllende der Schwingungskurven. Bei der Reihenentwicklung unterscheiden sich bereits die ersten nichtlinearen Glieder bei beiden Methoden dem Betrage und sogar dem Vorzeichen nach. *H. Molitz.*

Bradistilov, G.: Die Lage eines dreifachen mathematischen Pendels in einer Ebene bei periodischer Bewegung um die stabile Gleichgewichtslage. *Priklad. Mat. Mech.* **19**, 113—118 (1955) [Russisch].

In einer früheren Arbeit hat der Verf. ein System von n aneinanderhängenden physikalischen Pendeln betrachtet und einige allgemeine Eigenschaften von ebenen Bewegungen eines derartigen Systems untersucht. Jetzt befaßt er sich eingehender mit dem Fall $n = 3$, beschränkt sich aber auf mathematische Pendel. Da dissipative Kräfte nicht berücksichtigt werden, hat die charakteristische Gleichung des Problems nur rein imaginäre Wurzeln. Die Abschätzung der Beträge dieser Wurzeln ermöglicht eine Übersicht über die Lage der 3 Massenpunkte zueinander bei den

drei im System auftretenden periodischen Bewegungen. Die langsamste Schwingung ist gekennzeichnet durch gleiche Vorzeichen der Ausschläge der Massenpunkte, während bei der schnellsten Schwingung die Vorzeichen der Ausschläge abwechseln. Bei der mittleren Schwingung schlagen zwei benachbarte Massenpunkte jeweils nach der gleichen Seite aus, während die Bewegung des dritten Punktes entgegengesetzt ist. Je nach den Verhältnissen der Pendellängen können dabei die oberen oder auch die unteren beiden Massenpunkte gleichförmig schwingen.

K. Magnus.

Roth-Desmeules, Ernst: Zur Berechnung der Geschoßabweichung unter dem Einfluß eines Seitenwindes. *Z. angew. Math. Phys.* 6, 494—497 (1955).

Die Didionsche Formel für die Seitenabweichung eines Geschosses bei Querwind wird i. a. nur auf flache Bahnen beschränkt. Da der wirkliche Luftwiderstandsverlauf im Überschallbereich mit der hier notwendigen Genauigkeit durch ein lineares Widerstandsgesetz angenähert werden kann, gibt die Formel auch bei steilen Bahnen vollkommen ausreichende Werte.

H. Molitz.

Haimovici, Adolf: Contribution à la mécanique du point de masse variable. *Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue math. phys.* 2, 26—32 (1955).

L'A. studia il moto di un corpo P di massa variabile col tempo (per emissione di corpuscoli) e con un parametro q (ad es. la temperatura) funzione del luogo; poichè non introduce alcuna approssimazione, nell'equazione fondamentale compare anche la velocità media v dei corpuscoli emessi. Ricerca dapprima le traiettorie che giacciono sulle superfici q -costante o sono normali ad esse; i risultati sono analoghi a quelli validi nel caso della massa costante. Considera poi il moto di P quando è soggetto ad una forza centrale e con v nel piano della forza e della velocità di P ; dimostra piana la traiettoria di P e ottiene un'integrale che generalizza quello delle aree. Considera infine il caso in cui la traiettoria di P è prossima ad una circonferenza.

D. Graffi.

Sponder, Erich: Eine genäherte Behandlung des schweren symmetrischen Kreisels in nicht-Eulerschen Koordinaten. *Z. angew. Math. Phys.* 6, 462—478 (1955).

Offenbar hat der Verf. keinen Zugang zum Schrifttum der letzten 20 Jahre über Kieselprobleme gehabt, denn er hätte sonst feststellen müssen, daß die von ihm behandelte Aufgabe in allen wichtigen Punkten bereits früher gelöst wurde und zum Teil sogar in den Lehrbüchern zu finden ist. In der Diskussion der Ergebnisse geht er allerdings etwas weiter, als es bei den Vorgängern geschieht. Als nicht-Eulersche Koordinaten verwendet er die bei technischen Kieselrechnungen allgemein üblichen Koordinaten, nämlich die Drehwinkel des Systems um zwei zueinander und zur Figurenachse des Kreisels senkrechte Achsen. In diesen Koordinaten betrachtet er kleine Bewegungen des Kreisels um seine Gleichgewichtslage in den beiden Fällen des Spielkreisels (Schwerpunkt über dem Unterstützungspunkt) und des Kreiselpendels (Schwerpunkt unter dem Unterstützungspunkt). Der Einfluß kleiner, den Drehgeschwindigkeiten proportionaler Dämpfungskräfte wird abgeschätzt.

K. Magnus.

Pestel, E.: Anschauliche Herleitung und Beweis des Baranow-Schaefer-Verfahrens zum Ermitteln der Eigenschwingungszahlen und der Eigenschwingungsformen von Schwingerketten. *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 21, 154—158 (1955).

Die Baranowsche Reduktion einer mit $n + 1$ Drehmassen besetzten Welle auf eine solche von n Massen, deren $n - 1$ Eigenfrequenzen mit den $n - 1$ ersten der ursprünglichen Welle übereinstimmen (mit allen außer ihrer höchsten), wird hier auf mechanischem Wege durch Kopplung der beiden Wellen in den Knotenpunkten der mit ihrer höchsten Frequenz schwingenden ursprünglichen Welle hergeleitet (Kopplung von oben nach unten). Durch eine entsprechende Kopplung, aber jetzt von unten nach oben, wird auch das Zusatzverfahren von Schaefer zur Ermittlung der Schwingungsformen der ursprünglichen Welle auf mechanische Weise gedeutet.

R. Zurmühl.

Longuet-Higgins, H. C.: The vibrations of a stressed framework. Philos. Mag., VII. Ser. 46, 98—100 (1955).

Der Verf. behandelt die Schwingungen eines Systems von Massenpunkten, bei welchem die Massen untereinander durch Federn verbunden sind, speziell für den Fall, daß die Zahl der Federn die Zahl der Freiheitsgrade überschreitet.

H. Bufler.

Aymerich, Giuseppe: Cicli di prima e di seconda specie di un sistema meccanico autosostenuto impulsivamente. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 25, 26—36 (1955).

L'A. s'occupa di sistemi oscillanti ad uno e a due gradi di libertà, autosostenuti impulsivamente, secondo il modello assegnato dal Rocard, avvicinati a problema da Tricomi e da Amerio, riguardante il moto di un pendolo soggetto alla forza di gravità e ad una forza tangenziale costante. Il moto del sistema è definito dalle seguenti condizioni:

- a) $2n\pi < x < 2(n+1)\pi$, $x_{tt} + 2\delta x_t + \omega^2 \sin x = 0$, $\delta = h/m$, $\omega^2 = g/l$, $x = \varphi$,
 (*) b) $\lim_{x \rightarrow 2n\pi(+)} x_t - \lim_{x \rightarrow 2n\pi(-)} x_t = \omega \alpha$, α numero positivo, $n = 0, 1, 2, \dots$

Il sistema così definito posse verificarsi seguenti tipi dei movimenti: 1° un moto oscillatorio con la legge periodica intorno alla posizione $x = 0$ — le soluzioni sono cicli di prima specie (seguendo Minorsky), 2° un moto rivolutivo pure periodico — nel senso che la velocità riprende il medesimo valore ad ogni giro-cicli di seconda specie. Introducendo tempo adimensionale $\omega t = \tau$ il sistema (*) diventa

- a) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -2\lambda y - \sin x$, o, $y' = -2\lambda - y^{-1} \sin x$, $\lambda = \delta/\omega$,
 (**) b) $\lim_{x \rightarrow 2n\pi(+)} y - \lim_{x \rightarrow 2n\pi(-)} y = \alpha$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

L'A. stabilisce dapprima alcune formule relative al moto di punto $P(x, y)$ nel piano (x, y) definito dal sistema (**) esaminando l'andamento delle traiettorie di P nella striscia Σ limitata dalle rette $x = 0$ e $x = 2\pi$. In questa striscia l'equazione (**) ha tre punti singolari (sull'asse x): uno $C(\pi, 0)$ è un colle, gli altri due coincidono con gli estremi O ed O_1 e sono del tipo fuoco ($\lambda < 1$) oppure nodo ($\lambda > 1$). Per $\lambda = 0$ integrale generale è: $\frac{1}{2} y^2 - \cos x = E$, dove $E = \text{cost.}$ (linea isoenergetica). Per $E < -1$ non si hanno i punti reali; per $E = -1$ questi punti reali sono gli estremi O ed O_1 . Per $E = +1$ si hanno le sinusoidi passanti per C (separatrici). Due teoremi sono dimostrati: 1° „Se $\lambda \geq [\alpha + (\alpha^2 + 4\pi)^{1/2}]/4\pi$ esiste uno (ed un solo) ciclo di prima specie, stabile“, e 2° „Se $4\pi\lambda \geq \alpha \geq \pi[\lambda + (1 + \lambda^2)^{1/2}]$ esiste un ciclo di seconda specie“. Le dimostrazioni sono simili. D. Rašković.

Colombo, Giuseppe: Sopra il fenomeno dell'azione asincrona. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 24, 353—395 (1955).

Im Anschluß an die Untersuchungen von Bethenod und Hartley, die in gewissen elektromechanischen Schwingungssystemen von 2 Freiheitsgraden eine asynchrone Erregung von Schwingungen beobachtet haben, beschreibt der Verf. zwei rein mechanische Systeme, die ein entsprechendes Verhalten zeigen. Seine Systeme bestehen im wesentlichen aus zwei linearen gedämpften Schwingern, die sich über eine nichtlineare Kopplung gegenseitig beeinflussen. Der eine der beiden Schwinger wird durch eine sinusförmige Kraft erregt. Im Gegensatz zu Minorsky, der den Bethenod-Effekt durch eine Theorie erster Näherung als einen Parametereffekt erklärt, berechnet der Verf. — allerdings unter gewissen vereinfachenden Annahmen über die Art der Kopplungsfunktion — die in seinen Modellen auftretenden Schwingungen in strenger Weise und zeigt, daß sie stabil sind.

K. Magnus.

Krug, E. K. and O. M. Minina: Über Eigentümlichkeiten der Untersuchung der dynamischen Eigenschaften nicht-linearer Systeme, die ein instabiles Glied enthalten. Avtomat. Telemekh. 16, 536—541 (1955) [Russisch].

Das System besteht aus einem stabilen und einem instabilen Glied, beide von

erster Ordnung, und einem nichtlinearen Glied von Z-förmiger Kennlinie. Die entsprechenden Differentialgleichungen werden in der Phasenebene diskutiert; die Phasenkurven bestehen aus Hyperbelstücken. — Die Behauptung der Verff., daß die Methode der „harmonischen Balance“ hier versage, scheint dem Ref. nicht begründet zu sein; es wird zum Vergleich nur die erste Näherung des Ansatzes der harmonischen Balance herangezogen, während man für eine Stabilitätsaussage doch mindestens die zweite Näherung braucht.

W. Hahn.

Bellman, Richard: Perturbation methods applied to nonlinear dynamics. J. appl. Mech. **22**, 500—502 (1955).

Löst man ein nichtlineares Problem durch einen Störungsansatz, so ist der Konvergenzradius der Lösungsreihen durch die dem Nullpunkt nächstliegende Singularität der nichtlinearen Funktion festgelegt. Der Verf. zeigt nun, daß man den Konvergenzbereich durch eine geschickte Transformation erweitern kann, wenn gewisse Parameter des Systems nur positive (oder negative) Werte annehmen können. Man erreicht so eine einseitige analytische Fortsetzung der Lösung über ihren ursprünglichen Konvergenzbereich hinaus. Am Beispiel der van-der-Polschen Gleichung wird das Verfahren praktisch erläutert.

K. Magnus.

Klotter, Karl: Free oscillations of systems having quadratic damping and arbitrary restoring forces. J. appl. Mech. **22**, 495—499 (1955).

Die allgemeine Bewegungsgleichung autonomer (von der Zeit t nicht beeinflusster) Systeme von einem Freiheitsgrad von der Form $\ddot{q} + \kappa^2 h(\dot{q}, q) = 0$ läßt sich bekanntlich durch Einführen von $V = \dot{q}^2$ auf eine allgemeine Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen V und q transformieren. Wählt man insbesondere diese Gleichung linear, $(*) dV/dq + \varphi(q) V + \psi(q) = 0$ so werden damit Bewegungsgleichungen der Form $\ddot{q} + \frac{1}{2} \varphi(q) \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \psi(q) = 0$, also Schwingungsgleichungen mit quadratischer Dämpfung und beliebigem nichtlinearem Rückstellgesetz $\psi(q)$ erfaßt und somit formelmäßiger Behandlung zugänglich. Insbesondere werden Bewegungsgleichungen der Form $\ddot{q} + \frac{1}{2} \delta(\operatorname{sgn} \dot{q}) \dot{q}^2 + \kappa^2 f(q) = 0$ untersucht. Lösen der entsprechenden linearen Gleichung $(*)$ ergibt

$$V(q) = 2 \kappa^2 e^{\delta q} [N(Q_1) - N(q)] \quad \text{mit} \quad N(q) = \int_0^q e^{-\delta \sigma} f(\sigma) d\sigma$$

für Bewegung von einem Ruhepunkt $q = Q_1$ mit $\dot{q} = 0$ aus bis zum nächsten Ruhepunkt $q = Q_2$. Dieser ergibt sich durch Lösen der transzendenten Gleichung $N(Q_1) = N(Q_2)$, der sogenannten Amplitudenbeziehung. Diese wird nun für eine Reihe formelmäßig erfaßbarer Rückstellgesetze $f(q)$ rechnerisch hergeleitet und graphisch dargestellt, wobei neben der strengen Lösung auch Reihennäherungen angegeben sind. Im einzelnen werden sowohl ungerade symmetrische Rückstellgesetze ($f = \mu^{2n} q^{2n+1}$, $f = q \pm \mu^2 q^3$, $f = \sin q$) als auch allgemeine nichtsymmetrische Gesetze behandelt. Das schon 1914 von v. Mises für lineare Rückstellkraft $f = q$ erhaltene Ergebnis, wiedergegeben in der „Technischen Schwingungslehre“ des Verf. (2. Aufl. S. 130, dies. Zbl. **44**, 387) ist damit auf den allgemeinen Fall nichtlinearer Rückstellkraft $f(q)$ ausgedehnt worden. Die Größe der quadratischen Dämpfung ist keinen Beschränkungen unterworfen.

R. Zurmühl.

Seamans jr., Robert C., Frank A. Barnes, Theodore B. Garber and Vincent W. Howard: Recent developments in aircraft control. J. aeronaut. Sci. **22**, 145—164 (1955).

Nach allgemeinen Betrachtungen über Aufgabe und Struktur von Steuerungs- und Stabilisierungssystemen für Flugzeuge und Flugkörper wird ein Kontrollsystem für die Längsneigung (pitch) analysiert unter besonderer Berücksichtigung der Effekte, die durch Änderungen der statischen Stabilität, durch Rumpfbiegung und durch die Lage von Kreiselementen bewirkt werden. Überdies wird die

Möglichkeit, Böeneffekte möglichst klein zu halten, untersucht. Der mathematische, auf die Laplace-Transformation gestützte Kalkül wird in einem Anhang gebracht.

J. Weissinger.

Koževnikov, S. N. und L. I. Cechnovič: Mechanismen mit vorgegebener relativer Bewegung der beweglichen Gelenke. Trudy Inst. Mašin., Sem. Teor. Mašin. Mechanizmov **14**, Nr. 56, 59—89 (1955) [Russisch].

On the contrary to the conventional classification of the mechanisms (by Assur) in this paper the authors present a new kinematic analysis for the mechanisms with many members, which can be not subjected to the Assur's or Baranoff's classification, in the case when the driver is not coupled with the fixed member. For the determination of the position of the mechanism members, when the plane motion of the two members is known, the following two methods are suggested: 1. the delivering of the link, 2. the interchange of the sticks. The general existence conditions for the rotating arm are given also. The velocities and the accelerations can be determined by means of the solution of the vector equations or using the method of the inversion (the method of „the lied centers of the accelerations“). The kineto-static problems are examined also using the known Joukovsky method of the arm. The geometric procedures are mainly used. The explanation is followed by the several designs.

D. Rašković.

Kazakov, V. P.: Zur Frage über die Bewegung eines Mechanismus unter der Einwirkung vorgegebener Kräfte. Trudy Inst. Mašin., Sem. Teor. Mašin. Mechanizmov **14**, Nr. 56, 90—96 (1955) [Russisch].

The paper considers the cases of the analytic solutions of a mechanism with one degree of freedom and stationary constraints, governed by the differential equation (*) $\ddot{\alpha} F + \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 F'_{\alpha} = Q$, where α is the generalized coordinate and F a function of α , which depends of the geometric dimensions and arrangement of the mass of the mechanism. This equation can be solved by quadratures in the special cases when F is derivative function of α and the generalized force has the form $Q = Q_1 \dot{\alpha}^2 + Q_2 \dot{\alpha}^n$, where Q_i are continuous functions of α or constants and n any integer. By the substitution $\dot{\alpha} = p$ the equation (*) reduces to the linear differential equation. The particular cases when $n=0$; $n=0, Q_1=0$; $n=2$ or $n=1, Q_1=0$ are considered. The obtained results can be extended to other cases of the generalized forces. The procedure is illustrated by an example with a mechanism under hydraulic action.

D. Rašković.

Tamamšev, A. A.: Zur Frage der geometrischen Synthese fünffacher Gelenkmechanismen mit veränderlichen Dimensionen der Gelenke. Trudy Inst. Mašin. Sem. Teor. Mašin. Mechanizmov **14**, Nr. 56, 20—34 (1955) [Russisch].

The frequent case in the practice is to design a lower pair mechanism the arm of which translates the moving plane by means of the several known adjacent positions. The transmission can be executed changing the continuous rotation of the driver member into the motion of the arbitrary point of the known curve (for example, the direction-mechanisms). The solution of this problem by aid of the four members mechanism is possible in the case when the five (for the mechanism with four links) or the four (for the mechanism with the rotating arm) adjacent positions of the movable plane are known. When the several positions are known the author suggests the five-members mechanism with changing members. In this case it is necessary to add the known motion of the driver and the complementary conditions of the constraints. Then the movement-ratio (w) is determined by means of the structural formula $w = 3n - 2p_5 - p_{as} - 3$. Here are: n the number of the bars, p_5 the number of the kinematic pairs of the fifth class (by Assur) and p_a the number of the dynamic conditions of the constraints. The cases when 5, 6, 7 or 8 positions are known, are discussed. It is shown also that these mechanisms can be used in the case when the two linked planes are given. The geometric methods

of the treating are used (namely, the method of the geometric places). The cited bibliography is exclusively in Russian.
D. Rašković.

Elastizität. Plastizität:

Raman, Sir C. V. and K. S. Viswanathan: On the theory of the elasticity of crystals. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **42**, 51—70 (1955).

Die Verff. entwickeln eine phänomenologische Elastizitätstheorie, indem sie die Symmetrie des Spannungs- und Verzerrungstensors aufgeben, im Gegensatz zu der normalen Theorie der Elastizität. Die Zahl der elastischen Konstanten ist dann für allgemeine Kristalle niedrigster Symmetrie 45 (an Stelle von 21 in der normalen Theorie). Das Symmetrieverhalten dieser Konstanten in den verschiedenen Kristallklassen, statische Verformungsprobleme und elastische Wellen werden diskutiert. Ref. scheinen die Annahmen der Verff. aus den folgenden Gründen falsch zu sein: 1. Bei nicht symmetrischem Spannungstensor treten Momente auf, die im Differentiellen unendliche Winkelbeschleunigungen erzeugen würden. Diese Momente werden von den Verff. zwar erwähnt, aber nicht berücksichtigt. 2. Die von den Verff. angegebene Energiedichte ändert sich, wenn man eine kleine Rotation des Kristalls überlagert, was sie aus physikalischen Gründen nicht tun darf. 3. Die Gittertheorie liefert, auch bei beliebigen Mehrkörperkräften, beim Übergang zur elastischen Theorie genau 21 elastische Konstanten, falls man von einem spannungsfreien Kristall ausgeht und die Gleichgewichtsbedingungen richtig berücksichtigt.
G. Leibfried.

● **Herberg, W. und H. Dimitrov:** Festigkeitslehre. II.: Formänderung, Platten, Stabilität, Bruchhypothesen. (Sammlung Götschen Bd. 1145/1145 a.) Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1955. 208 S., 94 Bild., 38 Zahlentafeln. Geh. DM 4,80.

Hu, Hai-Chang: On some variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity. Sci. Sinica **4**, 33—54 (1955).

Verf. faßt die bisherigen Variationsprinzipie, für die er 22 Literaturstellen angibt, unter einheitlichen Gesichtspunkten zusammen. In der Elastizitätstheorie handelt es sich um die Aufstellung solcher Variationsprinzipie, aus denen die Gleichgewichtsbedingungen, die Darstellung der Spannungen als Ableitungen eines Potentials nach den Verzerrungen, die Darstellung der Verzerrungen durch die Verschiebungsableitungen, die Randbedingungen bzw. ein Teil dieser Beziehungen gewonnen werden können, je nachdem die ausführenden Variationen frei oder bedingt sind. Hierfür kommen das Prinzip der sog. verallgemeinerten Formänderungsenergie und der verallgemeinerten potentiellen Energie in Frage. Aus dem letzteren gewinnt Verf. in Anwendung auf die Theorie der Biegung dünner Platten bei starker Auslenkung die Gleichungen von Kármán wieder, in denen als Unbekannte außer der Durchbiegung die Airysche Spannungsfunktion vorkommt. — In der Plastizitätstheorie sind im Bereich infinitesimaler Formänderungen neben den Gleichgewichtsbedingungen und der Fließbedingung die Formänderungsgesetze vom Deformations- oder vom Fließtypus zu betrachten und diese Beziehungen durch die Variation eines Funktionals darzustellen. Auch hier kommen die beiden oben erwähnten Prinzipie in Frage.
R. Moufang.

Egerváry, E.: On the application of the matrix theory to the calculation of chain-bridges. Acta techn. Acad. Sci. Hungar. **11**, 241—255, russ. Zusammenfassg. 255—256, franz. u. deutsche Zusammenfassg. 256 (1955).

Im Gegensatz zur bisherigen Theorie der Kettenbrücken, die kontinuierlich rechnet und damit auf eine Differentialgleichung führt, wird hier die Brücke als ein System von endlich vielen Freiheitsgraden behandelt, wobei die lebenden Lasten an den Enden der Hängestäbe angreifen. Die Verformung des Versteifungsträgers wird mit Hilfe der Clapeyronschen Gleichung ausgedrückt. Damit und mit den Gleichgewichtsbedingungen der Kette erhält man ein lineares Gleichungssystem für die

Verformungen des Versteifungsträgers, woraus sich diese sowie auch die davor abhängigen Biegespannungen durch Auflösen in Matrizenform gewinnen lassen. An Stelle einer hier sehr mühsamen unmittelbaren Matrix-Inversion wird diese mit Hilfe der hier bekannten kanonischen Zerlegung der vorkommenden Matrizen geleistet, was sich im wesentlichen als harmonische Analyse der Lösung auffassen läßt. Die infolge der lebenden Belastung auftretende Spannungszunahme der Kette wird auf iterativem Wege errechnet. Es werden Angaben zur Durchführung auch der numerischen Rechnung gemacht. *R. Zurmühl.*

Boley, B. A. and C. C. Chao: Some solutions of the Timoshenko beam equations. *J. appl. Mech.* **22**, 579—586 (1955).

Ausgehend von Timoschenkos Balkenmodell, das auch Rotationsträgheit und Scherungsdeformation berücksichtigt, werden die Deformationen eines Balkens bei vier Typen transversaler Belastung untersucht. Verf. bedient sich dabei der Methode der Laplace-Transformation und vergleicht die gefundenen Ergebnisse mit dem entsprechenden Ergebnisse nach der Methode von Euler-Bernoulli. Zwei der vier Fälle werden einer numerischen Behandlung unterworfen. *E. Hardtwig.*

Csonka, P.: Die Stabilität des an seinen Enden aufgehängten, an seiner seitlichen Verschiebung gehinderten Balkens. *Acta techn. Acad. Sci. Hungar.* **10**, 31—41 russ., engl. u. franz. Zusammenfassg. 42 (1955).

Langhaar, H. L.: Lateral buckling of asymmetrical beams. *J. appl. Mech.* **22**, 335—336 (1955).

A simplified theory of lateral buckling of asymmetrical beams under the action of uniform bending moments and axial thrusts is developed. *Zusammenfassg. des Autors.*

Abbassi, M. M.: Torsion of circular shafts of variable diameter. *J. appl. Mech.* **22**, 530—532 (1955).

Die Spannungsfunktion ψ für das Torsionsproblem einer Welle von veränderlichem Durchmesser läßt sich mit Hilfe der zugeordneten Legendrefunktionen darstellen. Die Reihe für ψ kann i. a. jedoch nur Legendrefunktionen zweiter Ordnung von dem ersten Art enthalten, da sich mit den Funktionen zweiter Art die üblichen Randbedingungen nicht erfüllen lassen. Es werden verschiedene mögliche Formen für die Meridiankurve einer solchen Welle diskutiert, wie sie sich durch spezielle Wahl der Koeffizienten in der Reihe für ψ ergeben. *F. Reutter.*

Saito, Hideo: Torsion of a circular shaft press-fitted with a disk. *Z. angew. Math. Phys.* **6**, 498—503 (1955).

For a shaft of varying circular cross-section under the action of torsion, it is shown that the displacement of any point is directed at right angles to the axial plane passing through the point [see S. Timoshenko, *Theory of Elasticity*, New York 1934, p. 272]. If this displacement is denoted by v and if polar coordinates (r, θ, z) are used, the z -axis being the axis of the shaft, the stress distribution in the shaft is determined by the solution of the partial differential equation

$$(1) \quad \partial^2 v / \partial z^2 + r^{-1} \partial v / \partial z - v / r^2 + \partial^2 v / \partial r^2 = 0$$

and the stresses are given by (2) $\tau_{\theta z} = G \partial v / \partial z$, $\tau_{r\theta} = G r \partial(v r^{-1}) / \partial r$, where G is the modulus of rigidity. In this paper the torsional problem of a circular shaft pressfitted with a disc or a wheel is discussed. In order to simplify the analysis, the author proceeds with his calculations assuming that a slip does not occur on the contact surface between the shaft and the disc and that at a large distance from the disc the stress in the shaft becomes a state of pure stress and its moment is constant. Some numerical results are given, also some diagrams showing the distribution of $\tau_{\theta z}$ and $\tau_{r\theta}$ in the shaft. [There are some disturbing misprints in the paper, e. g. in Eq. (1). Reviewer's remark.] *R. Gran Olsson.*

Hui, E.: Knickung verwundener Stäbe unter Druck. *Österreich. Ingenieur-Arch.* **9**, 288—319 (1955).

Für fünf verschiedene Arten starrer und reibungsfreier Lagerung eines verwundenen Stabes an den Enden werden die Knicklast und die elastische Linie beim Knickbeginn berechnet (Fall 1: beidseitig eingespannt, Fall 2: einseitig eingespannt, am anderen Ende aufgelagert, Fall 3: einseitig eingespannt, Fall 4: einseitig gelenkig gelagert, Fall 5: beidseitig gelenkig gelagert). Unter Anwendung der Eulerschen Gleichgewichtsmethode und Linearisierung des Problems erhält man zunächst sechs lineare Differentialgleichungen für je zwei Momente, Kräfte und Translationsgeschwindigkeiten, aus denen man die Momente eliminieren und die Kräfte bestimmen kann, so daß ein System von zwei linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung in den Geschwindigkeitskomponenten mit sechs Randbedingungen resultiert. Die numerische Lösung des Eigenwertproblems wird ausführlich behandelt. Die Maßzahl $k = \mu \tau^2 / \eta \pi^2$ für die Knicklast, bezogen auf die zugehörige Eulersche Knicklast, ist ein Maß für den Einfluß der Verwindung τ auf die Knicklast; hier ist $\mu = D/\alpha \omega_0^2$, wo α die Biegesteifigkeit, D die Druckkraft, ω_0 den im unbelasteten Zustand auf die Längeneinheit bezogenen Verwindungswinkel bezeichnet. Für die Fälle 1—5 nimmt η die Werte 4; 1; 0,25; 2,046; 1 an. Für große Verwindung ist in allen Fällen $k = 2\kappa/(1 - \kappa)$, wo κ das Verhältnis der beiden Hauptträgheitsmomente des Querschnitts bedeutet. Schaubilder zeigen den Verlauf der Knicklast k als Funktion der Verwindung $0 < \tau < 720^\circ$ für die Schlankheitsgrade $\kappa = 2, 5, \infty$, für Fall 5 sogar bis zur 4. kritischen Last. Die elastische Linie wird im Fall 2 explizit berechnet und für $k = 5$, $\tau = 450^\circ$ beim Beginn der Knickung für die Knicklast und die 2. kritische Last dargestellt. Frühere Ergebnisse zum Fall 3, die Lüscher [Schweiz. Bauz. 7, 172 (1953)] mitgeteilt hat, werden als falsch bezeichnet. *J. Pretsch.*

Beck, M.: Knickung gerader Stäbe durch Druck und konservative Torsion. Ingenieur-Archiv 23, 231—253 (1955).

Der Verf. stellt zunächst die Differentialgleichung der elastischen Linie für einen schlanken, geraden Stab auf, der durch eine axiale Druckkraft und ein konservatives Torsionsmoment beansprucht wird. Daraus leitet er die allgemeine Lösung für zwei spezielle Fälle (Torsionsbeanspruchung bei zwei verschiedenen Biegesteifigkeiten; Torsions- und Druckbeanspruchung bei gleichen Biegesteifigkeiten) ab. Aus den Randbedingungen (es werden 5 Lagerungsarten behandelt) werden dann die Knickgleichungen ermittelt und diskutiert. Schließlich erfolgt für einige einfache Fälle die Berechnung der elastischen Linie des ausgeknickten Stabes. *H. Bufler.*

Clark, L. G.: Buckling of laminated columns. J. appl. Mech. 22, 553—556 (1955).

A paper is developed to determine the buckling of laminated columns composed of two or more laminations and riveted or fixed together at certain points along the column. The laminations may be of different size and material but must be long in comparison to the cross-sectional dimensions. The final results are represented in a form suitable for easy application. In the paper is shown that for two laminations joined at an infinite number of points the problem reduces to that of a simple column. Two pinned end columns were tested and the results seem to be in satisfactory agreement with the theory. *R. Gran Olsson.*

Gulkanjan, N. O.: Über das Zentrum der Verbiegung prismatischer Stäbe mit Querschnitten in Form eines gleichschenkligen Trapezes und eines gleichschenkligen Dreiecks. Akad. Nauk Armajan. SSR, Izvestija, Ser. fis-mat. estestv. techn. Nauk 8, Nr. 5, 29—39 (1955) [Russisch].

The positions of the flexural centre are determined for different top angles applying Trefftz's method of the weakening of boundary conditions. The comparison with already known results which were obtained by means of variational calculus (so that approximations from below and from above are given) shows that the error is less than 0,35%. *D. Radenković.*

Kornišin, M. S. und Ch. M. Muštari: Die Stabilität eines unendlich langen geneigten zylindrischen Paneels unter der Wirkung eines gleichmäßigen Normaldrucks. *Izvestija Kazansk. Fil. Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz-mat. techn. Nauk* Nr. 7, 36—56 (1955) [Russisch].

Csellár, Ö. et E. Éliás: Voilement des plaques minces en cas d'une courbure initiale. *Acta techn. Acad. Sci. Hungar.* 11, 289—314, russ. Zusammenfassg. 314—315 engl. u. deutsche Zusammenfassg. 315 (1955).

Contri, Lorenzo: Delle lastre e travi-parete rettangolari di spessore variabile. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 24, 346—352 (1955).

Verf., der schon in früheren Arbeiten [*Ist. Veneto Sci. Lett. Arti, Atti, Cl. Sci. mat. natur.* 111, 183—195 (1952—53); *Giorn. del Genio Civile* 93, 136—142 (1955)] die rechteckige Platte mit in Richtung eines Paares von Seiten linear veränderlicher Dicke betrachtet hat, untersucht jetzt den Fall, daß die Dicke der Platte oder auch einer Scheibe in Richtung eines Paares von Seiten wie eine beliebige reelle Potenz der betreffenden Koordinate variiert. Unter passend gewählten Randbedingungen werden Integrale der Platten- bzw. Scheibengleichung mit Hilfe konfluenter hypergeometrischer Funktionen bestimmt. M. J. De Schwarz.

Bibhuti Bhusan Cafen: Some problems of plane wedges of non isotropic material. *Z. angew. Math. Mech.* 35, 65—66 (1955).

Es wird erst ein allgemeiner Ausdruck für die Spannungsfunktion einer Scheibe aus anisotropem Material (Holz) abgeleitet; sodann werden zwei Belastungsfälle eines einseitig eingespannten Keils (an der Spitze angreifende Einzellast; gleichmäßig verteilte Belastung längs einer Seite) diskutiert. H. Bufler.

Tersenov, S. A.: Über das asymptotische Verhalten der Eigenwerte und Eigenfunktionen der Schwingung dünner flacher Schalen. *Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskij SSR* 16, 583—589 (1955) [Russisch].

Mit Hilfe einer von Carleman angegebenen Methode werden im Anschluß an zwei frühere Arbeiten des Verf. asymptotische Formeln für Eigenwerte und Eigenfunktionen für das Gleichungssystem der stationären Schwingungen dünner Schalen abgeleitet. Durch Abschätzung der für die betrachteten Randbedingungen existierenden Greenschen Funktion werden Reihenentwicklungen gewonnen, aus denen die Eigenwerte ermittelt werden können. Bei den Berechnungen wird der Einfluß der Trägheitskräfte berücksichtigt. Würde man sie vernachlässigen, so entstände ein Fehler, der größer als 10% aber kleiner als 16% wäre. K. Magnus.

Alfutov, N. A.: Über einen Fall des mit Momenten versehenen vorkritischen Zustandes eines zylindrischen Schale. *Priklad. Mat. Mech.* 19, 249—250 (1955) [Russisch].

Es wird der Einfluß der Vorspannung auf die kritische Belastung einer kreis-zylindrischen Schale berechnet. Die Vorspannung sei dadurch entstanden, daß die Schale in elastischer Weise aus einem Teilstück zusammengebogen wurde, das im ungespannten Zustand einen anderen Krümmungsradius als die Schale selbst besitzt. Die Rechnung wird nach der energetischen Methode durchgeführt. Aus dem Ausdruck für die Gesamtenergie, die sich aus der Formänderungsarbeit und dem Potential der äußeren Kräfte zusammensetzt, wird durch Aufsuchen des Minimums dieser Energie bezüglich eines noch freien dimensionslosen Parameters im Ansatz für die Verschiebungen eine Beziehung für die kritische Radiallast der Schale gewonnen. Für eine aus einem nicht gekrümmten Teil zusammengebogene Zylinderschale ergibt sich für die erste kritische Radiallast ein Wert, der $5/4$ des Wertes beträgt, der für die unvorgespannte Schale gilt. K. Magnus.

Ambarcumjan, S. A.: Berechnung einer symmetrisch belasteten, kreis-zylindrischen Schale, die durch Längsrippen gestützt ist. *Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady* 21, 157—162 (1955) [Russisch].

Es werden die Verformungen einer kreis-zylindrischen Schale betrachtet, die

im Innern durch Rippen von rechteckigem Querschnitt versteift ist. Bei symmetrischer äußerer Belastung genügt es, ein zwischen zwei Rippen befindliches Feld der Schale zu untersuchen. Die Berechnung wird nach einem nicht näher beschriebenen Verfahren von Novožilov durchgeführt und führt auf die Lösung einer Randwertaufgabe für eine Differentialgleichung 4. Ordnung. Von dem Reihenansatz der Lösung werden nur die ersten Glieder mitgenommen, und die darin vorkommenden Integrationskonstanten bestimmt. Der Verfasser betont, daß die Berechnung auch mit den genauen Ausgangsgleichungen durchgeführt werden kann. Die Lösung kann für den Fall einer in Achsrichtung veränderlichen Belastung erweitert werden.

K. Magnus.

Isanbaeva, F. S.: Bestimmung der kritischen unteren Belastung einer zylindrischen Schale bei allseitiger Kompression. Izvestija Kazansk. Fil. Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz.-mat. tech. Nauk Nr. 7, 51—58 (1955) [Russisch].

Hoff, N. J.: Thin circular conical shells under arbitrary loads. J. appl. Mech. 22, 557—562 (1955).

Equations defining the displacements of the median surface of a conical shell under arbitrary loads are developed. In their derivation only the essential parts of the strain energy are considered and three simultaneous partial differential equations are obtained through the use of the variational calculus. When the minimum radius of curvature of the median surface of the cone is made to approach a constant value, the cone goes over into a cylinder. At the same time the equations here developed for the cone are transformed into the Donnell equations of the theory of cylindrical shells. It is shown how eigenfunctions of the homogeneous equations can be constructed and how particular solutions can be found for any arbitrary loading. (From author's summary).

D. Radenković.

Rüdiger, D.: Dehnungsspannungen und Verschiebungen der Konoidschalen. Österreich. Ingenieur-Arch. 9, 37—44 (1955).

In der Arbeit werden für die Konoid-Schale (diese entsteht durch Rückung einer Geraden längs einer beliebigen Randfunktion und einer Koordinatenachse) mit rechteckigem Grundriß die Dehnungsspannungen und zugehörigen Verschiebungen bei Randbelastung und einer Flächenbelastung berechnet. Die Differentialgleichungen des Problems werden dabei aus der allgemeinen Schalentheorie von H. Neuber entwickelt.

H. Bufler.

Csonka, P.: Results on shells of translation. Acta techn. Acad. Sci. Hungar. 10, 59—70, russ. Zusammenfassg. 70—71 und franz. u. deutsche Zusammenfassg. 71 (1955).

Die Berechnung der Translationsschalen ist im allgemeinen bekanntlich sehr unbequem, und diese Tatsache erklärt, warum diese Schalen bis jetzt wenig Verwendung gefunden haben trotz ihrer wirtschaftlich und konstruktiv günstigen Form. Der Zweck dieser Arbeit besteht im Nachweis, daß die mit der Berechnung solcher Schalen verbundenen Schwierigkeiten durch geeignete Wahl der erzeugenden Kurven eliminiert werden können. Die Erkenntnis und der Nachweis dieser Tatsache mögen wesentlich zur häufigeren Verwendung dieser Schalen beitragen, deren Form und Belastung in bezug auf zwei zueinander senkrecht stehende, lotrechte Ebenen symmetrisch angenommen wird. — Es wird nachgewiesen, daß die Berechnung dieser Schalen durch geeignete Wahl der Schalenform wesentlich vereinfacht werden kann. Eine Bedingung für die Anwendbarkeit der entwickelten Methode ist, daß die auf die Schale wirkende Belastung lotrecht angreift und sich in zwei Komponenten zerlegen läßt, deren eine sich durch eine rationale Funktion der x -Koordinate und deren andere sich durch eine rationale ganze Funktion der y -Koordinate darstellen lassen. Die Berechnung vereinfacht sich besonders dann, wenn die auf die rechteckige Grundrißfläche bezogene Belastung gleichmäßig verteilt oder bei zunehmender Entfernung von den Symmetrieebenen quadratisch veränderlich vorkommt, für welche

Fälle gebrauchsfertige Formeln abgeleitet sind. Es wird ein Zahlenbeispiel durchgeführt, das die Zweckmäßigkeit und einfache Anwendbarkeit der vorgeschlagenen Methode veranschaulichen soll. (Vgl. auch die folgenden Referate.)

R. Gran Olsson.

Csonka, P.: Special kind of shells of translation with two vertical planes of symmetry. Acta techn. Acad. Sci. Hungar. **11**, 231—239, russ. und franz. Zusammenfassg. 239, deutsche Zusammenfassg. 240 (1955).

In einer früheren Arbeit (s. vorstehendes Referat) untersuchte Verf. Translationsschalen über rechteckigen Grundrissen, wobei Form und Belastung der Schalen in bezug auf zwei vertikale Ebenen symmetrisch vorausgesetzt sind. Als Ergebnis wurde festgestellt, daß die sonst sehr mühsame Berechnung der Membrankräfte im allgemeinen erheblich vereinfacht werden kann durch geeignete Annahmen über die die Schale erzeugenden Kurven. Die Berechnung kann besonders vereinfacht werden, wenn die Schale gleichmäßig verteilt und vertikal belastet wird, und in diesem Fall kann die Form der Schale ebenfalls durch eine Funktion dargestellt werden. — In der vorliegenden Arbeit wird auf die oben erwähnte besondere Eigenschaft der Schalen Bezug genommen. Der Zweck der Untersuchung liegt im Nachweis, daß die Ermittlung der Membrankräfte der betrachteten Schalenformen nicht nur im Fall gleichmäßig verteilter, lotrechter Lasten sehr einfach ist, sondern auch im Fall anders verteilter Vertikallasten, die in den technischen Anwendungen häufig vorkommen können. Die Belastung der Schale wird durch ein Polynom ausgedrückt, dessen einzelne Glieder die Gestalt $c_{i,k} \xi^{2i} \eta^{2k}$ haben ($\xi = x/a$, $\eta = y/b$, a und b die Spannweiten der Schale in x - bzw. y -Richtung). Es wird nachgewiesen, daß die zur Schale gehörige Spannungsfunktion als eine endliche Reihe geschrieben werden kann, deren einzelne Glieder $d_{i,k} (1 - \xi^2)^{\xi^{2i}} (1 - \eta^2)^{\eta^{2k}}$ sind, wobei die Beiwerte $d_{i,k}$ nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten ermittelt werden. Die praktische Anwendung der Verfahren wird an Hand eines Zahlenbeispiels eingehend erläutert.

R. Gran Olsson.

Csonka, P.: Calculation of calotte shells over rectangular bases. Acta techn. Acad. Sci. Hungar. **11**, 427—439, russ. u. franz. Zusammenfassg. 439 u. deutsche Zusammenfassg. 440 (1955).

Die Berechnung von Kugelkalott-Schalen über rechteckigen Grundrissen begegnet im allgemeinen beträchtlichen Schwierigkeiten [s. z. B. A. Aas-Jakobsen Abh. Internat. Ver. Brückenbau **5**, 1—17 (1937/38); J. Menyhard, Editions Institut for Postgraduate Training **19**, Budapest 1942; K. Szmodits, Hungarian Acad. Sci. Budapest 1953]. Wegen der rechnerischen Schwierigkeiten finden diese gewölbten Konstruktionen, obwohl sie vom praktischen Standpunkt sehr vorteilhaft sind, in neuzeitlichen bewehrten Betonkonstruktionen selten Verwendung. — Die vorliegende Arbeit veranschaulicht ein Verfahren, das die Berechnung der Schale von der Gestalt einer Kugelkalotte über rechteckigem Grundriß erheblich vereinfacht. Bei der Berechnung wird angenommen, daß die Randglieder den seitlichen Kräften keinem Widerstand entgegensetzen. Die Spannungsfunktion des Problems wird durch eine Reihe angenähert, deren Glieder von der Form $k_i F_i^+$ sind, wo die Werte k_i Konstanten und F_i^+ Funktionen bezeichnen, die den Randbedingungen des Problems angepaßt sind. Die Beiwerte k_i werden so festgelegt, daß das der angenäherten Spannungsfunktion $F^+ = \sum_i k_i F_i^+$ entsprechende Lastsystem Z^+ dem wirklichen Lastsystem Z möglichst entspricht. — Es wird ferner der Fall einer Kugelkalotte über quadratischem Grundriß untersucht, die durch gleichmäßig verteilte, lotrechte Lasten beansprucht wird, und nachgewiesen, daß die bei der Näherungsrechnung entstehende Abweichung bereits bei einer nur zwei Glieder enthaltenden Reihe so geringfügig ist, daß der Fehler vernachlässigt werden kann. Bei günstigen Ver-

hältnissen der Abmessungen und Belastung der Schale beträgt der mittlere, quadratische Fehler insgesamt nur 0,7 %.

R. Gran Olsson.

Csonka, P.: Calotte shell over rectangular base. Acta techn. Acad. Sci. Hungar. 13, 149—162, russ. Zusammenfassg. 162—163, franz. Zusammenfassg. 163 u. deutsche Zusammenfassg. 163—164 (1955).

In dieser Arbeit werden Schalen von der Form einer Kugelkalotte über einem rechteckigen Grundriß untersucht, bei denen die den Seiten des rechteckigen Grundrisses parallelen senkrechten Schnitte der Mittelfläche Parabeln zweiten Grades mit senkrechter Achse sind. Bei der Schale wird die Belastung ebenfalls symmetrisch in bezug auf die genannten senkrechten Ebenen der Symmetrie angenommen. Das Ziel der Arbeit ist wieder die Berechnung der Membrankräfte der so belasteten Schale. — Zur Lösung des Problems wird eine Spannungsfunktion $F^+(\xi, \eta)$ eingeführt, die an den Rändern der Schale, d. h. längs der Randlinien $\xi = \pm 1$, $\eta = \pm 1$ den Wert Null hat, also

$$F^+(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \sum_{i=0}^{i=m} \sum_{k=0}^{k=n} B_{i,k} \xi^{2i} \eta^{2k}.$$

Die in diesem Ausdruck vorkommenden Beiwerte $B_{i,k}$ werden durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten, und zwar in der Weise festgelegt, daß das der Spannungsfunktion $F^+(\xi, \eta)$ entsprechende Lastsystem $Z^+(\xi, \eta)$ an gewissen vorgeschriebenen Punkten, möglicherweise am ganzen Umfang der Schale mit dem wirklichen Lastsystem $Z(\xi, \eta)$ genau übereinstimmt. Die Diskussion der Aufgabe wird durch ein ausführliches Zahlenbeispiel abgeschlossen, wobei ein Vergleich zwischen den in dieser Arbeit vorkommenden, genaueren und in den früheren Arbeit gegebenen Resultaten (s. zweitvorhergehendes Referat) durchgeführt wird. (Vgl. auch die vorstehenden Referate.)

R. Gran Olsson.

Weibel, Erich S.: The strains and the energy in thin elastic shells of arbitrary shape for arbitrary deformation. Z. angew. Math. Phys. 6, 153—189 (1955).

Der erste Teil der Arbeit bringt die Entwicklung der Theorie. Für beliebig geformte dünnwandige Schalen werden auf rein analytischem Wege die kinetische und potentielle Energie als Funktion eines beliebigen Verschiebungsfeldes abgeleitet. Der zweite Teil zeigt an Hand von drei Beispielen (Platte in schiefwinkligen Koordinaten, Zylinderschale, schraubenflächige Schale) die Anwendung der Theorie. Insbesondere wird auf die schraubenflächige Schale eingegangen, für welche die tiefste Eigenfrequenz in Abhängigkeit von der Verwindung bei vorgegebenen Abmessungen und Randbedingungen numerisch nach dem Näherungsverfahren von Rayleigh-Ritz ermittelt wird.

H. Buefler.

Verma, Ghasi Ram: Application of Dirac's δ -function in isolated-force problems of the theory of elasticity. I. Indian J. theor. Phys. 2, 167—174 (1955).

In this paper problems of isolated forces acting on the straight boundary of a semi-infinite plate, composed of isotropic or nonisotropic material, have been solved by using Dirac's δ -function. The method is found very useful specially when there are a large number of forces acting on the boundary.

Aus der Zusammenfassung des Autors.

Abramjan, B. L.: Über einen Fall des ebenen Problems der Elastizitätstheorie für ein Rechteck. Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady 21, 193—198 (1955) [Russisch].

When Airy's stress-function is expressed as a sum of multiples of trigonometric and hyperbolic functions, the latter are often developed in Fourier series in order to fulfill the boundary conditions. This reduces the problem to the solution of infinite systems of linear algebraic equations. In this paper such equations are neatly written down for the case of symmetrical loading. The author, while analysing the obtained system, shows that it is regular and that free terms are of the order λ/m , which makes possible the effective solution.

D. Radenković.

Radok, J. R. M.: Problems of plane elasticity for reinforced boundaries. J. appl. Mech. 22, 249—254 (1955).

Die gelochte Scheibe als ebenes Problem ist von N. J. Muskhelishvili (dies. Zbl. 52, 414) mit der Methode der komplexen Funktionen behandelt worden; sie ist in allen Fällen anwendbar, in denen ein Loch streng oder angenähert auf den Einheitskreis konform abbildbar ist. Verf. wendet diese Methode an auf den Fall, daß der Lochrand durchgehend verstärkt ist, wobei vorausgesetzt wird, daß die Versteifung aus dem Material der Scheibe besteht, biegeschlaff ist und nur Ringspannungen aufnehmen kann. Aus elementaren Gleichgewichtsbetrachtungen bez. der am Element des Versteifungsringes angreifenden Kräfte folgt für die Normalkomponente N und die Tangentialkomponente T der Spannungen am Lochrand, vermindert um die entsprechenden Komponenten der am Versteifungsring angreifenden äußeren Belastung, eine Darstellung durch die Tangentialspannung am Lochrand, die Krümmung, den Querschnitt des Versteifungsringes und die Ableitungen dieser Größen nach der Bogenlänge. Der sich so im Falle des kreisförmigen Loches ergebende Ausdruck für $N - iT$ ist in komplexer Schreibweise komplizierter als der von Muskhelishvili bei unversteiftem Lochrand angegebene. Für die numerische Lösung des Problems macht Verf. für $N - iT$ den üblichen Ansatz einer komplexen Fourierreihe, für die beiden das Problem bestimmenden analytischen Funktionen den Ansatz einer Laurentreihe um $z = 0$ und nimmt Koeffizientenvergleichen vor. Die erhaltenen numerischen Werte stimmen mit dem Experiment nicht schlechter überein als die Ergebnisse von H. Reissner und M. Morduchow [NACA TN 1852, (April 1949)], in denen die Biegesteifigkeit der Versteifung mitberücksichtigt ist.

R. Moufang.

Rostovcev, N. A.: Zum Problem der Torsion eines elastischen Halbraumes. Priklad. Mat. Mech. 19, 55—60 (1955) [Russisch].

The author gives a solution of the problem of the (axially symmetric) distribution of displacements and stresses in the elastic half space to which a circular punch submitted to the torque is bounded rigidly or by means of friction. Starting from Lamé's equations, the required tangential displacement is expressed in the form $v = \operatorname{Re} \int_0^a g(s) \chi(r, z, s) ds$. Here χ is a function defined by means of a Lipschitz-Hankel's complex integral, and the auxiliary function $g(s)$ has to be found from the boundary conditions. An Abelian integral equation determines $g(s)$ up to an additive part consisting of Dirac's δ -function multiplied by the constant of integration.

D. Radenković.

Blaise, P.: Sur la résolution numérique du problème de la torsion des prismes multicellulaires à parois minces. Acta techn. Acad. Sci. Hungar. 12, 327—331, russ., engl. u. deutsche Zusammenfassg. 332 (1955).

Weiterführung einer Arbeit desselben Verf. über die Verdrehung dünnwandiger vielzelliger Prismen [M. P. Blaise, Ann. Ponts et Chaussées 122, 601—611 (1952)]. Nach dieser Arbeit ergibt sich für die Bestimmung der Torsion ein lineares Gleichungssystem mit so vielen Gliedern, als das Prisma Zellen hat, vermehrt um Eins. Danach möchte es scheinen, als ob mit zunehmender Anzahl der Zellen sich die Schwierigkeiten bei der Lösung des Gleichungssystems häufen würden. Verf. führt ein konvergentes Iterationsverfahren vor, mit dessen Hilfe die Lösung des Gleichungssystems mit beliebiger Genauigkeit approximiert werden kann. Die Konvergenz entspricht etwa der einer geometrischen Reihe, sie ist besonders stark dann, wenn bestimmte Innenwände sehr dünn sind im Vergleich zu den andern. Ein Zahlenbeispiel läßt die Einzelheiten der Rechnung erkennen.

E. Hardtwig.

Barta, J.: Sur l'estimation de la rigidité de torsion des prismes multicellulaires à parois minces. Acta techn. Acad. Sci. Hungar. 12, 333—337, russ. Zusammenfassg. 337, engl. u. deutsche Zusammenfassg. 338 (1955).

Die Verdrehung dünnwandiger, vielzelliger Prismen ist von M. P. Blaise studiert worden [Ann. Ponts et Chaussées 122, 601—611 (1952)]. Gestützt auf diese

Arbeit, leitet Verf. obere und untere Schranken für die Verdrehungssteifigkeit obgenannter Prismen ab. Er geht dabei von einer Doppelungleichung aus, die sich aus der Analogie mit der Verdrehungstheorie hohler Prismen ergibt. Die Doppelungleichung kann mit einem Iterationsverfahren verbunden werden. Ein Zahlenbeispiel soll die vorgeschlagene Methode erläutern. *E. Hardtwig.*

Csonka, P.: *La torsion des prismes multicellulaires en treillis.* Acta techn. Acad. Sci. Hungar. **12**, 339—350, russ., engl. u. deutsche Zusammenfassg. 350 (1955).

Raumfachwerke, deren Seitenflächen parallel sind zur Prismenachse und die parallele Gurte aufweisen, während die Endflächen senkrecht zur Prismenachse angeordnet sind, heißen mehrzellige, prismatische Fachwerke. Sie stehen in weitgehender geometrischer und physikalischer Analogie zu den mehrzelligen, dünnwandigen, prismatischen Faltwerken, deren Theorie bereits bekannt ist. Das Verhalten der Kräfte bei Belastung ist in beiden Systemen weitgehend analog. Daher lassen sich die Innenkräfte der auf Verdrehung beanspruchten Fachwerke in derselben Weise berechnen, wie die Innenkräfte bei den mehrzelligen, prismatischen Faltwerken und gleicher Belastung. *E. Hardtwig.*

Hieke, Max: *Über ein ebenes Distorsionsproblem.* Z. angew. Math. Mech. **35**, 54—62 (1955).

Für einen schlanken Kreiszylinder werden zunächst diejenigen Spannungen berechnet, welche durch eine spezielle unstetige Dichteänderung (konstante Temperatur in einem Kreisabschnitt; der Fall konstanter Temperatur in einem Kreissektor wurde früher schon behandelt) entstehen. Dabei wird für die diskontinuierliche Temperaturfunktion mittels des Integralsatzes von Dirichlet ein Ansatz gemacht. Schließlich wird auf die grundsätzliche Möglichkeit der Behandlung stetig differenzierbarer Dichteänderungen eingegangen. *H. Bujler.*

Jindra, F.: *Reine ebene Biegung bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz.* Ingenieur-Arch. **23**, 373—378 (1955).

Verf. wendet das nichtlineare Elastizitätsgesetz (dies. Zbl. **55**, 180) mit der Spezialisierung der Schub- und Kompressionsfunktion auf die ersten Glieder ihrer Reihenentwicklung an auf die reine Biegung eines Rechteckstreifens, unter der Annahme, daß wie in der linearen Theorie nur die Normalspannungen $\sigma_x(y)$ in Richtung der Stabachse von Null verschieden ist. Die zugehörige Airysche Spannungsfunktion läßt sich in geschlossener Form angeben. $\sigma_x(y)$ wird erhalten durch Lösung einer kubischen Gleichung. Ein Schaubild zeigt die Abweichung von $\sigma_x(y)$ vom linearen Fall längs der y -Achse. Die reine Biegung des Kreisringsektors läßt nur eine angenäherte Lösung zu. Für die Airysche Spannungsfunktion $F(r)$ ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung 4. Ordnung, zu deren Behandlung das Verfahren von Galerkin in etwas modifizierter Form herangezogen wird. Für das vom Verf. durchgerechnete Beispiel ist bezüglich σ_r die Abweichung vom linearen Fall vernachlässigbar, für σ_θ findet am Innenrand des Kreisringsektors ein merklicher Abbau gegenüber der linearen Theorie statt. *R. Moufang.*

Scott, E. J. and D. R. Carver: *On the nonlinear differential equation for beam deflection* $EJ d^2y/dx^2 = M(x) [1 + (dy/dx)^2]^{3/2}$. J. appl. Mech. **22**, 245—248 (1955).

In der Differentialgleichung $EJ y'' = M(x) \{1 + y'^2\}^{3/2}$ wird die rechte Seite formal in eine binomische Reihe entwickelt und die Differentialgleichung formal durch den Ansatz $y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n y_n(x)$ gelöst, in dem nach erfolgter Koeffizientenvergleich nachträglich $\lambda = 1$ gesetzt wird. So ergibt sich für y' formal eine Potenzreihe in Y_1 mit numerischen Koeffizienten, wo Y_1 bestimmt ist aus $dY_1/dx = M(x)/EJ$. Vorbehaltlich der in Arbeit nicht durchgeführten Konvergenzuntersuchungen wird das Verfahren zur Berechnung der Durchbiegung als praktisch nützlich erachtet in Belastungsfällen mit vertikalem Lastangriff und vertikalen

Reaktionskräften bei bekanntem $M(x)$. Verf. führt dies durch für den in der Mitte durch eine Einzelkraft belasteten aufliegenden bzw. zweiseitig eingespannten Balken, den Konsolträger, der am freien Ende durch eine Normalkraft bzw. durch ein Moment belastet ist.

R. Moufang.

Gorgidze, A. Ja.: Über sekundäre Effekte bei der Aufgabe der Verbiegung eines prismatischen Balkens durch eine Querkraft. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 16, 665—672 (1955) [Russisch].

The author discusses the nonlinear problem of the bending of a cantilever with arbitrary nonhomogeneous cross-section under a transversal load at the free end. Finite displacements are considered, namely it is taken that when they are developed in power series with respect to the loading, the members of second order have to be taken into account. Applying Hooke's law for finite deformation, the displacements and stresses are expressed by means of certain number of functions, which can be determined from given differential equations and corresponding boundary conditions. Solutions of special cases, as illustrative examples are not given.

D. Radenković.

Adkins, J. E. and R. S. Rivlin: Large elastic deformations of isotropic materials. X. Reinforcement by inextensible cords. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 248, 201—223 (1955).

In früheren Arbeiten dieser Reihe war vor allem von Rivlin (s. dies. Zbl. 48, 182) eine Theorie großer elastischer Deformationen entwickelt worden, die auf isotrop und inkompressibel angenommene gummiähnliche Stoffe anwendbar ist. Wenn der elastische Stoff mit Fäden verstärkt wird (Druckreifen, Feuerschläuche), um die Deformation in gewissen Richtungen zu begrenzen und die Festigkeit im ganzen zu erhöhen, so müssen bei der theoretischen Behandlung diese Fäden dünn, biegsam, undehnbar und dicht zusammenliegend vorausgesetzt werden, so daß sie dünne biegsame Flächen im elastischen Körper bilden, welche in gewissen Richtungen undehnbar sind. Das Gleichgewicht jeder Fadenschicht unter dem Einfluß des benachbarten elastischen Stoffes kann man mit den Methoden für dünne Schalen untersuchen. Als Beispiele werden behandelt: 1. die homogene Deformation einer dünnen ebenen Platte elastischen Stoffes, welche mit einer einzigen Schicht aus zwei Reihen gerader Fäden verstärkt wird, 2. die Biegung eines Kuboids, das eine ähnliche Doppelschicht von Fäden in einer Biegeebene enthält, wobei die Fäden unsymmetrisch bzw. symmetrisch zur Biegeachse liegen, 3. die gleichzeitige Aufblähung und Verwindung einer mit einer oder zwei Fadenreihen verstärkten zylindrischen Röhre (Schlauch), wobei die Fäden schraubenlinienförmig in coaxial zur Randfläche liegenden Zylindern laufen.

J. Pretsch.

Trifan, D.: A minimum principle of plasticity. Quart. appl. Math. 13, 337—339 (1955).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 33, 228) beweist Verf. das dort in Abschnitt 5 abgeleitete Minimumsprinzip unter allgemeineren Voraussetzungen über den physikalischen Zustand des plastizierten, sich teilweise im Belastungs-, teilweise im Entlastungszustand befindlichen Körpers. Das Prinzip lautet: das Integral $\int_V (\dot{\mathfrak{S}} \dot{\mathfrak{E}}) dV$ nimmt für das System der wirklich auftretenden Verzerrungs- und Spannungsgeschwindigkeiten ein absolutes Minimum an unter allen zulässigen d. h. aus einem System von Verschiebungsgeschwindigkeiten herleitbaren Verzerrungsgeschwindigkeiten und den zugehörigen Spannungsgeschwindigkeiten.

R. Moufang.

Caprioli, Luigi: Su un criterio per l'esistenza dell'energia di deformazione. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 481—483 (1955).

It is shown that the existence of the strain-energy in a non-elastic body submitted to infinitesimal deformations is secured by the two following assumptions only: — that the work necessary to produce the deformation starting from the

natural undeformed state be always non-negative; — and that the stress tensor depends only on the corresponding strain tensor. (From author's summary.)

D. Radenković.

Lee, E. H.: Stress analysis in visco-elastic bodies. *Quart. appl. Math.* **13**, 183—190 (1955).

In this paper, the author, using the Laplace transform, makes the stress analysis for homogeneous, isotropic compressible materials characterized by linear relations between the components of stress, strain and their derivatives with respect to time. The inertia forces due to the deformation are neglected and the bodies are assumed to be initially undisturbed. With these hypothesis, the author shows that removing the time variable by applying the Laplace transform every stress analysis problem involving the visco-elastic materials can be reduced to a static elasticity problem for which we have at our disposal an extensive known literature. However, if the operation of the transform on the prescribed boundary conditions modifies the spatial distribution, the associated elastic problem is not in general simply related to the visco-elastic problem. The developed method is convenient for „proportional loading“, in which the space and time variations of the prescribed quantities being separated, the spatial distribution remains the same as in the visco-elastic problem. The author proves for the case of the moving surface tractions, non-proportional loading, an alternative method: the solutions of the associated elastic problem are the Laplace transforms of the solutions of the prescribed visco-elastic problem solved first in the hypothesis that it is elastic. Two examples wholly illustrate the developed methods.

M. Predeleanu.

Sokolovskij, V. V.: Über die Gleichungen der Plastizitätstheorie. *Priklad. Mat. Mech.* **19**, 41—54 (1955) [Russisch].

In this paper the author is extending some basic relations and methods, given previously in his well-known book „Theory of Plasticity“ (2. ed., Moscow 1950), to the case of a general plastic non hardening material. Taking the yield criterion in the form $\Phi(\sigma, \tau) = 0$ where σ and τ are proportional to the first and second invariants of the stress-tensor respectively, and using the function Φ as the plastic potential, the author formulates basic relations between the components of stress and the strain rates. The equations concerning plane stress and plane strain are specially considered and different ways of their transformation are discussed for the case of hyperbolic equations (real characteristics) as well as for the case of elliptic equations (imaginary characteristics). A method for the solution of these equations by means of trigonometric series is given. Some special forms of the yield criterion which permit simple equations for plane problems are discussed.

D. Radenković.

Shaffer, Bernard W. and Raymond N. House jr.: The elastic-plastic stress distribution within a wide curved bar subjected to pure bending. *J. appl. Mech.* **22**, 305—310 (1955).

Ein breiter kreisringförmiger Balken aus idealplastischem Material, das die Fließbedingung von Tresca $\sigma_r - \sigma_\theta = 2k$ resp. $\sigma_\theta - \sigma_r = 2k$ erfüllt, werde durch ein gleichförmiges Biegemoment M belastet, das der Balkenkrümmung entgegenwirkt. Die mittlere Hauptspannung σ_z ist senkrecht zur Krümmungsebene. Wächst M von 0 an, so verhält sich der Balken zunächst vollenlastisch, dann bildet sich am konkaven Teil eine plastische Zone aus für $a \leq r \leq \varrho_1$, während für $\varrho_1 \leq r \leq b$ der Zustand elastisch ist; übersteigt M einen kritischen Wert, so ist der Balken in $a \leq r \leq \varrho_1$ plastisch, in $\varrho_1 \leq r \leq \varrho_0$ elastisch und in $\varrho_0 \leq r \leq b$ plastisch. Bei weiterer Steigerung von M wird der ganze Querschnitt plastiziert. In allen Belastungsphasen berechnet Verf., ohne die Formänderungen heranzuziehen, σ_r und σ_θ unter der Annahme, daß in jedem radialen Querschnitt ein ebener Verzerrungs-

zustand herrscht. Im elastischen Bereich erfolgt die Bestimmung von σ_r und σ_θ aus der Gleichgewichts- und der Verträglichkeitsbedingung für die Spannungen; im plastischen Bereich aus der Gleichgewichts- und der Fließbedingung für die Spannungen. Als Übergangsbedingungen zwischen beiden Gebieten wird Stetigkeit von σ_r und σ_θ gefordert. Für $r = a$ und $r = b$ verschwindet σ_r . Zwischen ϱ_0 und ϱ_1 besteht eine geometrische und eine physikalische Bedingung, die sich aus dem Momentengleichgewicht in einem Querschnitt ergibt und daher M enthält. Ist $r = c$ die neutrale Fläche mit $\sigma_\theta = 0$, so ist $\varrho_i < c < \varrho_0$ und c von M abhängig. Wenn M gegen den Grenzwert $M_{pl} = \frac{1}{2} k(b-a)^2$ strebt, konvergieren ϱ_1 und ϱ_0 beide nach $c = \sqrt{a b}$, womit der vollplastische Zustand erreicht ist. In diesem ist σ_θ als Funktion von r bei $r = c$ unstetig. Diagramme veranschaulichen die Zusammenhänge.

R. Moufang.

Owens, R. H. and P. S. Symonds: Plastic deformations of a free ring under concentrated dynamic loading. J. appl. Mech. **22**, 523—529 (1955).

Die Untersuchung schließt unmittelbar an drei frühere Arbeiten von Symonds an (siehe z. B. dies. Zbl. **53**, 140), nur das es diesmal ein Ring ist, an dem sich infolge eines Einzelkraftstoßes P an Stellen $M = M_0$ idealplastische Gelenke ausbilden. Ist die Stoßkraft so groß, daß mehr als 2 Gelenke entstehen, so wird die Rechnung merklich komplizierter als im Falle des geraden Balkens; für die während der Stoßzeit konstante Kraft (Rechteckimpuls) ist sie indessen durchführbar. In einem Diagramm sind als Hauptergebnis die Winkelsprünge an den plastischen Gelenken über Pr/M_0 aufgetragen.

K. Marquerre.

Craemer, H.: Idealplastische isotrope und orthotrope Platten bei Vollausnutzung aller Elemente. Ingenieur-Arch. **23**, 151—158 (1955).

Für die Bemessung isotroper und orthotroper Platten werden Differentialgleichungen aufgestellt, die die vollständige Ausnutzung aller Plattenelemente bei idealplastischem Verhalten zur Voraussetzung haben. An Hand von Beispielen (Kreis-, Kreisring-, Rechteckplatte bei verschiedenen Randbedingungen und Belastungen) wird auf die Anwendung eingegangen.

H. Bufler.

Agababjan, E. Ch.: Die dynamische Verbreiterung eines Hohlzylinders unter den Bedingungen der idealen Plastizität. Ukrain. mat. Žurn. **7**, 243—252 (1955) [Russisch].

This paper is concerned with the dilatation of a long hollow cylinder under the impact of the uniform pressure at the inner surface. The material is taken to be elastic-perfectly plastic with the same bulk modulus in both ranges. Small deformation is postulated. The solution is obtained by means of the method of characteristics. The analysis is carried out on the basis of a numerical example.

D. Radenković.

Levin, E.: Indentation pressure of a smooth circular punch. Quart. appl. Math. **13**, 133—137 (1955).

Für einen flachen starren Stempel, der mit zunehmender Normallast gegen ein vollkommen plastisches Material von konstanter maximaler Schubspannung drückt, wird nach einem Satz von Drucker, Prager und Greenberg (dies. Zbl. **47**, 432) eine obere Grenze für den Kerbdruck, bei dem plastisches Fließen nahe bevorsteht, durch Konstruktion eines kinematisch zulässigen Geschwindigkeitsfeldes nach dem Vorgang von Hill (dies. Zbl. **33**, 409) für den zweidimensionalen Stempel berechnet.

J. Pretsch.

Lomakin, V. A.: Das elastoplastische Gleichgewicht einer Vollkugel im instationären Temperaturfeld. Priklad. Mat. Mech. **19**, 244—248 (1955) [Russisch].

Es werden die Deformationen und die Spannungen in einer isotropen Kugel berechnet, die sich in einem radialsymmetrischen instationären Temperaturfeld befindet. Die Materialeigenschaften der Kugel werden als temperaturunabhängig angenommen. Wegen der Symmetrie des Problems interessiert vor allem die Radialdehnung. Für sie kann eine lineare Differentialgleichung erhalten werden, die sich für beliebiges Temperaturfeld $T(r, t)$ lösen läßt. Bei beliebigem Spannungs-Deh-

nungs-Gesetz läßt sich dann weiterhin der Spannungszustand berechnen. Um das Temperaturfeld zu bestimmen, muß die Wärmeleitungsgleichung gelöst werden. Der Verf. tut dies für den Fall, daß die Kugel zunächst gleichmäßig auf eine Temperatur T_0 aufgewärmt und dann zur Zeit $t = 0$ auf der Oberfläche auf $T = 0$ abgekühlt und auf dieser Temperatur gehalten wird. Da die Lösung dieser Randwertaufgabe auf dem üblichen Wege einer Trennung der Veränderlichen zu einer nur schlecht konvergierenden Reihe führt, verwendet der Verf. eine Operatorenmethode. Die damit erhaltene Radialdehnung ist als Funktion der Zeit für verschiedene Radien im Diagramm aufgetragen. Bei vorgegebener Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit lassen sich die Bereiche und Zeiten plastischer bzw. elastischer Deformationen entnehmen. Vergleiche mit Versuchen zeigen, daß die Spannungen in der Nähe der Kugeloberfläche etwas zu groß herauskommen. Dies führt der Verf. auf eine sekundäre plastische Verformung der Außenzone bei der Entlastung der fast erkalteten Kugel zurück, die in der Theorie nicht berücksichtigt wurde.

K. Magnus.

Rozovskij, M. I.: Die radiale Deformation einer Hohlkugel, die Anisotropie und elastische Nachwirkungen besitzt. Doklady Akad. Nauk SSSR 105, 920—923 (1955) [Russisch].

Mit Hilfe eines Ansatzes von Volterra, der in einer Beziehung zwischen Spannung und Dehnung sowohl die Anisotropie als auch die elastische Nachwirkung berücksichtigt, behandelt der Verfasser das Problem einer Hohlkugel, die innen und außen gleichmäßig auf den Oberflächen verteilten Drücken unterworfen ist. Aus der Differentialgleichung für die Spannung wird durch Einsetzen der Spannungs-Dehnungsbeziehung eine Integro-Differentialgleichung für die Verschiebungen gewonnen, die durch Einführung einer neuen Veränderlichen in eine Integralgleichung mit zwei Variablen umgewandelt wird. Ihre Lösung kann als unendliche Reihe angegeben und daraus die Verschiebungen als Funktion des Radius und der Zeit ermittelt werden. Zur Bestimmung einiger in die Lösung eingehender Koeffizienten sind allerdings nochmals Integralgleichungen zu lösen.

K. Magnus.

Hirai, Atsushi: Aerodynamic stability of suspension bridges under wind action. I. Proc. Japan. Acad. 31, 625—630 (1955).

Karas, K.: Eigenschwingungen von Saiten mit elastisch befestigten Enden. Österreich. Ingenieur-Arch. 9, 352—388 (1955).

Verf. hat in einer früheren Arbeit [Federhofer-Girkmann-Festschrift, Wien 1950, 37—56] unter Benutzung der Integralgleichungsmethode dasselbe Problem gelöst. In der vorliegenden Arbeit, gewidmet Herrn Prof. Karl Federhofer zum 70. Geburtstag, betrachtet Verf. nur die Bewegungen der Saite in der (x, y) -Ebene. Nach dem Prinzip von d'Alembert erhält man die Bewegungsgleichung mit Berücksichtigung der Rotationsträgheit

$$S(\partial^2 y / \partial x^2) + (\partial / \partial x) [r J \partial^3 y / \partial x \partial t^2] - r q (\partial^2 y / \partial t^2) = 0,$$

wo S die Saitenkraft ist, $r(x)$ die räumliche Dichte, $q(x)$ die Querschnittsfläche mit dem Flächenträgheitsmoment $J(x)$ hinsichtlich einer zur (x, y) -Ebene senkrechten Schwerlinie (deshalb ist die Querkraft $Q(x) = r J \partial^3 y / \partial x \partial t^2$). Die Randbedingungen sind

$$S(\partial y / \partial x)_g + (r J \partial^3 y / \partial x \partial t^2)_g \mp k_g y_g = 0, \quad g = 0, l;$$

wo k_g die Konstanten der elastischen Befestigung des Saitenelements sind. Mit dem Ansatz für stehende Wellen $y(x, t) = X(x) T(t)$ erhält man

$$T = A \sin kt + B \cos kt, \quad S X'' = k^2 [(r J X')' - r q X],$$

und die Randbedingungen $S X'_g - k^2 [r J X']_g \mp k_g X_g = 0$. Das Eigenwertproblem ist formuliert durch $R'(X) + k^2 r q X = 0$, $R_g \mp k_g X_g = 0$, wo $R(X) = S X' - k^2 (r J X')$ ein Operator ist. Mittels eines beliebigen Vergleichs-

querschnittes q_v läßt sich das Eigenwertproblem durch die neue Differentialgleichung: $\eta_g'' - u \sigma (\rho I \eta_g')' + u \rho K \eta_g = 0$ ausdrücken, mit den Randbedingungen $\eta_g' - u \sigma [\rho I \eta_g']_g \mp \kappa_g \eta_g = 0$, $g = 0; 1$, wo $x/l = \xi$; $X/l = \eta$; $r/r_v = \rho(\xi)$; $q/q_v = K(\xi)$; $J(x)/J_v = I(\xi)$; $r_v^2/l^2 = \sigma$; $\kappa_g = k_g l/S$; $u = k^2 r_v q_v l^2/S$ (Eigenwert) die dimensionslosen Veränderlichen und Größen sind. Für $\sigma = 0$ oder $\rho = I = K = 1$ folgen einfache Eigenwertprobleme. Es wird vorausgesetzt, daß im Intervall $(0, 1)$ $K(\xi)$ stetig ist und $\rho(\xi)$, $I(\xi)$ einmal stetig differenzierbar sind; sind dann „die Vergleichsfunktionen“ zweimal differenzierbare Funktionen, so ist das Eigenwertproblem selbstadjungiert und eigentlich definit. Für die beiden ersten Eigenschwingzahlen werden die bekannten Verfahren von Ritz und Grammel herangezogen. Es wurden vier Beispiele mit homogener Dichteverteilung berechnet (mit $\kappa_0, \kappa_1 = 1, 1; \infty, 2; 0.5, \infty; 0.5, 8$). Es wird auch eine graphische Ermittlung der verschärften Näherung \bar{u}_1 gezeigt (im Falle II und IV). Es erweist sich, daß das Ritzsche Verfahren im allgemeinen die geringste Rechenarbeit erfordert; das Grammelsche Verfahren erfordert mehr Rechenarbeit, aber die oberen Schranken werden wesentlich genauer geliefert. Für drei Fälle der inhomogenen Dichteverteilung [a) wenn die Dichte und der Querschnitt in jedem der zwei Felder, die die Saite überspannt, konstant aber verschieden sind; wenn die Einfeldersaiten als Dichte eine b) lineare, c) quadratische Funktion des Ortes besitzen] werden strenge Frequenzgleichungen (ausdrückbar durch Besselsche und Whittakersche Funktionen) mitgeteilt und auch die Formeln für strenge Mitberücksichtigung der Rotationsträgheit bereitgestellt (eine Integrodifferentialgleichung mit symmetrischem Kern). Am Schluß der Arbeit werden die benutzten Näherungsverfahren untereinander und auch mit dem von Kellogg verglichen.

D. Rašković.

Fuhrke, H.: Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls. Ingenieur-Arch. 23, 329—348 (1955).

Für einen Balken abschnittsweise konstanten Querschnittes, durch den sich auch Balken stetig veränderlicher Querschnitte annähern lassen, ist die Differentialgleichung der Biegeschwingung $w^{IV} - (\lambda/l)^4 w = 0$ abschnittsweise exakt lösbar. Faßt man die vier Größen Verschiebung w , Neigung ψ , Biegemoment M und Querkraft Q zu einem Spaltenvektor η zusammen, so besteht zwischen dem Vektor η_i am rechten Ende eines Balkenabschnittes i und η_{i+1} am linken Ende ein linearer Zusammenhang $\eta_{i+1} = \mathfrak{R}_i \eta_i$ mit einer Übergangsmatrix \mathfrak{R}_i , die sich auf den i -ten Abschnitt bezieht und durch Lösung der Schwingungsgleichung gewonnen wird. Eine Vereinfachung ergibt sich durch Ersatz des Balkenabschnittes durch einen masselosen Balken gleicher Länge l_i und gleicher elastischer Eigenschaften und eine anschließende Punktmasse $m_i = \mu_i l_i$. Die dabei entstehende Übergangsmatrix \mathfrak{Z}_i , entstanden aus \mathfrak{R}_i durch Grenzübergänge, enthält den Eigenwert λ nur noch als Faktor, was die numerische Rechnung entscheidend vereinfacht. Hintereinanderschalten mehrerer Balkenabschnitte bildet sich nun formal in Produktketten der Übergangsmatrizen \mathfrak{R}_i bzw. \mathfrak{Z}_i zu einer Gesamtmatrix \mathfrak{A} ab. Auch elastische Zwischenstützen sind durch zwischengeschaltete Stützmatrizen \mathfrak{S} erfaßbar, aus denen durch Grenzübergang Matrizen \mathfrak{S}_s starrer Stützen hervorgehen. — Für das Einarbeiten von Randbedingungen bringt jeder Rand zwei Bedingungen mit sich. Durch Übergang vom rechten zum linken Balkenrand führt dies auf zwei homogene Gleichungen, also auf das Verschwinden einer zweireihigen Determinante als Frequenzgleichung. In einer vierreihigen Matrix \mathfrak{A} sind nun insgesamt $\binom{4}{2}^2 = 6^2$ zweireihige Unterdeterminanten enthalten, deren jede einer bestimmten Kombination der Randbedingungen entspricht. Indem diese Unterdeterminanten lexikographisch angeordnet werden, wird der Matrix $\mathfrak{A} = (A_{ik})$ eine sechsstufige sog. \mathfrak{A} -Matrix \mathfrak{A}^4 mit Elementen $A_{p\gamma}^4$ zugeordnet (die 2. „abgeleitete“ Matrix $\mathfrak{A}^{(2)}$ nach Kronecker).

Jeder Kombination von Randbedingungen am rechten und linken Balkenende entspricht eine Frequenzgleichung $A_{p1}^I = 0$. Für die A -Matrix \mathcal{G}^I einer Produktmatrix $\mathcal{G} = \mathfrak{A} \mathfrak{B}$ gilt nun die einfache Beziehung $\mathcal{G}^I = \mathfrak{A}^I \mathfrak{B}^I$, die ein bequemerer Einarbeiten der Randbedingungen durch die Produktketten der Abschnittsmatrizen hindurch erlaubt. Insbesondere lassen sich hierdurch numerische Schwierigkeiten beheben, die sonst bei Grenzübergängen (Übergang zu starren Stützen) auftreten. — Mit Hilfe des hier entwickelten Kalküls werden folgende Einzelaufgaben behandelt: Berechnung der Eigenfrequenzen beliebig gestützter Balken; Ermittlung der zugehörigen Eigenschwingungsformen; Behandlung erzwungener Schwingungen; Berechnung statischer Einflußzahlen. — Die Brauchbarkeit des Verfahrens wird am Beispiel der kritischen Drehzahlen einer fünffach gestützten Läufergruppe vorgeführt.

R. Zurmühl.

McDonald jr., P. H.: Nonlinear dynamic coupling in a beam vibration. *J. appl. Mech.* **22**, 573—587 (1955).

This investigation treats the vibration of a uniform beam with hinged ends which are restrained, and which has arbitrary initial conditions of motion. A representative example is discussed in which the beam is subjected to a concentrated lateral force at the mid-point of its span and released from rest at the deflected position. The equations of motion are found to be inherently nonlinear, even for small vibrations, and there is dynamic coupling of the modes. It is found that the frequencies of the various modes are functionally related to the initial conditions, particularly the amplitudes of all the modes.

R. Gran Olsson.

Yeh, Gordon C. K. and Johann Martinek: Forced vibration of a clamped rectangular plate in fluid media. *J. appl. Mech.* **22**, 568—572 (1955).

In this paper forced vibrations of a thin rectangular plate in a rigid infinite baffle are analyzed. The plate is assumed to separate two different fluid media and the vibrations are excited by a simple wave of high frequency (as compared with $c/2\sqrt{\pi}ab$, where c = wave velocity of the fluid, a = plate width, b = plate length) normally incident from one side of the plate. — Using the characteristic shape functions, the Lagrange equations of motion of the plate are set up in generalized coordinates. The solutions of the equations render series expressions for the plate deflection and an energy transmission coefficient. Certain numerical results are given.

R. Gran Olsson.

Yu, Yi-Yuan: Free vibrations of thin cylindrical shells having finite lengths with freely supported and clamped edges. *J. appl. Mech.* **22**, 547—552 (1955).

Für die freien Schwingungen zylindrischer Schalen endlicher Länge werden drei Differentialgleichungen hergeleitet, deren Integration nach einer Vereinfachung nicht schwierig ist. Die Frequenzgleichungen werden erhalten für den Fall beiderseits freier Ränder, beiderseits eingespannter Ränder und den Fall nur einseitig eingespannten Randes. Die niedrigste Eigenfrequenz ist im ersten Falle am kleinsten, im zweiten Falle am größten. Neben dieser niedrigsten Eigenfrequenz gibt es in jedem der drei Fälle noch zwei weitere, doch sind diese von Fall zu Fall nicht sehr verschieden. Die Frequenzgleichungen erweisen sich als ähnlich den Frequenzgleichungen transversal schwingender Balken mit ebendenselben Randbedingungen. Im Falle freier Ränder treten Normalfunktionen von der Art auf, wie sie von Flügge verwendet worden sind.

E. Hardtwig.

Bogdanoff, J. L.: Influence of secondary inertia terms on natural frequencies of rotating beams. *J. appl. Mech.* **22**, 587—591 (1955).

The purpose of the present paper is to determine the equations of small motion including all inertia effects for a straight cantilever beam attached to an arbitrary angular setting to the rim of a disk, which rotates with constant angular velocity, when the mass and elastic axes lie on the same radial line, the Bernoulli-Euler and

Saint Venant theories of bending and torsion are valid, and the beam is very stiff in one direction. The problem is to determine the influence of the additional inertia terms on the fundamental lateral and torsional frequencies of a uniform beam. The equations of motion for twisted bars with noncoincident mass and elastic axes could have been written out, but were omitted here because of their considerable length. Attention has been focused on the fundamental frequencies since these appear to be of prime importance in gas-turbine theory and application and also since it seems possible to arrive at some simple, though approximate, frequency equations. Influence of the secondary inertia terms on the fundamental torsional and lateral frequencies is examined at two angular settings for a uniform beam having a length to disk-radius ratio in the range usually encountered in gas-turbine buckets and axial flow-compressor blades.

R. Gran Olsson.

Volterra, E.: The equations of motion for curved elastic bars deduced by the use of the „method of internal constraints“. Ingenieur-Arch. **23**, 402—409 (1955).

Die Bewegungsgleichungen der freien elastischen Schwingungen eines gekrümmten homogenen isotropen Stabes werden abgeleitet unter der Annahme, daß der Vektor \bar{V} der elastischen Verschiebung eines Balkenpunktes P die Form hat $\bar{V}(x, y, z; t) = \bar{v}(x, t) + y\bar{\lambda}(x, t) + z\bar{\mu}(x, t)$, wo die neun Komponenten der Vektoren \bar{v} , $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ die Unbekannten des Problems sind; x, y, z sind orthogonale Koordinaten im Fußpunkt O des Lotes von P auf die Schwerpunktsachse C des Balkens, die Koordinatenrichtungen fallen in die Richtungen des begleitenden Dreieins der Raumkurve C in O . Obiger Ansatz für den Verschiebungsvektor wird als „method of the internal constraints“ bezeichnet; er bedeutet, daß die Balkenquerschnitte senkrecht zu C eben bleiben. Verf. berechnet zunächst ds^2 als quadratische Form in dx, dy, dz unter Heranziehung der Frenetschen Formeln der Kurventheorie und des Darbouxschen Vektors; die Formänderungen werden als infinitesimal vorausgesetzt. Die Koeffizienten dieser Differentialform, die von der Krümmung und Windung von C und von den Komponenten der Vektoren \bar{v} , $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ abhängen, liefern die Elemente des Verzerrungstensors. Für die weitere Durchführung der Rechnung wird C als ebene Kurve angenommen. Die Volumintegrale der elastischen Formänderungsenergie und der kinetischen Energie des Balkens lassen sich dann auf einfache Integrale nach x zurückführen, deren Integrand in gegebener Weise von den Komponenten von \bar{v} , $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ und ihren Ableitungen abhängt. Unter der Voraussetzung, daß die Krümmung von C und die Hauptträgheitsmomente des Querschnittes von x unabhängig sind, ergibt sich aus dem Hamiltonschen Variationsprinzip ein System von neun partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung für die neun Unbekannten samt den Randbedingungen bei $x = 0, x = l$. Für die Spezialfälle, daß C geradlinig bzw. daß der Verzerrungszustand eben ist, werden die Grundgleichungen besonders angegeben.

R. Moufang.

Volterra, E.: A one-dimensional theory of wave-propagation in elastic rods based on the „method of internal constraints“. Ingenieur-Arch. **23**, 410—420 (1955).

Die in vorstehend referierter Arbeit des Verf. abgeleiteten Grundgleichungen werden angewendet auf die freien elastischen Schwingungen eines geraden Stabes unendlicher Länge und mit den bisherigen Methoden in der Literatur verglichen. Das Problem der Biege-, Torsions- und Logitudinalschwingungen wird gesondert behandelt und die zugehörige Frequenzgleichung aufgestellt und ausgewertet. Numerische und graphische Erläuterungen geben einen Vergleich der Resultate des Verf. mit der elementaren Theorie, der Theorie von Rayleigh, Timoshenko und der strengen Theorie von Pochhammer, die mit der Methode des Verf. gut übereinstimmt, so daß erwartet werden kann, daß sie auch zur Behandlung der Schwingungen gekrümmter Stäbe, wo eine exakte Theorie nicht durchführbar ist, eine brauchbare Näherung liefert.

R. Moufang.

Adachi, Ryuzo: On a plane wave propagated in an elastic plate with infinite breadth. *Kumamoto J. Sci., Ser. A* **2**, 184—195 (1955).

Untersucht wird die Wellenausbreitung in einer unendlichen isotropen ebenen Scheibe von der Dicke $2H$, deren Oberfläche spannungsfrei ist. Zur Lösung der elastischen Grundgleichungen wird eine in der x -Richtung mit der Geschwindigkeit c fortschreitende Welle von der Frequenz n angesetzt: $u = U(z) \exp [f(x, t)]$, $v = V(z) \exp [f(x, t)]$, $w = W(z) \exp [f(x, t)]$ $f(x, t) = (2\pi i n/c) (x - ct)$. Aus den Randbedingungen folgen transzendente Gleichungen für c und n ; ferner wird i. a. $v = 0$. Es ergeben sich zahlreiche Fallunterscheidungen und entsprechende Wellenformen, wegen deren Untersuchung auf die Arbeit verwiesen sei.

A. Weigand.

Marchasev, G. S.: Die Kopfwellen in elastischen Medien mit ebener Begrenzung. *Priklad. Mat. Mech.* **19**, 165—178 (1955) [Russisch].

Zwei unbegrenzte elastische Halbräume mögen in der Ebene $z = 0$ zusammenstoßen. Im oberen Halbraum befinde sich unweit der Grenze eine Punktquelle. Die von hier ausgehenden Wellen werden an der Grenze reflektiert und gebrochen. Wenn die elastischen Konstanten des unteren Halbraumes so beschaffen sind, daß die Wellengeschwindigkeit im unteren Halbraum größer ist, so wirken die längs der Grenze laufenden Wellen in den oberen Halbraum zurück und verursachen dort Störungen verschiedener Art, die als Kopfwellen und Mintrop-Wellen bezeichnet werden. Die Berechnung der Ausbreitung dieser Wellen wird nach einem Verfahren von Smirnov und Sobolev mit Hilfe von Funktional-Invarianten durchgeführt. Die Überführung der elastischen Grundgleichungen in Gleichungen für die Potentiale sowie die Formulierung der Randbedingungen für diese Potentiale wird aus früheren Arbeiten entnommen. Der Verf. löst das achsensymmetrische Problem durch Einführen von Zylinderkoordinaten. Er wird auf 2 komplexe Integrale geführt. Die Abhängigkeit der singulären Punkte der Integranden läßt die jeweils möglichen Lösungstypen und damit die Art der Störungen erkennen, die sich als Funktion der Zeit einstellen. Das zeitliche Nacheinander dieser Störungen an einem bestimmten Punkt hängt von den elastischen Konstanten ab.

K. Magnus.

Brandt, H.: A study of the speed of sound in porous granular media. *J. appl. Mech.* **22**, 479—486 (1955).

Es wird eine Theorie entwickelt, um den Einfluß des Druckes, der Porosität und des Wassergehaltes auf die Schallgeschwindigkeit in einem körnigen Medium zu erfassen. Das Medium soll aus statistisch verteilten kugelförmigen Teilchen in 4 Größenklassen bestehen. Die Volumen-Druckfunktion wird nach der Theorie von Hertz bestimmt. Aus dieser erhält man die Schallgeschwindigkeit. Vergleiche mit Messungen an Sandsteinen zeigen eine befriedigende Übereinstimmung.

W. Kertz.

Eringen, A. Cemal: Response of an elastic disk to impact and moving loads. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **8**, 385—393 (1955).

Mediante l'uso della trasformata di Fourier l'A. studia il problema elastodinamico di un disco soggetto a vari tipi di carichi dinamici agenti sul bordo, esprimendone le soluzioni mediante l'uso delle funzioni cilindriche. In particolare vengono riportati risultati numerici, con relativa discussione, nel caso di carichi dinamici concentrati.

G. Grioli.

Hydrodynamik:

Lagerstrom, P. A. and J. D. Cole: Examples illustrating expansion procedures for the Navier-Stokes equations. *J. rat. Mech. Analysis* **4**, 817—882 (1955).

Für eine Reihe von Näherungsmethoden, die in der Theorie der zähen inkompressiblen Strömung benutzt werden (Prandtl'sche Grenzschicht, Näherungen von

Stokes und Oseen), wird der Zusammenhang zwischen Lösung und asymptotische Entwicklung untersucht. Die Mitteilung ist Teil einer umfangreicheren Studie über Entwicklungsverfahren, die am GALCIT durchgeführt wird und an der Kaplun (dies. Zbl. 55, 190) durch seine Beiträge über Entwicklungen bei hohen und niedrigen Reynolds-Zahlen beteiligt ist.

J. Pretsch.

Sucharevskij, I. V.: Über eine Randwertaufgabe der Hydrodynamik. II. Dopovid Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1955, 39—41 und russ. Zusammenfassg. 42 (1955) [Ukrainisch].

In der vorliegenden Note wird der folgende Satz über die Ermittlung einer stetigen Lösung der Integralgleichung

$$(1) \quad u(s) - \pi^{-1} \int u(\sigma) (\partial \ln |\zeta - z| / \partial n_s) d\sigma = 2 \operatorname{Re} [w_0(z) \cdot z'(s)]$$

die mit der in Teil I [Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 416 (1954)] untersuchten Randwertaufgabe der ebenen Hydrodynamik zusammenhängt, bewiesen: Sei C eine einfach stückweise glatte Kontur $z = z(s)$ ($-l_2 \leq s \leq l_1$) mit dem singulären Eckpunkt $z_0 = z(0)$, wobei $\arg z'_n(s)$ auf jedem der Intervalle $[-l_2, 0]$, $[0, l_1]$ der Lipschitzschen Bedingung mit positivem Exponenten genügt. Mit C' bezeichnen wir den Bogen derjenigen Kontur, für die $\varepsilon_1 \leq s \leq l_1$, $-\varepsilon_2 \geq s \geq -l_2$, und setzen $K(\sigma, s) = \pi^{-1} \partial \ln |\zeta - z| / \partial n_s$ (\vec{n} ist der Einheitsvektor der inneren Normalen). Dann gilt 1. die Integralgleichung $u_\lambda(s) - \lambda \int_{C'} K(\sigma, s) u_\lambda(\sigma) d\sigma = f(s)$

besitzt keine charakteristischen Werte im Kreise $|\lambda| \leq 1$, und demnach hat die Gleichung (2) mit der auf C' stetigen rechten Seite die eindeutige stetige Lösung $u_1(s)$

$$(2) \quad u_1(s) - \int_{C'} K(\sigma, s) u_1(\sigma) d\sigma = f(s);$$

2. ist $f(s)$ stückweise stetig auf C mit dem singulären möglichen Unstetigkeitspunkte z_0 und besitzt dabei die Integralgleichung (3) $u(s) - \int_{C'} K(\sigma, s) u(\sigma) d\sigma = f(s)$ die stetige Lösung $u(s)$

die im Eckpunkt verschwindet, so ist für $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = O(1)$ $u_1 \rightarrow u$ gleichmäßig auf jedem Bogen der Kontur C , der keinen Eckpunkt enthält.

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

De, S. C.: Contributions to the theory of Stokes waves. Proc. Cambridge philos. Soc. 51, 713—736 (1955).

Die Theorie der Wellen einer bestimmten Form in endlich tiefem Wasser, die Stokes entwickelt und selbst bis zur 3. Näherung geführt hat, wird bis zur 5. Näherung ausgedehnt mit dem Ziele, ihre für kleines Verhältnis von Wellenlänge zur Wassertiefe besonders brauchbaren Ergebnisse mit der „cnoidal theory“ von Benjamin und Lighthill (dies. Zbl. 55, 456), die für lange Wellenlängen geeigneter ist, zu vergleichen. Dabei wird das von den letztgenannten Verff. angegebene Verfahren der Kennzeichnung eines Wellenzuges durch die drei dimensionslosen Parameter für Durchflußmenge q , Energie r und Impuls s durch Einführung der Kurven mit konstantem Verhältnis von mittlerer Wassertiefe bzw. Wellenhöhe zur Wellenlänge in das $r-s$ -Diagramm ergänzt, das sich zum Studium sowohl des Wellenwiderstandes als auch der Bildung eines stationären Wellenzuges hinter einem Loch eignet.

J. Pretsch.

Belocerkovskij, S. M.: Ein hufeisenförmiger Wirbel bei instationärer Bewegung. Priklad. Mat. Mech. 19, 159—164 (1955) [Russisch].

Es wird das Feld der Strömungsgeschwindigkeiten untersucht, das in einem idealen inkompressiblen Flüssigkeit durch einen tragenden Wirbel endlicher Länge entsteht, dessen Wirbelstärke eine Funktion der Zeit ist und der durch ein entsprechendes System freier Wirbel ergänzt wird. Es wird angenommen, daß die Abwanderungsgeschwindigkeit der freien Wirbel nach Größe und Richtung konstant ist. Bei Änderungen der Wirbelstärke des tragenden Wirbels lösen sich von ihm freie Wirbel ab, deren Achsen der des tragenden Wirbels parallel sind. Die Wirbelstärke der beiden Randwirbel ändert sich damit sowohl als Funktion der Zeit, als auch als Funktion des Ortes. Die erhaltenen allgemeinen Formeln werden für den Fall eines nach einem Sinusgesetz schwankenden Wirbelstärke weiter ausgerechnet und für den Fall kleiner Frequenzen spezialisiert. Die in der Arbeit gewonnenen Ergebnisse

geben die Möglichkeit, Berechnungen der räumlichen instationären Strömung um beliebige schwach gewölbte Tragflächen durchzuführen. *K. Magnus.*

Possel, René de et Jacques Valensi: *Sur le sillage d'une plaque perméable.* Publ. sci. Univ. Alger, Sér. A **1**, 267—280 (1955).

Vernachlässigt man mit Oseen in den umgeformten Bewegungsgleichungen einer idealen Flüssigkeit

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + \text{grad } v^2 / 2 - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] + \varrho^{-1} \text{ grad } p = 0$$

den quadratischen Term $[\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}]$, so ergibt sich für den Widerstand eines in gleichförmiger, geradliniger Translation mit der Geschwindigkeit a begriffenen Körpers ein Ergebnis, das nur wenig mit der Erfahrung übereinstimmt. Dies wird anders, wenn man den Fall eines senkrecht zur Bewegungsrichtung gelagerten, aus einem engmaschigen Netz bestehenden, also durchlässigen Körpers betrachtet. Der dann erhaltene Widerstand berechnet sich aus der Formel $2 \int p = -\varrho a^2 \cdot 4(1 - \sigma)$, wo $\sigma = 1 - H/a$ die „Durchlässigkeit“ charakterisiert. Trägt man $2 \Delta p / \varrho a^2$ als Ordinate gegen σ als Abszisse auf, so erhält man in guter Übereinstimmung mit den Experimenten der Autoren eine lineare Abhängigkeit beider Größen. *Th. Seixl.*

Gheorghită, Șt. I.: *Au sujet des mouvements des fluides incompressibles en présence des corps poreux.* Comun. Acad. Republ. popul. Romîne **5**, 661—662, russ. u. franz. Zusammenfassg. 663 (1955) [Rumänisch].

Résumé des recherches de l'A. sur le mouvement des fluides parfaits incompressibles en présence de corps poreux. Soit D_1 l'extérieur de la courbe fermée simple C , située entièrement à distance finie; soit D_2 l'intérieur de C . Le problème aux limites, qui intervient, concerne la détermination des fonctions de variable complexe $f_j(z) = \varphi_j(x, y) + i \psi_j(x, y)$ ($j = 1, 2$), définies respectivement dans D_j ($j = 1, 2$), qui sont uniformes et holomorphes en tout point à distance finie et vérifient sur C les conditions suivantes: $A - (\text{grad } \varphi_1)^2 = B \varphi_2$, $\partial \varphi_1 / \partial n = \partial \varphi_2 / \partial n$. En plus, $f_1(z)$ admet $z = \infty$ comme pôle simple, le coefficient $\Gamma_0 > 0$ de z , dans le développement de $f_1(z)$ en série de Laurent au voisinage de $z = \infty$ étant donné; $A > 0$ et $B < 0$ sont des constantes. Une généralisation des formules de Blasius-Tchapliguine est ensuite indiquée. L'A. reprend le même problème, en admettant cette fois que le fluide soit visqueux et que l'écoulement ait lieu pour de faibles nombres de Reynolds. *C. Iacob.*

Dolidze, D. E.: *Über die Eindeutigkeit der Lösung einer Randwertaufgabe für eine zähe kompressible Flüssigkeit.* Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze **21**, 261—267 (1955) [Russisch].

Dans un travail précédent [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 437—439 (1954)] l'A. a démontré que la solution du problème aux limites dans le cas d'un fluide visqueux et incompressible est unique. Dans le présent travail la même méthode est étendue au cas d'un fluide compressible sous la condition que la densité ne dépend que de pression et que le coefficient de la viscosité dynamique est constant. En admettant que deux solutions différentes existent, avec des vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2 et des densités ϱ_1 et ϱ_2 , l'A. suppose que les densités ne coïncident nulle part ou, si elles coïncident en certains points, le rapport $\text{div } \varrho(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) / (\varrho_1 - \varrho_2)$ reste limité dans ces points. Cette condition accomplie, il n'est pas difficile à démontrer que le champ des densités est unique. L'A. traite ensuite le cas d'un domaine inférieur fermé et celui d'un domaine extérieur ouvert et démontre que dans les deux cas la solution du problème posé est unique. *C. Woronetz.*

Krzywicki, A.: *Sur le mouvement plan d'un liquide visqueux compressible.* Studia math. **15**, 113—122 (1955).

Die hydrodynamischen Kräfte, die auf ein geschlossenes Profil S in zäher kompressibler Strömung ausgeübt werden, können als Grenzwerte von Reihen dargestellt werden, in deren Gliedern sich die Integration des zeitlichen Gradienten des Produkts

von Dichte und Geschwindigkeit über das Gebiet zwischen S und den Kreisen K_n mit den Radien r_n ($n \rightarrow \infty$) um den Ursprung bzw. über K_n erstreckt. *J. Pretsch.*

Grodzovskij, G. L.: Die Strömung eines zähen Gases zwischen zwei sich bewegenden planparallelen Wänden und zwischen zwei rotierenden Zylindern. *Priklad. Mat. Mech.* **19**, 99—102 (1955) [Russisch].

Le travail se rapporte à la recherche d'une solution exacte de problème d'écoulement d'un gaz visqueux entre deux plans parallèles ou entre deux cylindres coaxiaux en mouvement relatif. L'analyse des équations de mouvement amène au calcul numérique des certaines intégrales. Les résultats obtenus sont présentés graphiquement et donnent le champ de vitesse et celui de température. L'A. constate que dans un certain intervalle les variations des coefficients de viscosité et de conductibilité thermique avec la température peuvent être négligées. *C. Woronetz.*

Tao, L. N.: Gas dynamic behavior of real gases. *J. aeronaut. Sci.* **22**, 763—774 (1955).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die Gasdynamik des idealen Gases auf das Beattie-Bridgeman'sche Gas zu verallgemeinern, dessen Zustandsgleichung die Form $p = R T \varrho^2 (1 - c\varrho/T^3) [1/\varrho + B - D\varrho] - E\varrho^2 + F\varrho^3$ hat. (c, B, D, E, F sind Konstante.) Weiters soll die Temperaturabhängigkeit der Molwärmen berücksichtigt werden. Zu diesem Zweck wird die Beattie-Bridgeman'sche Zustandsgleichung in die Formeln

$$C_p = C_{p0} - \int T (\partial^2 \varrho^{-1} / \partial T^2)_p \cdot dp \quad C_v = C_{v0} + \int T (\partial^2 p / \partial T^2)_{1/\varrho} d(1/\varrho)$$

eingesetzt. Es werden nun folgende Probleme behandelt: a) adiabatische stationäre Strömung durch eine Laval-Düse. Durch Einführung der Crocco'schen Zahl [lokale Geschwindigkeit dividiert durch die Lavalgeschwindigkeit (Maximalgeschwindigkeit) — vgl. Forschung auf dem Gebiet des Ing.-Wesens **16**, No. 5, 154 (1949)] gelingt es, die sehr komplizierten Formeln etwas zu vereinfachen. b) Der senkrechte Stoß wird mit Hilfe der bekannten Grundgleichungen (Kontinuitätsgleichung, Impulssatz, Energiesatz) beschrieben. c) Der schiefe Stoß wird kurz diskutiert und eine Art Stoßpolare wird abgeleitet. — Die numerische Diskussion am Ende der vorwiegend thermodynamischen Arbeit zeigt, daß in vielen Fällen der Unterschied zum idealen Gas nicht allzu groß ist. *F. Cap.*

Jufev, I. M.: Zur Berechnung von Düsen. *Priklad. Mat. Mech.* **19**, 103—107 (1955) [Russisch].

Le problème se rapporte à l'étude d'écoulement irrationnel d'un gaz parfait plan ou symétrique par rapport à l'axe des x . En supposant que la vitesse dans la direction de cet axe ne diffère que très peu de celle du son et en négligeant le carré de cette différence, ainsi que le carré de la vitesse dans la direction de l'axe des y , on arrive à une simplification essentielle des équations classiques, déterminant le potentiel complémentaire. On peut satisfaire à ces équations en supposant que le potentiel a la forme d'un trinôme par rapport à x avec les coefficients ne dépendant que de y . Ces coefficients peuvent être calculés analytiquement par l'intégration des équations correspondantes. Les résultats obtenus peuvent être appliqués, par exemple, à la construction des tuyères de Laval. *C. Woronetz.*

Sanojan, V. G.: Konstruktion der Konfiguration von ebenen und achsensymmetrischen Konfusoren und Diffusoren eines Drucksystems nach vorgegebener Druckverteilung auf der Achse. *Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fis.-mat. estestv. techn. Nauk* **8**, Nr. 6, 1—17 (1955) [Russisch].

Le problème consiste en détermination de la forme d'un diffuseur ou d'un collecteur aux deux ou à une seule asymptote dans le cas où la variation de vitesse est donnée sur l'axe de la conduite. Partant de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques, déterminant le potentiel, l'A. construit la solution de cette équation sous la forme d'une série indéfinie. On obtient ensuite les expressions correspondantes

pour les deux composantes de la vitesse et pour la fonction de courant. Quelques exemples sont traités en détails.

C. Woronetz.

Skripkin, V. A.: Über das Auströmen eines ebenen Gasstrahls mit schallnaher Geschwindigkeit aus einem Stutzen mit parallelen Wandungen. Priklad. Mat. Mech. 19, 89—98 (1955) [Russisch].

Dans le cas de vitesse qui diffère peut de celle du son, l'étude d'un mouvement gazeux, plan et irrotationnel, se réduit à l'analyse des équations

$$\partial\theta/\partial y - \eta \partial\eta/\partial x = 0, \quad \partial\theta/\partial x - \partial\eta/\partial y = 0,$$

où θ désigne l'angle polaire de la vitesse et η la vitesse généralisée ($\eta > 0$ correspond à la vitesse supersonique). Se limitant au cas où les quantités η et θ sont petites, l'A. réussit à obtenir la solution analytique du problème d'écoulement gazeux par un ajutage dans le cas où la pression près de l'orifice dépasse celle dans l'atmosphère. En supposant que la vitesse d'écoulement $\eta_1 > 0$, l'A. détermine le domaine des ondes stationnaires et celui d'un courant permanent. En posant $\eta_1 = 0$ dans les formules obtenues on passe au cas limite où la vitesse d'écoulement est égale à celle du son.

C. Woronetz.

Golubev, V. V.: Zur Theorie des Flügels von kleiner Spannweite. Priklad. Mat. Mech. 19, 143—158 (1955) [Russisch].

Versuche mit Flügeln kleiner Seitenverhältnisse zeigen ein starkes Ansteigen des kritischen Anstellwinkels sowie eine Verlagerung des Druckpunktes in Richtung der Strömung. Beide Effekte können durch einen Ausgleich der Unterschiede in der Strömungsgeschwindigkeit auf der Oberseite des Flügels erklärt werden. Dieser Ausgleich kommt durch das Zuströmen der Luft um die Seitenkanten des Flügels zustande und wirkt damit ähnlich wie das bekannte Hilfsmittel des Ausblasens von Luft an der Oberseite in der hinteren Hälfte des Flügels. Auf dieser Analogie sind die Berechnungen des Verf. aufgebaut. Zum Unterschied von der üblichen Theorie des Tragflügels endlicher Länge ersetzt er das Wirbelsystem des Flügels durch eine Folge von Rechteckwirbeln, die erst an den Seitenkanten in freie Wirbelbänder übergehen. Diese Wirbelbänder liegen in einer Ebene, die senkrecht zur Ebene des als rechtwinklig angenommenen Flügels steht und durch die Seitenkanten geht. Es gelingt mit dieser Annahme, den Gewinn an Strömungsgeschwindigkeit in der Grenzschicht der oberen Flügelseite im hinteren Teil näherungsweise zu berechnen und damit die experimentell bekannten Ergebnisse zu bestätigen. Die Arbeit wurde nach dem Tode des Verf. von einem seiner Mitarbeiter überarbeitet und herausgegeben.

K. Magnus.

Patraulea, N. et E. Larisch: Une théorie des profils d'aile à volet d'intrados perméable. Comun. Acad. Republ. popul. Romine 5, 689—695, russ. u. franz. Zusammenfassg. 695, 695—696 (1955) [Rumänisch].

Patraulea, N. N.: Sur une théorie aérodynamique du parachute. Comun. Acad. Republ. popul. Romine 5, 837—841, russ. Zusammenfassg. 841 u. franz. Zusammenfassg. 842 (1955) [Rumänisch].

McCormick, B. W.: An approximation to the lift of a two-dimensional cascade of airfoils. J. aeronaut. Sci. 22, 730—731 (1955).

Indem das Profil durch einen diskreten Wirbel im Neutralpunkt ersetzt und die Abwindbedingung im „Anstellpunkt“ ($1/4$ Flügeltiefe vor der Hinterkante) erfüllt wird, gelangt Verf. zu einer expliziten Formel für den Auftriebsbeiwert eines ebenen Gitters. Das Resultat dieser Rechnung ist über dem Staffelungswinkel β mit dem Teilungsverhältnis als Parameter aufgezeichnet und stimmt mit dem exakten Auftriebsbeiwert des Streckengitters in weiten Bereichen gut, für $\beta = 0^\circ$ und $\beta = 90^\circ$ sogar exakt überein.

J. Weissinger.

Press, Harry: Time series problems in aeronautics. J. Amer. statist. Assoc. 50, 1022—1039 (1955).

This paper reviews some recent applications of random process theory to problems in aeronautical engineering. A number of random type disturbances that cause aeronautical problems are described and some of their effects on the airplane indicated. Particular attention is given to the effects of atmospheric turbulence in giving rise to airplane loads and structural stresses. The general approach used in calculating airplane responses to random disturbances by means of power spectra techniques is then described. As a concrete illustration, some results obtained in a study of missile behavior in rough-air flight are presented. An effort is also made to indicate some unsolved statistical problems that are encountered in these applications.

Zusammenfassg. des Autors.

Tesson, Fernand: *Dynamique des systèmes à nombre de particules variable. Application à l'autopropulsion.* C. r. Acad. Sci., Paris **240**, 1050—1052 (1955).

Mit Hilfe der in einer früheren Mitteilung (dies. Zbl. **64**, 196) angegebenen allgemeinen Formeln für die substantielle Ableitung von Integralen über bewegte Flüssigkeitsteile werden Schwerpunktsbewegung und Bewegung relativ zum Schwerpunkt von Strahltriebwerken untersucht. Die bekannten Erhaltungssätze für Impuls- und Drehimpuls werden dabei durch Glieder erweitert, die von dem Strahl herühren.

C. Heinz.

Levy, Salomon: *Integral methods in natural-convection flow.* J. appl. Mech. **22**, 515—522 (1955).

Die v. Karmanschen Integralbedingungen, aus denen Aussagen über Geschwindigkeit und Temperatur in der Grenzschichtströmung gewonnen werden können, werden erörtert für die ebene Strömung und die freie Konvektion in einem geheizten vertikalen Rohr, welches am Boden geschlossen ist und oben in einen Behälter mit kalter Flüssigkeit hineinragt. Andere Anwendungsbeispiele beziehen sich auf Flüssigkeiten mit kleiner Prandtl-Zahl (flüssige Metalle) und den Wärmeübergang zwischen Platten.

J. Pretsch.

Cope, W. F. and D. R. Hartree: *The laminar boundary layer in compressible flow.* Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **241**, 1—69 (1948).

This paper discusses the various methods of integrating the laminar boundary-layer equations for a compressible fluid. It is shown that when there is a pressure gradient, some of the usual methods for the incompressible case (such as the Pohlhausen method) become very complicated in the compressible case, and are probably rather inaccurate. Methods recommended include (i) integration by series expansions, (ii) step-by-step integration in one of the variables, and (iii) the method of finite differences for both independent variables. The first method is developed in detail, because even in the second method it is best to start the calculation by using some limited results obtained from series expansions. The series used are expansions in one independent variable with coefficients which are functions of the others. It is found that the independent variables can be so chosen that the differential equations for the coefficients in the expansions have the same general structure as for an incompressible fluid. The boundary conditions and the limiting forms of the equations for zero Mach number are investigated. The application of iterative methods to the equations is discussed. Finally, the methods of applying the ENIAC to obtain solutions of the above equations are described in some detail. Tables of results are given. Most of the work concerns the case of no heat transfer. Some discussion of the case with heat transfer is added at the end.

C. C. Lin (M. R. **10**, 74).

Švec, M. E.: *Über die angenäherte Lösung einiger Probleme der hydrodynamischen Grenzschicht.* Priklad. Mat. Mech. **13**, 258—266 (1949) [Russisch].

The gradients occurring in a laminar boundary layer are obtained by a method of successive approximation which consists essentially of assuming initially a linear gradient satisfying the boundary conditions and adding successive corrections obtained by converting the exact boundary layer partial differential equation to a recurrence equation. The method is applied to a diffusion boundary layer, to the normal velocity boundary layer, to the thermal boundary layer, and an approach is indicated for turbulent boundary layers. The results give the gradients as poly-

nomials in the thickness parameter $\sqrt{2} x^{1/2}$ as with the wellknown Pohlhausen solution. Comparison with exact solutions indicate good accuracy for the second order approximation. *N. A. Hall (M. R. 11, 277).*

Leigh, D. C. F.: The laminar boundary-layer equation. A method of solution by means of an automatic computer. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **51**, 320—332 (1955).

Es handelt sich um ein neues Rechenverfahren für die Fortsetzung eines Grenzschichtprofils bis zur Ablösungsstelle. Zugrunde gelegt werden die dimensionslos gemachten Grenzschichtgleichungen

$$u \partial u / \partial x + v \partial u / \partial y = U dU/dx + \partial^2 u / \partial y^2; \quad \partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$$

der ebenen stationären Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Die Randbedingungen sind $u = v = 0$ für $y = 0$ und $u \rightarrow U(x)$ mit $y \rightarrow \infty$; die Untersuchungen des Verf. beziehen sich auf den speziellen Fall $U = 1 - x/8$ und auf ein von Hartree schon früher berechnetes Profil $u(x_1, y)$ für $x_1 = 0,8$. Dieses Profil wird von $x = 0,8$ bis $x = 0,94$ in Schritten von $\Delta x = 0,01$ fortgesetzt; danach bis $x = 0,956$ in Schritten von etwa $\Delta x = 0,005$ und schließlich in noch kleineren Schritten bis zum Wert $x = 0,9584$. In der Umgebung dieser Stelle ist Grenzschichtablösung zu erwarten. — Die Fortsetzung von der Stelle x_1 bis zur Stelle $x_2 > x_1$ erfolgt näherungsweise auf Grund der Differentialgleichung

$$u_2^2 - u_1^2 - (u_2' + u_1') \cdot \int_0^y (u_2 - u_1) dy - (u_2'' + u_1'') = 2P;$$

mit $2P = U'(x_1) U'(x_1) - U'(x_2) U'(x_2)$; $u_1(y) = u(x_1, y)$; $u_2(y) = u(x_2, y)$. Statt u_2 wird aber zunächst $w = u_1 - u_2$ berechnet. Dies geschieht mittels einer Iterationsfolge w_1, w_2, \dots , wobei

$$(x_2 - x_1) w_{m+1}'' - w_m w_{m+1} + w_m' \int_0^y w_{m+1} \cdot dy = 2P \cdot (x_2 - x_1) - 2u_1 w_m + 2 \int_0^y u_1 w_m' dy$$

angesetzt wird. Schließlich werden zur Ausführung der Iteration die Ableitungen von w_m, w_{m+1} durch Differenzen ersetzt, die sich auf die Ordinaten $y = kh$ mit $k = 0, 1, \dots, N$ beziehen. Der Wert $Nh = 8$ wird als Ersatz für $y = \infty$ angesehen. Die Auflösung des Systems linearer Gleichungen für die Unbekannten $w_{m+1}(kh)$ erfolgt mit Hilfe des Choleski-Verfahrens. Die Iterationsfolge zeigt gute Konvergenz und zwar um so stärkere, je kleiner $x_2 - x_1$ ist. Richardsons h^2 -Interpolation wird zur Verbesserung des Differenzenverfahrens benutzt. Der gleiche Kunstgriff bewährt sich jedoch nicht beim Fortschreiten in der x -Richtung. Gegenüber früheren Rechnungen von Hartree zeigen die numerischen Resultate befriedigende Übereinstimmung mit theoretischen Untersuchungen von Goldstein. Das Rechenverfahren ist auf die Benutzung einer elektronischen Rechenmaschine zugeschnitten. Es wurde auf Anregung von Hartree entwickelt; die numerischen Rechnungen wurden mit Hilfe der EDSAC-Maschine in Cambridge ausgeführt. Wie zu erwarten, versagt das Verfahren bei dem Versuch, die Fortsetzung über die Ablösungsstelle hinaus zu führen. *H. Bückner.*

Binnie, A. M.: The effect of viscosity upon the critical flow of liquid through a constriction. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **8**, 394—414 (1955).

Die kritische Strömung einer Flüssigkeit mit freier Oberfläche über eine flach gewölbte Bodenerhebung wird unter Berücksichtigung einer laminaren Grenzschicht am Boden berechnet. Dabei wird das Impulssatzverfahren von Pohlhausen mit einem Polynom 4. Grades für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht angewandt. Numerische Ergebnisse für eine spezielle parabolförmige Bodenwelle werden mit und ohne Berücksichtigung der Grenzschicht verglichen. Das gleiche Verfahren wird auch auf die Drallströmung einer Flüssigkeit durch ein Rohr mit einer Verengung nach Art einer rotationssymmetrischen Lavaldüse angewandt,

wobei ein flüssigkeitsfreier Wirbelkern auf der Rohrachse vorausgesetzt wird. Auf der EDSAC durchgeführte numerische Berechnungen zeigen einen erheblichen Einfluß der Reibung. *W. Wuest.*

Low, George M.: Stability of compressible laminar boundary layer with internal heat sources or sinks. *J. aeronaut. Sci.* **22**, 329—336 (1955).

In Erweiterung der Problemstellung und Lösungsmethode von Chapman und Rubesin [*J. aeronaut. Sci.* **16**, 547—565 (1949)] auf den Fall vorgegebener Wärmequellen bzw. -senken in der Grenzschicht, die sich lediglich als zusätzlicher Summand in der Energiegleichung bemerkbar machen, wird eine Lösung der kompressiblen Grenzschichtströmung an einer ebenen Platte bei vorgegebener Wandtemperaturverteilung und konstanter Prandtl-Zahl angegeben und mittels der Kriterien von Lees und Lin [*NACA TN 1115* (1946), *NACA Rep. 876* (1947)] auf ihre Stabilität untersucht. Durch Wärmesenken in Wandnähe bzw. Quellen in der wandfernen Grenzschicht kann stets Stabilität erreicht werden. Die praktische Bedeutung dieser theoretischen Möglichkeit wird diskutiert. *J. Weissinger.*

Szablewski, W.: Zeitliche Auflösung einer ebenen Trennungsfläche der Geschwindigkeit und Dichte. *Z. angew. Math. Mech.* **35**, 464—468 (1955).

Es wird die zeitliche Ausbreitung der Vermischung zweier Flüssigkeitsstrahlen behandelt, die zur Zeit $t = 0$ durch eine Unstetigkeitsfläche der Geschwindigkeit und der Dichte getrennt sind. Die Rechnung wird nach den Methoden der Grenzschicht-Theorie für turbulente Vermischung ausgeführt, und zwar mit dem Prandtl'schen Ansatz für die scheinbare kinematische Zähigkeit, wonach diese der Geschwindigkeitsdifferenz über der Vermischungsbreite proportional ist. Die Breiten der Vermischungszonen für die Geschwindigkeit und die Dichte wachsen proportional mit der Zeit seit Beginn der Vermischung an. Die Differentialgleichungen für Impuls und Energie lassen sich durch Quadraturen integrieren und werden für mehrere Werte der Dichtedifferenz der beiden Strahlen numerisch gelöst. Es ergibt sich, daß die Mischbreiten sich nur wenig mit der Dichtedifferenz ändern, doch verschiebt sich mit wachsender Dichtedifferenz die Lage der Mischzone mehr zum leichteren Strahl hin. Die Ergebnisse lassen sich auch anwenden auf die Vermischung zweier Strahlen mit verschiedener chemischer Konzentration. *H. Schlichting.*

Oswatitsch, Klaus und Friedrich Keune: Ein Äquivalenzsatz für nichtangestellte Flügel kleiner Spannweite in schallnaher Strömung. *Z. Flugwissenschaften* **3**, 29—46 (1955).

In dieser hochbedeutenden Arbeit wird ein für die praktischen Anwendungen sehr fruchtbarer Satz hergeleitet. In einem x, y, z -Raum werde ein zu den Ebenen $z = 0$ und $y = 0$ symmetrischer Körper, der zudem schlank (insbesondere vorn also spitz) sei, in x -Richtung von einem idealen Gas angeströmt. u, v, w seien die Geschwindigkeitskomponenten in resp. x -, y -, z -Richtung. Von der vereinfachten gasdynamischen Gleichung

$$(1) \quad (1 - M^2) \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0$$

ausgehend wird mittels der Näherung

$$(2) \quad 1 - M^2 = (1 - M_1^2) [1 - (u - u_1) (c^* - u_1)^{-1}]$$

$[M_1, u_1]$ ist hierbei ein beliebiger Vergleichszustand, der zweckmäßigerweise als eine solche Unterschallströmung gewählt wird, daß die Störung der u -Komponente (vom Staupunkt und seiner unmittelbaren Umgebung abgesehen) die Größenordnung von $c^* - u_1$ hat (c^* kritische Schallgeschwindigkeit): $(u - u_1) (c^* - u_1)^{-1} \sim 1]$ in den neuen Koordinaten $\bar{x} = x, \bar{y} = y\beta, \bar{z} = z\beta$ (mit $\beta = \sqrt{1 - M_1^2}$) für das durch

$$\Phi_{\bar{x}} = (u - u_1)/u_1, \quad \Phi_{\bar{y}} = \beta^{-1} v/u_1, \quad \Phi_{\bar{z}} = \beta^{-1} w/u_1$$

definierte Störgeschwindigkeitspotential $\Phi(x, \bar{y}, \bar{z})$ die vereinfachte gasdynamische Gleichung für Schallnähe

$$(3) \quad \Phi_{xx} + \Phi_{\bar{y}\bar{y}} + \Phi_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{2} u_1 (c^* - u_1)^{-1} \partial \Phi_x^2 / \partial x$$

gewonnen. Die Fälle der linearisierten Unter- und Überschallströmungen sind hieraus dadurch als Spezialfälle zu erhalten, daß M_1, u_1 mit dem wirklichen Anströmzustand M_∞, u_∞ identifiziert und dann $(u - u_1)(c^* - u_1)^{-1}$ in (2) gegen 1 vernachlässigt wird. Die rechte Seite von (3) ist alsdann gleich Null zu setzen. — Für Körper kleiner Spannweite (2b) ist in Körpernähe u klein gegen v, w . In Abständen der Größenordnung der örtlichen Halbspannweite $\sigma(x)$ gilt daher approximativ $\Phi_{\bar{y}\bar{y}} + \Phi_{\bar{z}\bar{z}} = 0$. In Abständen, welche groß gegen b sind, wird Φ achsensymmetrisch, in Abständen, welche groß gegen die Körpertiefe sind, hat Φ schließlich Dipolcharakter. Dieser Sachverhalt gibt, analog wie in den linearisierten Fällen (Keune, dies. Zbl. 49, 133, Keune-Oswatitsch, dies. Zbl. 53, 143), Veranlassung zur Aufteilung

$$(4) \quad \Phi(x, \bar{y}, \bar{z}) = \omega(x; \bar{y}, \bar{z}) + \Omega(x, r) \quad (r = \sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2})$$

von Φ in einen der Laplacegleichung $\omega_{\bar{y}\bar{y}} + \omega_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ genügenden Beitrag der lokalen, ebenen „Querschnittsströmung“ und in einen als „Raumeinfluß“ bezeichneten drehsymmetrischen Rest. ω gibt die lokale Verdrängungswirkung des Körpers im Schnitt $x = \text{konst}$, Ω faßt die Verdrängungswirkungen aller anderen Querschnitte auf diesen Schnitt zusammen. Damit ist klar, daß ω Machzahlunabhängig ist, aber lokal die Umströmungsbedingung der Körperkontur im Querschnitt erfüllen muß, während Ω von der Machzahl abhängig sein muß. — Dem gegebenen Störkörper wird nun der „äquivalente Rotationskörper“ gegenübergestellt, dessen Querschnittsfläche für jedes x gleich ist der Querschnittsfläche $Q(x)$ des Störkörpers. Auch sein Störgeschwindigkeitspotential $\Phi_1(x, \bar{y}, \bar{z})$ kann analog zu (4) in Querströmungsbeitrag ψ und Raumeinfluß Ψ aufgeteilt werden:

$$(5) \quad \Phi_1(x, \bar{y}, \bar{z}) = \psi(x; \bar{y}, \bar{z}) + \Psi(x, r).$$

Der Äquivalenzsatz besagt dann: $\Omega(x, r) = \Psi(x, r)$ bei hinreichender Schlankheit des Störkörpers. — Für den linearisierten Unter- bzw. Überschallfall war dieser Satz bereits in Keune-Oswatitsch, loc. cit. bewiesen worden. Für den allgemeineren nichtlinearen (und damit auch für den schallnahen) Fall wird sein Beweis in vorliegender Arbeit versucht. Daman aber in der Praxis mehr an der u -Geschwindigkeit als am Potential selbst interessiert ist, wird in (4) und (5) zu den Ableitungen nach x übergegangen. Mit Φ und Φ_1 als Lösungen von (3) und mit ω und ψ als Lösungen der 2-dimensionalen Laplacegleichung findet man eine Differentialgleichung der Form $D_{xx} + D_{\bar{y}\bar{y}} + D_{\bar{z}\bar{z}} = H$ für die Ableitung D_x der Differenz $D = \Omega - \Psi$ beider Raumeinflüsse, bei der die rechte Seite H die 2. Ableitung nach x eines Ausdrucks ist, der neben ω_x, ψ_x, Ψ_x auch noch D_x selbst und zwar nichtlinear enthält. Durch Anwendung des Greenschen Satzes wird D_x als ein Raumintegral über H dargestellt und dessen einzelne Beiträge werden auf ihre Größenordnung hin untersucht. Auf diese Weise wird folgende analytische Formulierung des Äquivalenzsatzes plausibel gemacht: Bei einer beliebigen Machzahl M_∞ der Anströmung gilt in Abständen $\sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2} \sim \sigma$

$$\left(\frac{u}{u_\infty} - 1\right) - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\sigma(x)}^{\sigma(x)} q(x, t) \log \sqrt{(t - y)^2 + \bar{z}^2} dt$$

$$= \left(\frac{u}{u_\infty} - 1\right)_{\text{äqu. Rot.}} - \frac{1}{2\pi} Q_{xx}(x) \log \sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2} + O\left(\frac{Q_{xx}(0)}{2\pi} \sigma^2 |1 - M_1^2| \log |\sigma \sqrt{1 - M_1^2}|\right).$$

Hierbei ist $q(x, y)$ die Quellstärke einer Quellbelegung der Strecke $|y| \leq \sigma(x)$, welche im Schnitt x die Querschnittsumströmung der Körperkontur darstellen soll,

und für die $Q_x(x) = \int_{-\sigma(x)}^{\sigma(x)} q(x, t) dt$ gilt. M_1 ist eine geeignete mittlere Machzahl

in Körperrnähe des äquivalenten Rotationskörpers. — Es ist reichlich mit intuitiven Abschätzungen vermischte Mathematik, die hier aufgewendet wird und ein größerer mathematischer Strenge genügender Beweis des zweifellos richtigen Äquivalenzsatzes ist ein dringendes Desideratum weiterer Forschung. — Durch diesen Satz wird das dreidimensionale Problem der Umströmung eines schlanken Körpers zurückgeführt auf das zweidimensionale Problem der Umströmung des äquivalenten Rotationskörpers. Er ist daher eng mit der kürzlich freigegebenen, aber schon 1952 experimentell gefundenen „area rule“ von R. T. Whitcomb (NACA RM L52H08) verwandt. In gewisser Weise ist er allgemeiner als jene Regel, insofern als er sich nicht nur auf Schallnähe und auf den Widerstandsanstieg eines schlanken Körpers daselbst beschränkt, in gewisser Weise ist er aber auch spezieller, da er offenbar für die nähere Umgebung schallnaher, senkrechter Stöße mit lokal großem u -Gradienten versagt. — Als numerisch, durchgeführte Anwendungen behandeln die Verff. den Schwalbenschwanzflügel, den Einfluß der Verbeulung der Kopfwelle bei einem kegeligen Flügel kleiner Spannweite im Vergleich zur Kopfwelle des äquivalenten Rotationskörpers, und schließlich die Herausarbeitung der nicht-linearen Einflüsse bei der schallnahen Überschallumströmung des Kreiskegels mit anliegender Kopfwelle.

H. Behrbohm.

Keune, F. and K. Oswatitsch: An integral equation theory for the transonic flow around slender bodies of revolution at zero incidence. Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes **37**, 78 p. (1955).

Die von Oswatitsch (dies. Zbl. **34**, 271; **39**, 414) entwickelte Integralgleichungsmethode zur Berechnung der schallnahen ebenen Strömungen um symmetrische dünne Profile wird übertragen auf nicht-angestellte schlanke Drehkörper. Da die Störgeschwindigkeiten auf der Körperachse jedoch unendlich werden, wird zu dem dort jedenfalls endlichen Raumeinfluß übergegangen, was um so mehr motiviert ist, als der restliche Beitrag der Querschnittsströmung Machzahlunabhängig ist. Mit der üblichen Parabelnäherung der Stromdichte wird in geeignet affin verzerrten Koordinaten und Störgeschwindigkeiten die Differenz $D = \Omega - \Omega_L$ des Raumeinflusses Ω für die nicht-lineare und des Raumeinflusses Ω_L für die (zur gleichen Machzahl gehörige) lineare Näherung betrachtet, und für ihre Ableitung D_x die vereinfachte gasdynamische Gleichung angegeben. Ihre linke Seite ist der dreh-symmetrische Laplace-Operator, ihre rechte Seite bis auf einen konstanten Faktor die zweite Ableitung nach x des Quadrats der ersten x -Ableitung des nicht-linearen Störpotentials. — Durch Anwendung des Greenschen Satzes und unter Berücksichtigung der Stoßbedingungen beiderseits eines geraden schallnahen Stoßes wird hieraus eine nicht-lineare Integralgleichung für D_x hergeleitet. — Es genügt, D_x auf der Achse zu studieren. In die Integralgleichung eingehende Entfernungsfunktionen können durch geeignet mit der radialen Entfernung von der Achse abklingende (zunächst noch von der Gestalt des Körpers abhängige) Funktionen approximiert werden. Durch Plausibilitätsbetrachtungen, Abschätzungen der Größenordnungen und numerische Beispiele wird der Ansatz gerechtfertigt, daß auch auf die Gestaltabhängigkeit verzichtet und eine universale Abklingfunktion gewählt werden kann. Damit wird das Problem auf eine eindimensionale nichtlineare (allerdings reichlich komplizierte) Integralgleichung gebracht. — Zu deren numerischer Lösung wird ein approximatives Verfahren entwickelt, das auf der Summennäherung der Integrale basiert. Die dabei auftretenden universellen Koeffizienten werden als Matrizen in Tabellenform gegeben. Zur Ermöglichung einer einfachen Behandlung der Singularität in den Staupunkten wird eine kleine Deformation der Körperrnase und des Hecks vorgenommen und deren Berechtigung dargetan. Die Parabelspindel von 14,6% Dicke wird für zwei unterkritische Machzahlen durchgerechnet und der Unterschied zwischen nichtlinearer und linearer Näherung angegeben. Eigentlich transsonische Beispiele sind aber noch nicht durchgeführt.

H. Behrbohm.

Guderley, K. Gottfried: The flat plate with an angle of attack in a choked wind tunnel. *J. aeronaut. Sci.* **22**, 844—866 (1955).

The flow over an inclined flat plate in a choked wind tunnel is discussed and it is formulated with transsonic approximations as the corresponding boundary value problem of the Tricomi equation for the stream function in a properly normalized hodograph plane. It is assumed that the choking Mach Number is very close to one, thus requiring that the tunnel is sufficiently wide. Under this assumption the solution appears as the solution at Mach number one with certain correction terms added. — In a first step, by linear superposition of known particular solutions containing the right singularities, the most general solution is constructed that fulfills the boundary conditions at the plate. It contains an infinity of undetermined coefficients. In a second step, likewise by linear superposition, the most general solution is constructed that fulfills the conditions at the tunnel wall. It, too, contains an infinity of undetermined coefficients. The choking Mach Number being sufficiently near to one these two general solutions have a common region of validity thus yielding an infinite system of equations for the coefficients undetermined in the previous steps. This system can be solved by a development with regard to the deviation of the choking Mach number from one and leads, finally, to a series representation for the stream function. Together with the physical coordinates the pressure distribution over the plate is then easily obtained. — The discussion reveals some interesting features of practical importance for wind tunnel testing only one of which may be cited here. Comparison of the pressure distribution in a free stream at Mach number one with the pressure distribution in a choked tunnel for a plate whose length is equal to 0,1 of the tunnel width and with an angle of attack of 0,1 radian gives rather small differences in both distributions which shows that even unsymmetric bodies can be measured in a choked tunnel with no stronger influence of the wall. This agrees with previous results by B. Marschner for the wall influence in the presence of choking on the pressure distribution over a wedge.

H. Behrbohm.

Cheng, H. K.: Aerodynamics of a rectangular plate with vortex separation in supersonic flow. *J. aeronaut. Sci.* **22**, 217—226 (1955).

Es wird für eine angestellte Rechteck-Platte bei Überschallgeschwindigkeit das Strömungsfeld in der Umgebung der seitlichen Kante näherungsweise rechnerisch behandelt. Die hier beobachtete Ablösung eines freien Wirbels wird im Rahmen der reibungslosen Strömung durch gewisse Singularitäten mit Wirbelcharakter dargestellt. Die Stärke des Wirbels wird aus zwei Bedingungen bestimmt: 1. die Strömungsgeschwindigkeit an der Kante soll endlich bleiben, 2. auf den freien Wirbel wirken keine Kräfte. Gewisse nichtlineare Erscheinungen in der Auftriebscharakteristik solcher Flügel lassen sich auf diese Weise erklären. *H. Schlichting.*

Fell, J. and D. C. M. Leslie: Second-order methods in inviscid supersonic theory. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **8**, 257—265 (1955).

Verff. leiten ein partikulares Integral der Gleichung

$$L(\varphi) = \varphi_{yy} + \varphi_{zz} - \beta^2 \varphi_{xx} = 2M^2 [(N-1)\beta^2 \Phi_x \Phi_{xx} + \Phi_y \Phi_{xy} + \Phi_z \Phi_{xz}],$$

wo $L(\Phi) = 0$, her und zeigen für den axialsymmetrischen Fall seine Übereinstimmung mit einer Lösung von Dyke's (dies. Zbl. **43**, 404). *J. Weissinger.*

Liepmann, Hans Peter: An analytic method for the design of two-dimensional asymmetric nozzles. *J. aeronaut. Sci.* **22**, 701—709 (1955).

Asymmetrische gekrümmte Düsen interessieren in der Windkanaltechnik des Überschalls, da mit ihrer Hilfe durch relative Verschiebung der einen Wand gegen die andere eine kontinuierliche Machzahlveränderung in der Meßstrecke erzielt werden kann. Zur Berechnung solcher Düsen wird von einer der Wände, C_0 , ausgegangen, die durch ihren Krümmungsverlauf charakterisiert sei. Die Schar der Parallelkurven zu C_0 und deren Normalen werden als x, y -Koordinatenlinien eingeführt,

und Kontinuitätsgleichung und Bedingung der Wirbelfreiheit werden in diesen krummlinigen Koordinaten aufgeschrieben und durch das Geschwindigkeitspotential φ resp. die Stromfunktion ψ integriert. Mit φ, ψ als unabhängigen Veränderlichen ergibt sich dann unter Zuhilfenahme des Energiesatzes isentroper Gasströmungen und der Zustandsgleichung ein partielles Differentialsystem, das durch Reihenansätze nach Potenzen von ψ mit φ -abhängigen Koeffizienten für die vier gesuchten Größen: x, y , Geschwindigkeit w und Strömungsrichtung θ (gegen die krummlinige x -Achse) gelöst wird. Dazu wird eine analytische, vom Unterschall zur gewünschten Überschallmachzahl führende Geschwindigkeitsverteilung längs C_0 vorgeschrieben. Strenge Existenz-, Konvergenz- und Eindeutigkeitsbetrachtungen werden nicht angestellt, und nur Glieder 1. Ordnung in der Krümmung von C_0 werden mitgeführt. Die Lösungen bestimmen zu jedem hinreichend kleinen Wert $\psi = \text{const}$ eine zweite Düsenwand C_1 im Unterschall und im Expansionsteil des Überschalls, d. h. bis zum Wendepunkt von C_1 und auf der durch ihn gehenden, gegen C_0 hin laufenden Machwelle. Die Differentialgleichung dieser Welle wird durch das Runge-Kutta-Verfahren numerisch integriert. Mittels der Kenntnis der Strömungszustände auf dieser Welle ist es dann leicht, den anschließenden Kompressionsteil von C_1 zu ermitteln. — Schließlich wird die Veränderung der Entwurfsmachzahl der Meßstrecke bei relativer Translation von C_1 gegen C_0 studiert und ein Iterationsverfahren hierfür entworfen.

H. Behrbohm.

Schlögl, R.: Adiabatische Kompression eines idealen Gases bei endlichen Kolbengeschwindigkeiten. Z. Phys. **141**, 585—591 (1955).

Verf. stellt für ein ideales Gas, dessen Molwärme als temperaturunabhängig angenommen wird, eine Zustandsgleichung für adiabatische (wärmeisolierte) Kompression durch endlich große konstante (also nicht unendlich kleine) Kolbengeschwindigkeit auf. Für jede elementare Druckwelle wird die Hugoniot-Gleichung aufgestellt, so daß ein System von rekursiven Gleichungen entsteht. Dieses enthält natürlich den jeweiligen Abstand des Kolbens vom (die Druckwellen reflektierenden) geschlossenen Rohrende und ist sehr mühsam zu lösen. Die Annahme $C_v = \frac{1}{2} R f$ (f Zahl der Freiheitsgrade) gestattet es jedoch, einen direkten Zusammenhang zwischen Anfangszustand (bevor der Kolben ruckartig auf die konstante Geschwindigkeit v beschleunigt wird) und Endzustand (Kolben hat Endstellung erreicht) herzustellen. Diese Beziehung enthält noch die Anzahl n der Druckwellen (sowohl hin- als auch zurücklaufende). Für $n \gg a$, wo

$$a = \frac{1}{2} (\kappa + 1) (\kappa - 1)^{-1} \left\{ 1 + \sqrt{1 + 16/M^2 (\kappa + 1)^2} \right\}, \quad \kappa = c_p/c_v,$$

M Machsche Zahl, ergibt sich als Adiabate („irreversible“ Adiabate, da die Entropie ansteigt)

$$p V^\kappa = p_0 V_0^\kappa \cdot (M^2/f^2) \{(a-1)(a-2) \cdots (a-f)\}^{2/f}$$

und für einatomige Gase ($f = 3$) ergibt sich für $M \ll 1$

$$p V^\kappa = p_0 V_0^\kappa \cdot \frac{10}{27} M^2 [1 - (V/V_0)^{2/3}].$$

Weitere Untersuchungen (zwei- und dreiatomiges Gas) zeigen, daß die Abweichungen von der reversiblen Adiabate beim einatomigen Gas am stärksten sind. Weiters werden Stoßwellengeschwindigkeit und Entropiezunahme berechnet. Die numerische Diskussion der Korrekturfaktoren zeigt, daß bei großen Kolbengeschwindigkeiten — und bei großen Kolbenbeschleunigungen! — die Abweichungen von der Adiabate, wie bekannt, sehr groß sind. Aber auch für sehr kleine Kolbengeschwindigkeiten wird man den Entropiezuwachs berücksichtigen müssen — die Verwendung der Adiabatengleichung in der instationären Gasdynamik ist also auf sehr kleine Volumänderungen zu beschränken.

F. Cap.

Küssner, H. G.: Aeroelastische Probleme des Flugzeugbaus. Z. Flugwissenschaften **3**, 1—18 (1955).

Zusammenfassender Bericht über theoretische und praktische Fragen des Flügelflatterns und verwandter Erscheinungen mit einem Literaturverzeichnis von etwa 85 Arbeiten. Inhaltsverzeichnis: 1. Einleitung. 2. Kennzeichnung der Flugzeugschwingungen. 3. Theorie der Standschwingungen. 4. Theorie der Luftkräfte der schwingenden Tragfläche. 5. Zweidimensionale Lösungen. 6. Dreidimensionale Lösungen. 7. Verbesserung und experimentelle Prüfung der Theorie. 8. Matrizen-theorie des Flügelflatterns. 9. Numerische Lösungsverfahren. 10. Flattern der Beplankung. 11. Der Standschwingungsversuch. 12. Modellversuche. 13. Flugversuche mit der Großausführung. 14. Verhütung des Flatterns durch Bauvorschriften. — Die Abschnitte 4—5 enthalten einen Abriß der vom Verf. entwickelten Tragflügeltheorie (dies. Zbl. **55**, 188). *J. Weissinger.*

Jordan, Peter F.: Some series developments in unsteady aerodynamics. *J. aeronaut. Sci.* **22**, 722—724 (1955).

Verf. gibt für die grundlegenden Integrale der zweidimensionalen Flattertheorie Potenzreihenentwicklungen an, die nicht nur für numerische Rechnungen — besonders mit elektronischen Maschinen — sondern auch für analytische Untersuchungen (z. B. Grenzprozesse $M \rightarrow 1 - 0$ und dgl.) gut geeignet sind (vgl. auch Zartarian und Voss, dies. Zbl. **51**, 184). *J. Weissinger.*

Adachi, Ryuzo: On the form of a surface of liquid which is in equilibrium under pressure and surface-tension. *Kumamoto J. Sci., Ser. A* **2**, 210—212 (1955).

Die Eulersche Differentialgleichung für den Gleichgewichtszustand der Oberfläche einer Flüssigkeit läßt sich i. a. nicht analytisch lösen. Wenn Innen- und Außendruck gleich sind, ist es die Differentialgleichung einer Minimalfläche. Bei Rotationssymmetrie entsteht eine gewöhnliche, nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die numerisch integriert werden kann. Auf einige wichtige Sonderfälle hinsichtlich des Druckanteiles an der potentiellen Energie wird hingewiesen. *H. Molitz.*

Oroveanu, T.: L'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux peu inhomogène. *Comun. Acad. Republ. popul. Romine* **5**, 843—845, russ. u. franz. Zusammenfassg. 846 (1955) [Rumänisch].

Wärmelehre:

Lutz, Otto: Technische Reaktionsthermodynamik. *Z. Flugwissenschaften* **3**, 151—159 (1955).

Einleitend wird gezeigt, daß Ausströmungsvorgänge in reagierenden Gasgemischen bei höheren Temperaturen ($> 1000^\circ \text{K}$) stets so ablaufen, daß man praktisch an allen Stellen mit chemischem Gleichgewicht rechnen kann. Die Annahme eines eingefrorenen Zustandes kann daher zu erheblichen Fehlern führen. Die vom Verf. eingeführten — und für mehrere Gase tabulierten — Reaktionsenthalpien erlauben die Zustandsgleichungen für reagierende Gemische aufzustellen und verschiedene andere interessierende Größen, wie Verbrennungstemperatur und Heizwert, leicht zu entnehmen. Einige Anwendungen werden kurz besprochen. *J. Meixner.*

Fujita, Shigeichi: Quasistationary process. II. Connected systems and living organism. *Kumamoto J. Sci., Ser. A* **2**, 174—183 (1955).

Dugas, René: Einstein et Gibbs devant la thermodynamique statistique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **241**, 1685—1687 (1955).

Haar, D. ter: On the use of grand ensembles in statistical mechanics. A new derivation of Saha's formula. *Amer. J. Phys.* **23**, 326—331 (1955).

A brief historical survey of the grand canonical ensemble is given, and this ensemble is used to present a simple derivation of the mass action law for ionisation and dissociation equilibrium. — The basic idea is as follows. For a system of non-interacting particles of type i (n_i particles in single particle state of energy ϵ_i and de-

generacy g_s) the logarithm of the grand partition function is ($\beta = 1/kT$, $v_i kT =$ partial chemical potential)

$$q = \log \left\{ \exp \left(v_i \sum_s n_s \right) \left(\prod_u \frac{g_u^{n_u}}{n_u!} \right) \exp \left(-\beta \sum_r n_r \varepsilon_r \right) \right\} = \\ = \log \left\{ \prod_s \sum_{n_s=0}^{\infty} [g_s \exp (v_i - \beta \varepsilon_s)]^{n_s} / n_s! \right\} = \sum_s g_s \exp (v_i - \beta \varepsilon_s) = Z_i \quad (\text{say}).$$

If different types of particles are present and may be regarded as non-interacting then $q = Z_1 + Z_2 + \dots$. The equilibrium concentrations of these various species satisfy $c_i = V^{-1} \partial q / \partial v_i$, where V is the volume of the system. It follows that for the reaction $A + B \rightleftharpoons AB$ for the formation and dissociation of a diatomic molecule $c_A c_B / c_{AB} = Z_A Z_B / Z_{AB} V$. Some simple applications of this result are given.

P. T. Landsberg.

Gatto, R.: The formalism of second quantization in quantum statistical mechanics. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 2, 592—604 (1955).

The advantages of using the methods of second quantization in the formulation of quantum statistical mechanics are pointed out.

P. T. Landsberg.

Bingen, R.: Sur la propagation des ondes acoustiques dans les cristaux. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. 41, 741—758 (1955).

Die Ausbreitung akustischer Wellen im Kristallgitter wird untersucht mit dem besonderen Ziel, den Einfluß der Dispersion bei kurzen Wellenlängen aufzudecken. Zunächst wird die Bewegung der Gitterpunkte zu einer Zeit t durch ihre Bewegungen zur Zeit $t = 0$ ausgedrückt. Dies geschieht mit Hilfe sogenannter Einflußfunktionen, welche als Koeffizienten auftreten. Sie werden asymptotisch, d. h. für große t untersucht. Dazu wird die Ausbreitung einer Störung berechnet, bei der anfänglich ein Atom in Bewegung ist, während das übrige Gitter ruht. Es werden insbesondere die nähere Umgebung der Wellenfront, und die Gebiete innerhalb und außerhalb von ihr, getrennt behandelt und Gesetze für das Abklingen der Störung nach langer Zeit ermittelt.

J. Meixner.

Prigogine, I. et R. Bingen: Sur la mécanique statistique des phénomènes irréversibles. IV. *Physica* 21, 299—311 (1955).

Fortsetzung der Arbeit von G. Klein und I. Prigogine, dies. Zbl. 51, 427. Die Ergebnisse der vorstehend referierten Arbeit werden zusammengefaßt und erweitert. Es wird, mit Hilfe der asymptotischen Eigenschaften der Einflußfunktionen gezeigt, daß alle anfänglichen lokalen Verteilungsfunktionen sich im Laufe der Zeit den Gaußschen Verteilungsfunktionen mit räumlicher Homogenität nähern. Auch die zweiten Momente streben asymptotischen Werten zu; sie sind jedoch nicht gleich den Werten für einen Kristall im thermodynamischen Gleichgewicht außer wenn anfänglich Gleichverteilung zwischen den Normalschwingungen und keine Korrelation zwischen den Phasen besteht. Die einzige Voraussetzung der Überlegungen ist, daß Korrelationen über Abstände von den Dimensionen des Kristalls verschwinden.

J. Meixner.

Hooyman, G. J., P. Mazur and S. R. de Groot: Coefficients of viscosity for a fluid in a magnetic field or in a rotating system. *Physica* 21, 355—359 (1955).

Die linearen Beziehungen zwischen den Komponenten des Reibungstensors und den Deformationsgeschwindigkeiten werden für eine Flüssigkeit oder ein Gas im äußeren Magnetfeld untersucht. Unter Berücksichtigung der Isotropie und der Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen reduziert sich das Koeffizientenschema auf sieben unabhängige Koeffizienten, von denen fünf die gewöhnliche Viskosität, einer die Volumenviskosität und der letzte einen Quereffekt zwischen beiden Viskositäten beschreiben.

J. Meixner.

Hooyman, G. J., S. R. de Groot and P. Mazur: Transformation properties of the Onsager relations. *Physica* 1, 360—366 (1955).

Die Invarianz der Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen bei gleichzeitigen Transformationen der Kräfte und Flüsse wird für skalare und vektorielle Erscheinungen untersucht. Sie wird hier bewiesen, indem statt von der quadratischen Form der Entropieerzeugung von der Abweichung der Entropie vom Gleichgewichtswert ausgegangen wird. Wesentlich ist hierbei, daß die neuen Kräfte ebenso wie die ursprünglichen die Ableitungen der Entropie nach den entsprechenden konjugierten Variablen sind. — Bemerk. des Ref.: Auf dasselbe läuft es hinaus, wenn man nicht die Invarianz der quadratischen Form, sondern der bilinearen Form der Entropieerzeugung zugrunde legt.

J. Meixner.

Rastogi, R. P. and R. C. Shrivastava: Thermodynamics of irreversible processes applied to thermal transpiration. Proc. nat. Inst. Sci. India **21**, 98—103 (1955).

Mit den Methoden der Thermodynamik irreversibler Prozesse wird die Theorie der thermischen Transpiration für Reaktionen vom Typ $x A \rightleftharpoons y B + z C$ in allen Einzelheiten ausgeführt.

J. Meixner.

Verschaffelt, J. E.: Sur la centrifugation. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci. V. Sér. **41**, 709—717 (1955).

Je traite à ma manière le problème de la centrifugation d'un fluide mixte.

Zusammenfassg. des Autors.

Barenblatt, G. I.: Über einige Fragen der Theorie der Bewegung von schwebenden Teilchen in einer turbulenten Strömung. Vestnik Moskovsk. Univ. **10**, Nr. 8 (Ser. fiz. mat. estest. Nauk Nr. 5), 53—56 (1955) [Russisch].

Prigogine, I. et G. Mayer: Fluctuations dans les systèmes stationnaires de non équilibre. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **41**, 22—29 (1955).

Die Wahrscheinlichkeit von Schwankungen um stationäre Zustände, die nicht Gleichgewichtszustände sind, wird in Zusammenhang mit den Abweichungen von der minimalen Entropieproduktion gebracht. Die klassische Einsteinsche Schwan-
kungsformel erweist sich auch für stationäre Zustände als richtig, solange das Theorem der minimalen Entropieproduktion im stationären Zustand gültig ist. Als Beispiel werden die Schwankungen des thermomolekularen Drucks näher besprochen.

J. Meixner.

Avramescu, A.: Contribution au calcul de l'échauffement transitoire des coupe-circuits é fusibles. Comun. Acad. Republ. popul. Romîne **5**, 697—706, russ. u. franz. Zusammenfassg. 707, 707—708 (1955) [Rumänisch].

● **Schneider, Paul J.:** Conduction heat transfer. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co., Inc. 1955. XI, 395 p. 165 illus. \$ 10,50.

Il volume è dedicato agli studenti di un corso universitario sulla conduzione del calore ed illustra i vari metodi, analitico, numerico, grafico e sperimentale, con i quali si può risolvere un assegnato problema di conduzione del calore. Dei 13 capitoli il primo costituisce una necessaria introduzione; il secondo raccoglie alcuni classici esempi relativi al caso unidimensionale stazionario; il terzo contiene un felice richiamo sulle funzioni di Bessel e di Lagrange e sulla sviluppabilità in serie di tali funzioni; il quarto è dedicato ai modi per accrescere o diminuire il processo di propagazione del calore in una struttura; il quinto contiene un richiamo sulle serie di Fourier e sui principali metodi di risoluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali (separazione delle variabili, trasformata di Laplace); il sesto è dedicato alla soluzione di problemi stazionari di conduzione bidimensionali; nel settimo si illustrano i metodi numerici di Emmons e Southwell per il caso stazionario; nell'ottavo si considerano sistemi con sorgenti stazionarie di calore; il nono è dedicato ai sistemi porosi, sempre in regime stazionario; nei capitoli dieci ed undici vengono illustrati classici problemi di conduzione non stazionari; il capitolo dodici tratta della soluzione numerica di problemi non stazionari; nel capitolo tredici infine si illustrano alcuni metodi sperimentali, che offrono analogia con problemi connessi con la teoria del potenziale. Il continuo riferimento ad esempi di alto

interesse applicativo, atti a mettere in luce i pregi di un metodo nei confronti di un altro, rendono il libro interessante ed utile a chiunque si occupi di problemi di conduzione del calore sia dal punto di vista teorico che da quello applicativo. Alcuni argomenti (cap. 4, 7 e 12) compaiono per la prima volta in un trattato sulla conduzione del calore. Sobri riassunti e felici riepiloghi aprono e chiudono i tredici capitoli. Diagrammi, nitide figure, tabelle, numerosi esercizi risolti o proposti, vasti riferimenti bibliografici ed un accurato indice per materia arricchiscono e completano l'opera, ottimamente presentata dal punto di vista tipografico. *G. Sestini.*

Grosh, R. J., E. A. Trabant and G. A. Hawkins: Temperature distribution of solids of variable thermal properties heated by moving heat sources. *Quart. appl. Math.* **13**, 161—167 (1955).

Si considera il problema della distribuzione della temperatura in un solido le cui proprietà fisiche (densità, calore specifico, conduttività) variano con la temperatura, in modo però che resti costante la diffusività del mezzo, nell'ipotesi che il corpo riceva calore da una distribuzione di sorgenti mobili. Vengono trattati il caso lineare, due casi piani (piastra finita ed infinita) e due casi spaziali (solido infinito e solido limitato da una superficie cilindrica). *G. Sestini.*

Vodička, Václav: Steady temperature in multilayer bodies. *Appl. sci. Research* **A 5**, 321—326 (1955).

Si considera il sistema differenziale:

$$(1) \quad \begin{aligned} d^2 u_i / d\xi^2 + (\omega / \xi) du_i / d\xi &= 0, \quad \xi_i < \xi < \xi_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ -\chi du_1 / d\xi + u_1 &= A, \quad \xi = \xi_1; \quad v du_n / d\xi + u_n = B, \quad \xi = \xi_{n+1}; \\ du_i / d\xi + h_{i+1} (u_i - u_{i+1}) &= 0, \quad du_{i+1} / d\xi + h'_{i+1} (u_i - u_{i+1}) = 0, \\ \xi &= \xi_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \end{aligned}$$

dove $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \xi_{n+1}$, e $A, B, \chi \geq 0$, $v \geq 0$, $\omega \geq 0$, $h_i > 0$, $h'_i > 0$ sono costanti. Questo sistema può tradurre il problema unidimensionale stazionario della determinazione della temperatura in un corpo composto da conduttori omogenei e termicamente isotropi, in perfetto contatto tra loro. Nella nota si raccolgono in un'unica espressione le soluzioni, in parte ben note, dei problemi stazionari di flusso di calore lineare, cilindrico e sferico, tradotti da (1) ($\omega = 1$, $\omega = 2$). *G. Sestini.*

Vodička, Václav: Hollow circular cylinder under periodic fluctuations of temperature. *Appl. sci. Research*, **A 5**, 327—337 (1955).

L'A. estende al cilindro circolare, omogeneo, isotropo, finito con una cavità coassiale alcuni risultati da lui precedentemente stabiliti per il cilindro circolare finito (cf. questo *Zbl.* **64**, 212) che cede calore, secondo la legge di Newton, ad un mezzo la cui temperatura varia periodicamente col tempo. La soluzione del sistema differenziale, che traduce il problema, è conseguita mediante quattro sistemi ausiliari le cui soluzioni vengono formalmente espresse, col classico metodo delle soluzioni elementari, mediante sviluppi in serie di funzioni ortogonali, legate alla funzione di Bessel.

G. Sestini.

Vodička, Václav: Eindimensionale Wärmeleitung in geschichteten Körpern. *Math. Nachr.* **14**, 47—55 (1955).

Si considera il seguente sistema differenziale di tipo parabolico in due variabili ξ et t :

$$\begin{aligned} a_i^2 [\partial^2 u_i / \partial \xi^2 + (c / \xi) \partial u_i / \partial \xi] &= \partial u_i / \partial t, \quad \xi_i < \xi < \xi_{i+1}, \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \dots, \\ u_i(\xi, 0) &= f_i(\xi), \quad \xi_i < \xi < \xi_{i+1}; \quad 0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \xi_{n+1}; \\ \partial u_1 / \partial \xi - h'_0 u_1 &= 0, \quad \xi = \xi_1; \quad \partial u_n / \partial \xi + h_n u_n = 0, \quad \xi = \xi_{n+1}; \\ \partial u_i / \partial \xi + h_i (u_i - u_{i+1}) &= 0, \quad \partial u_{i+1} / \partial \xi + h'_i (u_i - u_{i+1}) = 0, \\ \xi &= \xi_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \end{aligned}$$

con c, h_i, h'_i, h'_0 costanti > 0 e $f_i(\xi)$ assegnate funzioni soddisfacenti alle condizioni

di integrabilità. Del sistema è data la soluzione formale col metodo delle soluzioni elementari, mediante serie di funzioni ortogonali legate alle funzioni di Bessel. I risultati vengono applicati alla soluzione di problemi unidimensionali di propagazione del calore (caso piano, sferico e cilindrico) per corpi composti da n conduttori omogenei e termicamente isotropi, aventi diverse caratteristiche termiche e in perfetto contatto tra loro.

G. Sestini.

Elektrodynamik. Optik:

Armstrong, H. L.: On deriving the formulas for electromagnetic and other forces from the interaction energy of the fields. Amer. J. Phys. **23**, 582—584 (1955).

Es wird eine Behandlung der Kraft- und Energiereaktionen der elektromagnetischen Theorie gegeben, in welcher die Energiedichte des Feldes als fundamental postuliert wird und die Kraftbeziehungen durch Transformationen von Vektorintegralen hergeleitet werden. Die Betrachtung der Wechselwirkungsenergien der Felder zeigt interessante Analogien zu den Methoden der Wellenmechanik.

P. Urban.

Marx, D. und G. Györgyi: Über den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes in Dielektrika. Ann. der Physik, VI. F. **16**, 241—256 (1955).

Die Verff. diskutieren ausführlich die Vorteile der Verwendung des von Abraham angegebenen Energie-Tensors im Vergleich zu dem von Minkowski angegebenen. Den prinzipiellen Schlüssen der Verff. kann sich der Ref. nicht in allen Punkten anschließen.

F. Penzlin.

Freud, G.: Über die Stromverdrängung in kreiszylindrischen Leitern. Acta techn. Acad. Sci. Hungar. **10**, 397—405, russ. Zusammenfassg. 405 und engl. u. franz. Zusammenfassg. 406 (1955).

L'A. determina, mediante le funzioni di Bessel di ordine zero e di ordine uno, la distribuzione delle correnti alternative e le perdite per calore di Joule in un cilindro circolare immerso in un campo magnetico alternativo uniforme, con direzione perpendicolare all'asse.

D. Graffi.

• **Sigorskij, V. P.:** Allgemeine Vierpoltheorie. Kiev: Verlag der Akademie der Wissenschaften der Ukrainischen SSR 1955. 316 S. R. 12,15 [Russisch].

Dieses Lehrbuch ist in erster Linie für den Praktiker gedacht. Daher sind die mathematischen Anforderungen gering gehalten. Verf. entwickelt zunächst die Begriffe und Anwendungsmöglichkeiten der Vierpoltheorie. Der wesentliche Teil des Buches besteht aus ausführlich durchgerechneten wichtigen Spezialfällen des allgemeinen Vierpols. Neben vielen Zahlenbeispielen seien besonders zahlreiche Tabellen hervorgehoben, in denen zu vielen Schaltbildern die Parameter des jeweiligen Vierpols angegeben werden. Die tieferliegenden Sätze der Theorie werden ohne Beweise erwähnt. Besonders interessiert sich Verf. für die Koppelung von Vierpolen, für die Variation der Parameter, für Vierpole mit Gegeninduktivität und für solche, die Röhren enthalten. Die 297 Schriftennachweise (davon 228 sowjetische) beziehen sich vorwiegend auf Arbeiten aus den Anwendungen dieser Theorie.

W. Haacke.

Ajzerman, M. A. und F. R. Gantmacher: Über eine Klasse dynamischer Aufgaben, die sich auf die Theorie der Relaissysteme reduzieren. Priklad. Mat. Mech. **19**, 222—224 (1955) [Russisch].

In der Theorie erzwungener Schwingungen von dynamischen Systemen, die ein nichtlineares Glied enthalten, werden Gleichungssysteme von der Form:

$$\sum_{j=1}^n d_{ij}(p) x_j - M_i z = A_i \sin(\Omega t + \varphi_i); \quad z = f(x_n)$$

($i = 1, \dots, n$) ($p = d/dt$) untersucht. Die Verff. zeigen nun, daß der Fall, in dem $f(x_k) = r x_k + a \operatorname{sign} x_k$ ist, zurückgeführt werden kann auf den in früheren Arbeiten allgemein gelösten Fall einer Relaischarakteristik $f(x_k) = a \operatorname{sign} x_k$. In Relais-

systemen hat man zur Bestimmung symmetrischer periodischer Lösungen die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $D(p) = 0$ zu bestimmen. Statt dessen müssen für $r \neq 0$ die Wurzeln einer ergänzten Gleichung $D(p) - rK(p) = 0$ ermittelt werden. Die Aufgabe, die stationären periodischen Lösungen zu suchen, reduziert sich also auf die Untersuchung des Einflusses von r auf die Lage der Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Es wird gezeigt, daß dieser Einfluß besonders leicht zu ermitteln ist, wenn man sich der Amplituden-Phasen-Charakteristiken (Ortskurven) bedient. r bewirkt lediglich eine Parallelverschiebung der Ortskurven während der kritische Punkt unverändert bleibt.

K. Magnus.

Gavrilov, M. A.: Relais-Systeme mit Ventilnetzen. Avtomat. Telemekh. 16, 328—343 (1955) [Russisch].

Verf. entwickelt an einer Anzahl von Beispielen eine rechnerische Methode, die es gestattet, gewisse im Titel genannte Netze durch gleichwertige einfachere zu ersetzen.

W. Haacke.

Rubinowicz, A.: Fortpflanzung von Sprüngen elektromagnetischer Feldstärken und Eindeutigkeitsbeweis für das Anfangswertproblem der Maxwell'schen Gleichungen. Acta phys. Polon. 14, 209—224 (1955).

Verf. gibt in der vorliegenden Arbeit einen Eindeutigkeitsbeweis für die Lösung des Anfangswertproblems der Maxwell'schen Gleichungen. Er geht dabei insofern über frühere derartige Beweise hinaus, als daß jetzt Sprünge der elektromagnetischen Feldstärken auf gewissen Flächen, die sich mit beliebigen Geschwindigkeiten in die Richtung ihrer Normalen bewegen dürfen, noch zugelassen sind. Die Methode schließt sich eng an die schon früher [Phys. Z. 27, 707 (1926)] vom selben Verf. eingeführte an.

F. Penzlin.

Rubinowicz, A.: Der Satz von der Erhaltung des Impulses und die Fortpflanzung von Sprüngen elektromagnetischer Feldstärken. Acta phys. Polon. 14, 225—233 (1955).

Im Anschluß an die vorsteh. besprochene Arbeit untersucht der Verf. den Impulsbeitrag einer sich bewegenden Sprungfläche der elektromagnetischen Feldstärken. Nimmt man an, daß keine elektrischen oder magnetischen Flächenströme in dieser Fläche auftreten (dann muß sich die Fläche mit Lichtgeschwindigkeit bewegen), so ergibt sich ein verschwindender Beitrag nur, wenn man den Minkowski'schen Energie-Impuls-Tensor zugrunde legt, während der Abrahamsche Tensor einen nicht verschwindenden Beitrag liefert. Verf. betrachtet dies als ein Argument gegen die Verwendung des Abrahamschen Tensors.

F. Penzlin.

Stepanov, K. N.: Über die Ausbreitung der Wellenfront in einem Medium mit Streuung. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1955, 63—66 und russ. Zusammenfassg. 66 (1955) [Ukrainisch].

Nach den gewöhnlichen Methoden der Theorie der Charakteristiken wird gezeigt, daß die Gleichung für die Ausbreitung der Front einer elektromagnetischen Welle im streuenden Medium mit der entsprechenden Gleichung für das Vakuum übereinstimmt. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Komponenten des Tensors der Dielektrizitätskonstante $\epsilon_{ik}(\omega)$ und die Komponenten des Tensors der magnetischen Permeabilität $\mu_{ik}(\omega)$ gegen δ_{ik} streben, wenn die Frequenz ω gegen Unendlich strebt. Die $\epsilon_{ik}(\omega)$ und $\mu_{ik}(\omega)$ können Funktionen der Koordinaten sein.

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Schelkunoff, S. A.: On representation of electromagnetic fields in cavities in terms of natural modes of oscillation. J. appl. Phys. 26, 1231—1234 (1955).

Am einfachen Beispiel eines parallelepipedischen Resonators werden verschiedene Ausdrücke für seine Klemmenadmittanz in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz aufgestellt und besonders diskutiert. Es zeigt sich, daß die für die Admittanz errechneten Formeln in ihrem Aufbau davon abhängen, ob z. B. die Anregung des Feldes in der Mittelebene des Resonators gemäß einer TE_{10} - oder einer TE_{01} -Wellen erfolgt. Wird auf diese Unterschiede nicht geachtet, so kann es unter Umständen vorkommen, daß das System der Eigenfrequenzen nicht vollständig ist.

H. Buchholz.

Wait, James R.: On the scattering of spherical waves by a cylindrical object. Appl. sci. Research, B 4, 464—468 (1955).

Verf. vergleicht das Fernverhalten des durch die Beugung einer ebenen bzw. sphärischen Welle an einem Kreiszylinder erzeugten Streufeldes. Die Polarisationsrichtung sei dabei parallel der Zylinderachse. Ist q_0 die Quellpunkts- und q die Aufpunktsentfernung von der Zylinderachse, so ergibt sich das Intensitätsverhältnis beider Wellen zu $\sqrt{q_0/(q_0 + q)}$.

F. Penzlin.

Lindroth, Kristen: Reflection of electromagnetic waves from thin metal strips. (Passive antennae.) Tekn. Högskol. Handl. Nr. 91, 60 p. (1955).

• **Martin, L. C.:** Geometrical optics. („Science Degree“ Series.) London: Pitman and Sons 1955. VII, 215 p. 131 Fig. 22/6 net.

Das Buch ist als Lehrbuch für Studenten der Physik gedacht, die die geometrische Optik nicht als Spezialgebiet gewählt haben, aber für ihre speziellen experimentellen Untersuchungen optische Geräte und Instrumente benutzen und dementsprechend einen genügenden Einblick in deren Grundlagen und Gesetzmäßigkeiten erwerben müssen. Diesem Zwecke wird das Buch in vollem Umfange gerecht. Es behandelt die Gesetze der geometrischen Optik, die paraxiale Theorie der optischen Systeme, die optischen Instrumente. Es geht weiter auf den Zusammenhang und die gegenseitigen Beziehungen zwischen der geometrischen und der physikalischen Optik ein, wie dies ja zum Verständnis z. B. des Begriffes der „Auflösung“, d. h. der Trennfähigkeit von Bildern benachbarter Objektpunkte notwendig ist. In dem Kapitel „Beobachtung und Aufzeichnung von Bildern“ findet das Auge und seine speziellen Eigenschaften als optisches Instrument seine Behandlung. Weitere Kapitel beschäftigen sich mit der Photometrie sowie mit den Aberrationen optischer Bilder. In einem Anhang werden noch einige speziellere Fragen — z. B. Fokustiefe, Dispersionsformeln, Optik inhomogener Medien — behandelt. — Jedem der 7 Kapitel sind jeweils 10—13 Fragen angehängt, deren Antworten an späterer Stelle gegeben werden, so daß der Student die Möglichkeit hat, den Erfolg seiner Arbeit zu überprüfen.

J. Picht.

Oterma, L.: Recherches portant sur des télescopes pourvus d'une lame correctrice. Ann. Univ. Turku, Ser. A, 19, 134 p. (1955).

Die Arbeit stellt eine sehr eingehende Untersuchung dar über Spiegelsysteme mit einer Schmidtschen Korrektionsplatte. Sie gibt jeweils eine Zusammenstellung der Formeln — für die nachstehend näher angegebenen einzelnen Fragestellungen — das zugehörige Rechenschema, die erreichte Korrektur der Abbildungsfehler und deren graphische Darstellung. Es werden behandelt: I. Allgemeine Formeln der geometrischen Optik für zentrierte Systeme; 1. Symbole und Vereinbarungen, 2. Berechnung des paraxialen Strahlenganges, 3. Berechnung der Aberrationen 3. Ordnung, 4. Berechnung der Strahlwege, und zwar trigonometrisch für einen meridionalen Strahl sowie für einen beliebigen Strahl. II. Systeme bestehend aus einem Konkavspiegel und einer Korrektionsplatte, deren deformierte Fläche bis zu Termen 12^{ter} Ordnung entwickelt wird; 1. Behebung der sphärischen Aberration eines Konkavspiegels durch eine Korrektionsplatte, 2. Die zugehörigen monochromatischen Aberrationen, wenn sich die Korrektionsplatte in der Nähe des Krümmungsmittelpunktes des Spiegels befindet, bis zur 5ten Ordnung sowie Einfluß der Blendenlage, 3. Untersuchungen bez. der Korrektionsplatte, insbesondere über die zweckmäßige Lage ihrer „Nullzone“, III. Astigmatische Teleskope mit einer feldkorrigierenden Linse, wobei diese eine plankonvexe Linse ist. Behebung der Verzeichnung durch einen sphärischen Spiegel. Kontrolle des Systems durch numerische Berechnungen mit Beispielen der numerischen Durchrechnung und Diskussion ihrer Ergebnisse. IV. Anastigmatische Teleskope ohne Verzeichnung, erzielt durch einen asphärischen Spiegel. 1. Konstruktionsprinzip, 2. Konstruktionsformeln, 3. Profilbestimmung der korrigierenden Platte, 4. Nachprüfung der er-

zielten Korrektur durch numerische Berechnung von Meridianstrahlen sowie beliebiger anderer Strahlen, 5. Numerisches Beispiel; V. Anastigmatisches Teleskop ohne Verzeichnung, erzielt durch einen Spiegel und eine asphärische Korrektionslinse, für die gleichfalls die Konstruktionsformeln sowie die numerischen Berechnungen und ein numerisches Beispiel angegeben werden. VI. Behandlung der chromatischen Aberrationen, und zwar der longitudinalen chromatischen Aberrationen und ihres Zusammenhanges mit der Zone der Null-Abweichung der Platte, des mittleren Strahles der chromatischen Bildscheibchen und der chromatischen Aberration für den Fall, daß das Objekt außerhalb der Achse des Systems liegt. *J. Picht.*

Kahn, F. D.: On the basic approximation in the theory of the phase contrast microscope. Proc. phys. Soc., Sect. B 68, 1073—1080 (1955).

Ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen zeigt Verf., daß für ein Amplituden-Objekt — monochromatische Strahlung der Frequenz $\omega/2\pi$ vorausgesetzt — die Wellengleichung im Bereich des Objektes die Form

$$[\nabla [\mu^{-1} \nabla \mathfrak{A}]] - (\omega^2 \varepsilon/c^2) \mathfrak{A} = - (4\pi i \omega \cdot \delta\sigma/c^2) (\mathfrak{E}_i + \mathfrak{A})$$

besitzt, während sie bei einem Phasenobjekt

$$[\nabla [\mu^{-1} \nabla \mathfrak{P}]] - (\omega^2 \varepsilon/c^2) \mathfrak{P} = (\omega^2 \cdot \delta\varepsilon/c^2) (\mathfrak{E}_i + \mathfrak{P})$$

lautet, wenn $\mathfrak{E}_i = \mathfrak{E}_i(r)$, die Lösung der für nicht absorbierende Objekte ($\sigma = 0$) geltenden Gleichung

$$[\nabla [\mu^{-1} \nabla \mathfrak{E}]] - (\omega^2 \varepsilon/c^2) \mathfrak{E} = 0,$$

ferner $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_i(r) + \mathfrak{A}(r)$ für reine Amplituden-Objekte (Leitfähigkeit $\delta\sigma \neq 0$) und $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_i + \mathfrak{P}(r)$ für reine Phasen-Objekte ($\delta\varepsilon \neq 0$) gilt. Dann, und nur dann, wenn $|\mathfrak{A}|$ und $|\mathfrak{P}| \ll |\mathfrak{E}_i|$, folgt, daß Amplituden-Objekt und Phasenobjekt einander äquivalent sind, wenn $\omega \cdot \delta\varepsilon = 4\pi \cdot \delta\sigma$, also $\delta\sigma = \delta\varepsilon \cdot c/2 \lambda_0$ mit $\lambda_0 =$ Vakuumwellenlänge. Die Äquivalenz ist also nicht für alle Wellenlängen gleichzeitig vorhanden. Sind sie äquivalent, so geben sie — in der betrachteten Näherung und unter der gemachten Voraussetzung — gleiche gebeugte Wellen, wobei die des Phasenobjektes um 90° denen des Amplitudenobjektes vorausseilen. Verf. untersucht weiter die Gültigkeit der Näherung [zunächst für eine monochromatische, linear polarisierte ebene (einfallende) Welle], wenn durch das Phasenobjekt der Brechungsindex $N = (\mu_0 \varepsilon_0)^{1/2}$ in einem Punkte r in $(1 + f) N$ mit $f = f(r)$ geändert wird, und zeigt, daß ein Phasenobjekt und ein Amplitudenobjekt bei Beobachtung mit Licht vom Spektralbereich $\Delta\lambda$ (um eine Wellenlänge λ_0) bis auf die Phasenvoreilung von 90° gleiche Beugungserscheinung ergeben bis auf einen Unterschied (Fehler), der von der Größenordnung des größten der drei Werte: $\Delta\lambda/\lambda_0$, λ_0/\bar{l} , $n L/\lambda_0$ ist, wenn \bar{l} der linear gemessene kleinste Abstand der Schwankungen in der Objektstruktur und ihre größte Dicke längs des einfallenden Strahles bedeutet. *J. Picht.*

Goldstein, Martin and E. R. Michalik: Theory of scattering by an inhomogeneous solid possessing fluctuations in density and anisotropy. J. appl. Phys. 26, 1450—1455 (1955).

Es wird die Theorie von Debye und Bueche der Lichtstreuung durch amorphe Festkörper verallgemeinert auf den Fall, daß Schwankungen der Anisotropie sowie der Dichte betrachtet werden. Eine verallgemeinerte Korrelationsfunktion wird definiert, die die Möglichkeit eines gleichzeitigen Auftretens von Schwankungen der Polarisierbarkeit in zwei Volumelementen angibt, die einen Abstand r voneinander haben. Die Schwankungen sind durch die Beträge der Polarisation und die Richtungen der optischen Achsen gekennzeichnet. Die Korrelationsfunktion ist außer vom Abstand r vom Winkel zwischen den Schwankungsachsen und von dem Winkel abhängig, der die Lage des zweiten Volumelementes mit Bezug auf die optische Achse des ersten angibt. Die Intensitäten der horizontalen und vertikalen Komponenten des gestreuten Lichtes werden als Integrale über die Korrelationsfunktion

bestimmt. Aus den Anfangsneigungen und den Unterbrechungen der Intensitätskurven, aufgetragen über dem Quadrat des halben Streuwinkels, lassen sich Mittelwerte sowie die mittleren Größen der Schwankungen ablesen, ebenso wie ein Maß für den Bereich, bis zu dem Schwankungen der Dichte und der Anisotropie korreliert sind. Die Theorie ist auf Gläser und flüssige Kristalle anwendbar. *J. Picht.*

Colombani, Antoine: Sur la polarisation en haute fréquence d'une substance sphérique et d'un ensemble de particules parfaitement diélectriques. C. r. Acad. Sci., Paris **240**, 503—505 (1955).

Ein kleines kugelförmiges Teilchen (vom Radius $a \ll 2\pi c/\omega$) der spezifischen Leitfähigkeit ε (R. Beekersche Definition) befinde sich in einem periodischen elektrischen Feld $\vec{h} = h e^{i\omega t}$. Ist $\vec{H} = H e^{i\omega t}$ und h sowie H zeitunabhängig, so erhält Verf. mit $S = r \sin \vartheta H_\varphi$ und $K^2 = \omega^2 \varepsilon / c^2$ die Gleichung

$$\partial^2 S / \partial r^2 + (1/r^2) \partial^2 S / \partial \vartheta^2 - (1/r^2) \cotg \vartheta \partial S / \partial \vartheta + K^2 S = 0,$$

die sich zerfällen läßt und deren Lösungen innerhalb und außerhalb des Teilchens angegeben werden. Aus ihnen wird h_r, h_z, h_ϑ sowie ein Ausdruck für die Polarisation gewonnen, der für kleine Werte von Ka übergeht in $P = h_0 [(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2)] a^3$. Für reelle und sehr große Werte von ε können das elektrische Feld sowie die elektrostatische Energie sehr groß werden. Der Polarisationsfaktor α in $P = \alpha h_0$ wird

$$\alpha = [(\varepsilon - 1) a^3 J_{3/2}(Ka)] / [(\varepsilon - 1) J_{3/2}(Ka) + Ka J_{1/2}(Ka)].$$

Für die scheinbare Suszeptibilität $\varepsilon_{av} = 1 + 4\pi P/h_0$ wird abschließend ein Ausdruck angegeben, der von dem wirklichen Volumen τ der im cm^3 enthaltenen N Teilchen abhängt ($\tau = \frac{4}{3} \pi a^3 N$). *J. Picht.*

● **Smith, K. F.:** Molecular beams. (Methuen's Monographs on Physical Subjects.) London: Methuen and Co., Ltd.; New York: John Wiley and Sons, Inc. 1955, X. 133 p. 8 s. 6 d. net.

Das Büchlein behandelt in 6 Kapiteln: die Erzeugung und Messung von Molekularstrahlen, Molekularstrahlen im feldfreien Raum, Wellennatur, magnetische Ablenkung, Radiofrequenz-Spektroskopie und elektrische Ablenkung von Molekularstrahlen. Es soll nach dem Vorwort von Fraser dessen Büchlein über denselben Gegenstand (erschienen 1936) ersetzen. Man findet hier eine straff gegliederte prägnante und alle wesentlichen Methoden und Arbeiten berücksichtigende Darstellung. Zahlreiche Literaturhinweise runden sie sowohl nach der mehr historischen Seite wie nach der ganz modernen Seite hin ab. Der Verf. führt alle Begriffe klar und auch in bezug auf die Einheiten völlig eindeutig ein und erreicht durch eine flüssige und leicht lesbare Form, daß auch der Nichtfachmann sich schnell in dem Gesamtgebiet zurecht finden wird. Die Ausstattung ist gut, und das Buch ist besonders als Einführung in das begrifflich nicht immer einfache Gebiet zu empfehlen.

D. Kamke.

Lüst, R.: Plasmaschwingungen in einem äußeren Magnetfeld. Z. Astrophys. **37**, 67—71 (1955).

Im Plasma wird die Ausbreitung einer ebenen Welle untersucht, deren Fortpflanzungsrichtung senkrecht zu einem äußeren Magnetfeld liegt. Benutzt wird die Schlütersche Form der Plasmagleichungen. Das Magnetfeld hat keinen Einfluß auf eine transversale Welle, die parallel zum Feld schwingt. Liegt dagegen die Schwingungsrichtung in einer Ebene senkrecht zum Feld, so hat die Schwingung sowohl eine transversale als auch eine longitudinale Komponente. Der Poyntingvektor verschwindet daher nicht, und es kann elektromagnetische Strahlung emittiert werden, was ohne äußeres Feld nicht der Fall ist. Ein Zusammenhang mit der gestörten Komponente der Radiostrahlung der Sonne wird vermutet.

S. v. Hoerner.

Agostinelli, Cataldo: Sulla compatibilità di una forma ellissoidale a tre assi per una massa fluida cosmica rotante, elettricamente conduttrice, immersa in un campo magnetico uniforme. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 17—23 (1955).

Oggetto della Nota è di stabilire delle condizioni sotto le quali è possibile che la massa fluida assuma la forma di un ellissoide a tre assi. *G. Lampariello.*

Zeuli, Tino: Propagazione di oscillazioni magneto-idrodinamiche in un fluido elettricamente conduttore che riempie un semi-spazio. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 23—31 (1955).

Dopo avere stabilito l'esistenza di una soluzione stazionaria delle equazioni della magneto-idrodinamica tale che il fluido sia animato da moto uniforme in direzione parallela al piano limite del semispazio occupato dal fluido, l'A. studia la propagazione di onde espresse da soluzioni infinitamente vicine alla soluzione stazionaria considerata. *G. Lampariello.*

Relativitätstheorie:

Picht, Johannes: 50 Jahre Relativitätstheorie. Vortrag im Festkolloquium des Physikalischen Instituts der Pädagogischen Hochschule Potsdam am 5. April 1955. Wiss. Z. Päd. Hochschule Potsdam, math.-naturw. R. 2, 11—14 (1955).

Grünbaum, Adolf: Logical and philosophical foundations of the special theory of relativity. Amer. J. Phys. 23, 450—464 (1955).

Die vorliegende Arbeit gibt eine sehr klare Darstellung der grundlegenden Vorstellungen der speziellen Relativitätstheorie. Verf. schließt sich dabei an die Ausführungen von H. Reichenbach an. Nach einer Analyse des Begriffes der „Gleichzeitigkeit“ wird die Tragweite der grundlegenden Experimente von Michelson-Morley, Kennedy-Thorndyke und Ives-Stilwell eingehend untersucht. Die Arbeit schließt mit einer Herausstellung der prinzipiellen Fortschritte, die Einstein gegenüber seinen Vorgängern erzielt hat. *F. Penzlin.*

● **Arzeliès, Henri:** La cinématique relativiste. Paris: Gauthier Villars 1955. XII+228, p. 53 Fig. fr. 2500.

Un très bon livre d'initiation, propre à dissiper beaucoup de malentendus. Les idées de base sont exposées très soigneusement et clairement, sous une forme assez personnelle. Plusieurs problèmes générateurs de paradoxes sont traités clairement et à fond (mise en route et arrêt de règles ou d'horloges, disque tourmant). Ce qui est exposé, qui n'utilise qu'exceptionnellement le langage 4-dimensionnel, plaira aux esprits positifs. *O. Costa de Beauregard.*

● **Papapetrou, Achilles:** Spezielle Relativitätstheorie. (Hochschulbücher für Physik Bd. 24.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1955. 170 S.

Exposé clair et concis, dans l'ordre suivant: I. principe de relativité et cinématique relativiste, II. dynamique du point (applications au choc élastique ou inélastique, à la désintégration d'une particule), III. électromagnétisme, IV. dynamique du continu, V. théorèmes de conservation. En fin des rubriques IV et V, l'auteur déduit certains théorèmes antérieurs de mécanique du point de théorèmes du continu. *O. Costa de Beauregard.*

Clauser, Emilio: Velocità della luce nei corpi isotropi in moto. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fiz. mat. natur., VII. Ser. 17, 362—365 (1955).

Considerati due sistemi inerziali di osservazione S ed S' tali che in S' un mezzo isotropo sia un quieto e abbia una velocità v rispetto ad S , l'A. si propone di calcolare la velocità di propagazione della luce nel mezzo rispetto ad S e il criterio che pone a base del calcolo è il seguente: si applichi alle varietà caratteristiche delle equazioni di Maxwell in S' la trasformazione di Lorentz che fa passare da S' ad S . Una successiva applicazione della nota formula della velocità di avanzamento dei fronti d'onda così ottenuti dà senz'altro la cercata velocità della luce. Questa, osserva l'A., „non

coincide a pieno rigore e in generale con quella che si otterrebbe componendo relativisticamente la velocità della luce rispetto ad S' con la velocità v . A tale riguardo il recensore osserva che, muovendo dalla definizione della velocità della luce come rapporto della densità di corrente di energia alla densità di energia, quali si definiscono in conformità ai principi generali dell'elettrodinamica di Minkowski, si ottiene una velocità che obbedisce al teorema di addizione di Einstein.

G. Lampariello.

Rayner, C. B.: Whitehead's law of gravitation in a space-time of constant curvature. Proc. phys. Soc., Sect. B 68, 944—950 (1955).

On sait que la théorie de la gravitation de Whitehead repose sur la considération de deux métriques. L'A. adopte ici pour métrique fondamentale ds_0^2 une métrique à courbure constante. Conformément aux principes de la théorie, la métrique gravitationnelle ds_g^2 s'en déduit par (notations de Whitehead)

$$ds_g^2 = ds_0^2 - (2G/C^2) \Sigma m_\alpha V_\alpha ds_0'^2$$

où la sommation est étendue à l'ensemble des particules gravitantes P_α et où V_α est une solution de l'équation d'ondes $\Delta_0 V = 0$ satisfaisant à des conditions aux limites convenables. Par une méthode originale, l'A. construit l'expression explicite de ds_g^2 pour un ensemble fini de particules ponctuelles admettant des lignes d'univers arbitraires. Il en déduit, par un procédé dont le principe est dû à Synge, une expression du ds_g^2 correspondant à un système continu admettant une densité propre et une distribution des vitesses finies. L'un des faits intéressants mis en évidence est l'existence, pour la courbure constante $K \neq 0$, d'un facteur faisant apparaître un „événement singulier“ pour chaque particule. Quelques considérations cosmologiques sont esquissées.

A. Lichnerowicz.

Bertotti, B.: On the motion of charged particles in general relativity. Nuovo Cimento, X. Ser. 2, 231—240 (1955).

1. Die Ermittlung des Strahlungstermes in der Bewegungsgleichung eines geladenen Körpers nach der Methode von Infeld und Wallace wird durch dimensionelle Betrachtungen vereinfacht. 2. Die Bewegungsgleichungen zweier geladener Körper werden aus den Feldgleichungen des kombinierten Gravitations- und elektromagnetischen Feldes in zweiter Näherung berechnet. Der Rechnung liegt eine vereinfachte Methode zugrunde, welche vom Verf. früher für den Fall von ungeladenen Körpern verwendet wurde (vgl. dies. Zbl. 57, 201).

A. Papapetrou.

Pham Mau Quan: Sur une théorie relativiste des fluides thermodynamiques. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 38, 121—204 (1955).

Cet important travail est consacré à l'élaboration macroscopique, en relativité générale, d'une thermodynamique des fluides. Son esprit est celui de la physique mathématique. Un fluide thermodynamique est caractérisé par les données habituelles relatives à un fluide-vitesse unitaire u , densité propre ρ , tenseur des pressions $\pi_{\alpha\beta}$ -complétées par champ scalaire θ , dit champ des températures propres. Après avoir rappelé brièvement les fondements de la relativité générale, l'A. détermine les équations de la thermodynamique des fluides relativistes en raisonnant en repères propres; ces équations font intervenir le vecteur courant de chaleur $q_\alpha = -\kappa \partial_\theta \theta (g_\alpha^\alpha - u^\alpha u_\alpha)$ où κ est la conductivité thermique du milieu et le vecteur q_α satisfait à l'équation de Fourier généralisée $\nabla_\alpha q^\alpha = c \rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - (l/\rho) u^\alpha \partial_\alpha \rho$ où ∇ est l'opérateur de dérivation covariante, c la chaleur spécifique à volume constant et l la chaleur de dilatation; κ, c, l sont des caractéristiques du milieu. Le tenseur d'impulsion-énergie du fluide thermodynamique s'écrit alors $T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \pi_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha)$, et, par passage aux conditions de conservation, on en déduit immédiatement les équations du mouvement. L'A. les forme en particulier pour un fluide parfait thermodynamique pour lequel $\pi_{\alpha\beta} = p (g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta)$. Une seconde partie est consacrée aux principes de la thermodynamique relativiste. Le

second principe reçoit une forme claire et précise par l'inégalité $\nabla_\alpha (\rho \sigma u^\alpha) - \nabla_\alpha (q^\alpha/\theta) \geq 0$ où le scalaire σ est la densité propre d'entropie. La dernière partie, la plus importante, porte sur la structure des équations du champ relatif à un fluide parfait thermodynamique. L'A. analyse le problème de Cauchy par les équations adoptées et détermine rigoureusement les variétés exceptionnelles. L'effet de thermodynamique relativiste concernant la vitesse de propagation des ondes apparaît comme pratiquement inexistant. Le travail s'achève par une intéressante étude des mouvements permanents et des modèles d'univers thermodynamiques stationnaires.

A. Lichnerowicz.

Pham Mau Quan: Thermodynamique d'un fluide relativiste. Séminaire de théories physiques 24, Nr. 3, 19 p. (1955).

Bochner, S.: Stationary space-time in general relativity. Proc. nat. Acad. Sci. USA 41, 485—490 (1955).

L'étude des espaces-temps stationnaires V_4 de la relativité générale, partout extérieurs, conduit à l'étude, sur une variété riemannienne V_3 de métrique définie positive, de la relation $\Delta \xi = -\xi R + \frac{1}{4} \xi^3 H^2$ où ξ, R, H^2 sont des scalaires ($\xi > 0, H^2 \geq 0$) [Lichnerowicz, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Masson 1955]. Pour des raisons physiques évidentes, l'A. nomme „vide“ un V_4 tel que $H^2 = 0, \xi = \text{const}$ et „semi-vide“ un V_4 tel que $H^2 = 0$. Après avoir rappelé les résultats classiques relatifs au cas où V_3 est supposé compact, l'A. n'assume plus la compacité de V_3 , mais se place dans l'hypothèse suivante: il existe un ensemble compact S de V_3 et un groupe Γ de transformations de V_3 tels qu'à tout point x de V_3 , on puisse associer un élément γ de Γ tel $\gamma x \in S$. Un tenseur $t(x)$ de V_3 est dit presque périodique relativement à Γ si toute suite infinie de Γ admet une suite partielle $\{\gamma_n\}$ ayant la propriété suivante: à tout point correspond un voisinage de coordonnées tel que la suite $t(\gamma_n x)$ converge uniformément (relativement à chaque composante) et si $t^*(x)$ est la limite, la suite $t^*(\gamma_n^{-1} x)$ converge de la même façon vers $t(x)$. Le principal résultat du papier est alors le suivant: si le tenseur métrique, ξ et ses dérivées des deux premiers ordres, R, H^2 sont presque périodiques relativement à Γ et si $R \leq 0$, alors V_4 est vide. L'A. envisage en particulier le cas où, V_3 étant homéomorphe à R^3 et Γ étant le groupe des translations, la presque périodicité au sens de Bohr peut être introduite. Si à l'hypothèse $R \leq 0$ on substitue l'hypothèse plus faible $M(\xi R) \leq 0$ (où M est l'opérateur de moyenne), on peut encore affirmer que V_4 est semi-vide. Une extension de ce résultat au cas général de la presque périodicité relativement à un groupe, termine le papier.

A. Lichnerowicz.

Mariot, Louis: Sur le champ électromagnétique singulier. C. r. Acad. Sci., Paris 241, 175—176 (1955).

Posto il concetto di campo elettromagnetico singolare completamente integrabile, l'A. dimostra che l'unica soluzione del problema di Cauchy di cui la varietà portante è una ipersuperficie di genere spaziale soddisfacente a certe condizioni è un campo singolare completamente integrabile.

G. Lampariello.

Gomes, Ruy Luís: Allgemeine Relativität. Der Krümmungstensor eines absoluten Raumes. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 4, 245—262 (1955) [Portugiesisch].

Etant donné un espace-temps de la relativité générale, de métrique $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ ($i, j = 1, \dots, 4$) rapporté à des lignes de temps $x^\alpha = \text{const}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3; g_{44} > 0$), l'A. envisage la forme quadratique classique à trois variables de coefficients $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - g_{4\alpha} g_{4\beta}/g_{44}$. Il évalue le tenseur de courbure $R^i_{j,kl}$ et le tenseur de Ricci R_{ij} du ds^2 à partir de ceux $P^\alpha_{\beta,\gamma\delta}$ et $P_{\alpha\beta}$ de la métrique $d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ (où x^4 est considéré comme un paramètre) et donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que $R^\alpha_{\beta,\gamma\delta} = P^\alpha_{\beta,\gamma\delta}$ et pour que $R_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}$.

A. Lichnerowicz.

Szekeres, G.: New formulation of the general theory of relativity. *Phys. Review*, II. Ser. **97**, 212—223 (1955).

L'A. propone qui una formulazione della teoria generale della relatività nella quale il principio di equivalenza non ha più quella fondamentale importanza che gli compete nella formulazione originale einsteiniana. L'origine della ricerca sta nell'osservazione seguente. Nelle equazioni gravitazionali di Einstein il secondo membro è il tensore energetico che riceve contributi da una qualunque sorgente di energia, in particolare da un campo elettromagnetico. L'energia elettromagnetica crea dunque gravitazione. D'altra parte se esiste solo campo gravitazionale nello spazio vuoto, il secondo membro deve essere nullo, sebbene non si possa negare che un campo gravitazionale sia sede di energia. Se si ammette che ogni specie di energia crea gravitazione, allora il secondo membro non dovrebbe essere mai zero, nemmeno nello spazio vuoto. A fondamento della ricerca sta la nozione di tempo cosmico τ che costituisce una grandezza scalare di campo e non una coordinata. Fra τ e il campo metrico viene postulata un'interazione di carattere macroscopico. Le equazioni del campo vengono dedotte dal principio di Hamilton, la cui lagrangiana dipende dalla curvatura e da uno scalare dedotto dal tempo cosmico. È possibile integrarle nel caso della simmetria sferica sotto l'ipotesi che il corpo che genera il campo sia in quiete assoluta, cioè in quiete rispetto al sistema inerziale determinato dal gradiente di τ . Codesto sistema inerziale è ciò che l'A. chiama l'etere. Interessanti conseguenze vengono dedotte con la possibilità di controlli sperimentali. *G. Lampariello.*

Mauger, F. E.: A note on the strength of field equations. *Nuovo Cimento*, X. Ser. **2**, 330—333 (1955).

Hlavatý, Václav: The elementary basic principles of the unified theory of relativity. **B₂**. *J. rat. Mech. Analysis* **4**, 247—276 (1955).

Im Anschluß an frühere Arbeiten (vgl. dies. Zbl. **47**, 210; **50**, 218) behandelt Verf. erneut die Lösung der Gleichungen $(*) \hat{c}_\omega g_{\lambda\mu} = \Gamma_{\lambda\omega}^{\hat{\alpha}} g_{\alpha\mu} + \Gamma_{\omega\mu}^{\hat{\alpha}} g_{\lambda\alpha}$ für den Zusammenhang $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ des unsymmetrischen Feldes $g_{\lambda\mu}$ der einheitlichen Einsteinschen Relativitätstheorie. Zwar war vom Verf. die explizite Lösung von $(*)$ sowie durch Hlavatý und Sáenz (vgl. dies. Zbl. **51**, 203) eine übersichtliche Bedingung für die eindeutige Existenz einer solchen Lösung angegeben worden, aber es fehlte ihre Darstellung in Termen von $g_{\lambda\mu}$. Dies wird jetzt mittels geeigneter nicht-holonomer Koordinaten durchgeführt, wobei für die drei verschiedenen algebraischen Klassen des Grundtensors $g_{\lambda\mu}$ jeweils gesonderte Untersuchungen notwendig sind. *W. Barthel.*

Hlavatý, Václav: The elementary basic principles of the unified theory of relativity. **B₃**. *J. rat. Mech. Analysis* **4**, 653—679 (1955).

Fortsetzung der vorstehend referierten Arbeit. Hier werden die Lösungen der Gleichungen $(*) \hat{c}_\omega g_{\lambda\mu} = \Gamma_{\lambda\omega}^{\hat{\alpha}} g_{\alpha\mu} + \Gamma_{\omega\mu}^{\hat{\alpha}} g_{\lambda\alpha}$ für jene Ausnahmefälle $g = 0$ und $g = 2$ gesucht, bei denen das System $(*)$ nach Hlavatý und Sáenz (vgl. dies. Zbl. **51**, 203) nicht mehr eindeutig lösbar ist. Dabei ist $g = \|g_{\lambda\mu}\|/\|g_{(\lambda\mu)}\|$. Nach vorbereitenden Betrachtungen, in denen der Nijenhauztensor ein wichtiges Hilfsmittel darstellt, werden die Lösungen von $(*)$ in gewissen nicht-holonomen Koordinaten explizit angegeben. Im Fall $g = 0$ ist für die Existenz einer Lösung von $(*)$ notwendig und hinreichend, daß die reellen Eigenvektoren ${}_3e, {}_4e$ des Grundtensors $g_{\lambda\mu}$ X_2 -bildend sind. Dagegen existiert im Fall $g = 2$ dann und nur dann eine Lösung von $(*)$, wenn die konjugiert-komplexen Eigenvektoren ${}_1e, {}_2e$ Tangentialvektoren zu geodätischen Linien sind. Weiter diskutiert Verf. noch die Folgerungen aus der Bedingung $\Gamma_{[\lambda\alpha]}^{\hat{\alpha}} = 0$. Die Untersuchungen werden wieder getrennt nach den verschiedenen algebraischen Klassen von $g_{\lambda\mu}$ durchgeführt, wobei allerdings bei den genannten Ausnahmefällen die dritte Klasse nicht auftritt. — Für weitere Veröffentlichungen des Verf. über das einheitliche Feld vgl. dies. Zbl. **57**, 429, 430, 431. *W. Barthel.*

Einstein, A. and B. Kaufman: A new form of the general relativistic field equations. *Ann. of Math.*, II. Ser. **62**, 128—138 (1955).

Die verallgemeinerte Feldtheorie beruht auf die Einführung einer Tensordichte g^{kl} und einer Übertragung I_{ji}^h , die beide nicht notwendig symmetrisch sind und die unabhängig voneinander variiert werden. Statt der Symmetrieforderung tritt die Forderung der Invarianz beim Übergang zu den Transponierten, die man erhält, wenn der alternierende Teil das Vorzeichen wechselt. Die althergebrachte Ableitung der Feldgleichungen hat etwas Künstliches, was daran liegt, daß der Ausgangspunkt für die Variation nicht selbst transpositionsinvariant ist. Dies läßt sich verbessern, indem statt der I_{ji}^h andere Parameter U_{ji}^h eingeführt werden, in denen sich der Einstein-Tensor transpositionsinvariant ausdrücken läßt. Es stellt sich heraus, daß die Variationsdichte auch invariant sein soll bei den sogenannten λ -Transformationen, das sind Transformationen der U_{ji}^h , die ähnlich gebaut sind wie die beschränkten (restricted) projektiven Transformationen der I_{ji}^h (vgl. Schouten, Ricci-Calculus, 2. Aufl. p. 288, dies. Zbl. **57**, 378). Diese λ -Transformationen spielen neben den Koordinatentransformationen eine große Rolle, insbesondere beschränken sie die Wahl der Variationsdichte. Zum Schluß wird gezeigt, daß die Transformation der U_{ji}^h aufgefaßt werden kann als eine transpositionsinvariante Koordinatentransformation kombiniert mit einer λ -Transformation, die R_{ih} invariant läßt. Die hier vorggeführte neue Form der Gleichungen hat den Vorzug, daß keine besonderen Bedingungen eingeführt werden, die nicht dem Variationsprinzip entstammen. *J. A. Schouten.*

● Tonnelat, Marie-Antoinette: La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements. (Les grands problèmes des sciences, No 4). Paris: Gauthier-Villars 1955. X, 156 p. 2500 fr.

Eine besonders übersichtliche und klare synthetische Darstellung der bisherigen Arbeiten auf dem Gebiet der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie mit nicht-symmetrischem $g_{\mu\nu}$. Inhaltsverzeichnis: Zweck und Methode der einheitlichen Feldtheorie. Absoluter Differentialalkül bei nichtsymmetrischem $g_{\mu\nu}$. Ableitung der Feldgleichungen aus dem Variationsprinzip. Auflösung der Gleichung zur Bestimmung von $I_{\mu\nu}^\lambda$ aus $g_{\mu\nu}$. Allgemeine Diskussion der Feldgleichungen. Die kugelsymmetrische Lösung. Die elektromagnetische Strom-Ladungsdichte. Der Energie-Impulstensor und die Bewegungsgleichungen. *A. Papapetrou.*

Tonnelat, Marie-Antoinette: Sur les équations approchées de la théorie d'Einstein-Schrödinger. II. C. r. Acad. Sco., Paris **241**, 1110—1112 (1955).

Es wird die von der Verf. früher begründete Theorie (dies. Zbl. **43**, 209; **65**, 210) dadurch weiterentwickelt, daß auch der symmetrische Anteil des Fundamental-tensors $g_{\mu\nu}$ (welcher für das Gravitationsfeld verantwortlich ist) mit einer Potenzreihe $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varepsilon \gamma_{\mu\nu} + \varepsilon^2 \gamma_{\mu\nu} + \dots$ approximiert wird, und es läßt sich zeigen, daß die Bonnorschen Bewegungsgleichungen (dies. Zbl. **56**, 440) auch in diesem Falle erfüllt sind. *J. I. Horváth.*

Mavridès, Stamatia: Choix de la métrique et du champ électromagnétique en théorie unitaire d'Einstein. Lien avec la théorie de Born-Infeld. *J. Phys. Radium* **16**, 482—488 (1955).

Cet intéressant travail est consacrée à une analyse des interprétations physiques de la théorie unitaire d'Einstein. L'A. assume que la métrique est donnée, à un invariant J près, soit par les $g_{(\lambda\mu)}$, soit par les $g^{(\lambda\mu)}$ (conformément à une suggestion du rapp.). Par référence à la théorie de Born-Infeld et en accord avec des considerations dues à Madame Tonnelat, le champ électromagnétique est représenté par deux tenseurs antisymétriques liés, à des facteurs scalaires près, aux $g_{[\lambda\mu]}$ et aux $g^{[\lambda\mu]}$. L'invariant J est ensuite déterminé par la considération des équations en divergence de densités. A partir des interprétations ainsi fixées, l'A. envisage la solution

statique à symétrie sphérique de Papapetrou. Avec la métrique $g_{(\lambda\mu)}$, les conclusions sont identiques à celles qui résultent de la théorie de Born: le champ électrique reste fini à l'origine et la libre densité de charge conduit à une charge totale finie. Avec la métrique liée à $g^{(\lambda\mu)}$, la solution de Papapetrou ne conduit pas à ces résultats satisfaisants et il semble qu'il faille alors recourir à une autre solution à symétrie sphérique.

A. Lichnerowicz.

Mavridès, S.: La solution générale des équations d'Einstein $g^{\mu\nu}_{;\rho} = 0$. Nuovo Cimento, X. Ser. 2, 1141—1164 (1955).

Durch unmittelbare Lösung der Gleichungen $g^{\mu\nu}_{;\rho} = 0$ werden die Größen $I^{\lambda}_{\mu\nu}$ der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie mit nichtsymmetrischem $g_{\mu\nu}$ in expliziter Form als Funktionen von $g^{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ berechnet.

A. Papapetrou.

Arcidiacono, Giuseppe: Sull'importanza del „gruppo base“ nel problema della unificazione dei campi fisici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 386—391 (1955).

L. Fantappiè ha dimostrato (questo Zbl. 57, 202) che il gruppo di Lorentz può considerarsi come caso limite di un altro gruppo a dieci parametri operante nello spazio-tempo che egli chiama „finale“ perchè non deducibile per via di limite da un altro gruppo con lo stesso numero di parametri ed operante nello stesso spazio. Scopo della Nota è di preparare la costruzione di un sistema di equazioni che si riduca alle equazioni di Maxwell quando il gruppo finale si riduce al gruppo di Lorentz.

G. Lampariello.

Arcidiacono, Giuseppe: Le equazioni di Maxwell generalizzate nella teoria di relatività finale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 515—519 (1955).

In una Nota linea precedente (cfr. rapporto precedente) l'A. ha esposto le premesse per costruire un sistema di equazioni che con un passaggio al limite si riducono alle equazioni di Maxwell. In questa Nota le equazioni cercate vengono stabilite. Si tratta di un sistema a dieci funzioni incognite. Prima di domandarsi quale significato fisico eventuale abbiano codeste funzioni ed equazioni sembrerebbe più opportuno chiedere se esista un significato fisico delle trasformazioni del gruppo finale. Non si dovrebbe dimenticare che i motivi per cui la fisica ha sostituito il gruppo di Galileo col gruppo di Lorentz sono stati suggeriti direttamente dall'esperienza.

G. Lampariello.

Arcidiacono, Giuseppe: Sul campo elettromagnetico generalizzato. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 631—636 (1955).

L'A. continua lo studio del campo che chiama elettromagnetico generalizzato nella teoria di relatività finale (cfr. rapporto precedente). La deduzione delle equazioni da un principio variazionale, la costruzione di un tensore che generalizza formalmente il tensore energetico, nonchè la determinazione dei potenziali generalizzati sono l'oggetto della Nota.

G. Lampariello.

Horváth, J. I.: Contribution to the final affine field law. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 3, 151—155 (1955).

Verf. setzt voraus, daß in der einheitlichen Feldtheorie die Bahnen der materiellen Teilchen mit den verallgemeinerten geodätischen Linien des zugrunde gelegten Raumes zusammenfallen. Eine Änderung des affinen Zusammenhanges von der Form $I'^k_{lm} = I^k_{lm} + 2 \delta^k_l \psi_m$ läßt die Parallelität zweier Vektoren längs einer beliebigen Kurve und daher auch die verallgemeinerten geodätischen Linien des Raumes unverändert. Es wird gefordert, daß auch die Feldgleichungen der einheitlichen Feldtheorie gegenüber einer solchen Transformation von I^k_{lm} invariant bleiben.

A. Papapetrou.

Bazzanella, Bruno: La teoria della materia e gli spinori. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 10, 59—60 (1955).

L'A. osserva che le teorie unitarie di Einstein e di Kaluza si riconducono ad equazioni che sono casi particolari di un unico sistema di equazioni di Pfaff.

G. Lampariello.

Winogradzki, J.: Les transformations de jauge en relativité généralisée. Séminaire de théories physiques 24, Nr. 10, 10 p. (1955).

Costa de Beauregard, Olivier: Sur la théorie quantique de la gravitation. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 2383—2384 (1955).

Belinfante, Frederik J.: Use of the flat-space metric in Einstein's curved universe and the „Swiss-Cheese“ model of space. Phys. Review, II. Ser. 98, 793—800 (1955).

Betrachtungen über die von Rosen vorgeschlagene Einführung des Minkowskischen metrischen Tensors in die allgemeine Relativitätstheorie sowie über die Form der de Donderschen Koordinatenbedingung in einem beliebigen Koordinatensystem. Es folgt die Bestimmung der Form der Schwarzschildschen Lösung der Feldgleichungen bei Gültigkeit der de Donderschen Koordinatenbedingung. In der neuen Form der Lösung tritt neben der Masse des Zentralkörpers noch eine zweite Integrationskonstante auf, die dann der Verf. gleich Null setzt.

A. Papapetrou.

Raychaudhuri, Amalkumar: Relativistic cosmology. I. Phys. Review, II. Ser. 98, 1123—1126 (1955).

Die Arbeit untersucht das zeitliche Verhalten möglichst allgemeiner, räumlich nicht homogener Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen. Die Differentialgleichung für das zeitliche Verhalten der Metrik enthält gegenüber der Gleichung für das isotrop expandierende (bzw. kontrahierende) homogene Modell zwei positiv definite Zusatzterme, die auf eine Rotation der Materie im lokalen Inertialsystem und eine Anisotropie der Expansion zurückgehen. Es ergibt sich, daß die einzige statische Lösung bei verschwindender Rotation das statische Universum von Einstein ist. (Für nicht verschwindende Rotation hat Gödel eine statische Lösung angegeben.) Weiterhin wird für verschwindende Rotation gezeigt, daß die Zeitskala des expandierenden Modells maximal ist gegenüber den entsprechenden anisotropen Modellen mit gleicher kosmologischer Konstanten Λ . Für $\Lambda = 0$ ergibt sich im endlichen Zeitabstand dieselbe Singularität wie in den isotropen Modellen. Durch Einführung einer Anisotropie ohne Rotation kann also im Falle $\Lambda = 0$ weder die Zeitskala gedehnt noch die Singularität vermieden werden. Abschließend werden allgemeine Beziehungen für die Spur des Riemann-Christoffel-Tensors abgeleitet und gezeigt, daß für verschwindende Rotation eine lokale isotrope Expansion auch einen lokalen isotropen Raum bedingt.

W. Strohmaier.

Just, Kurt: Jordansche Kosmologie mit neuen Feldgleichungen. Z. Phys. 141, 592—603 (1955).

Verf. begründete in früheren Arbeiten neue kosmologische Feldgleichungen und liefert so ein weiteres Modell mit veränderlicher Gravitationszahl und damit verbundener Entstehung neuer Materie. Es ergeben sich Gegensätze bezüglich des heutigen Weltalters und des heutigen Weltradius gegenüber den linear expandierenden Modellen. Die heutige Veränderlichkeit der Gravitationszahl ist viel kleiner als die des Weltradius und die Abnahme bewirkt eine Zunahme der Gesamtenergie; neue Materie entsteht — wie bei P. Jordan — in Form der Supernovae, von denen jährlich eine in etwa 300 Spiralnebeln aufleuchtet. Mit der verbesserten Hubble-Konstanten kommt das jetzige Weltalter auf ungefähr 3 Milliarden Jahre. Die größte Zahl der Doppelsterne und unser Planetensystem sollen zu einer Zeit entstanden sein, als die Gravitationszahl etwa 20mal so groß war als die jetzige, so daß die heute unerklärlich großen Bahnradien damals 20mal kleiner waren. Die Expansionsformel für einen geschlossenen Raum wird angeführt; eine Entscheidung für eine geschlossene hyperbolische oder euklidische Struktur wird als schwierig bezeichnet und für eine spätere Arbeit vorbehalten.

W. Strohmaier.

Quantentheorie:

Hill, E. L.: Relativistic theory of discrete momentum space and discrete space-time. Phys. Review, II. Ser. **100**, 1780—1783 (1955).

Dans le groupe complet L des transformations de Lorentz, l'A. cherche des sous-groupes denses dans L ; il y parvient en se limitant à des transformations de Lorentz à coefficients rationnels, et propose alors a) un modèle avec espace-temps discret, b) un modèle avec espace d'impulsion-énergie discret.

O. Costa de Beauregard.

Tietz, T.: Über die Abzählung der Eigenwerte der Schrödinger-Gleichung im begrenzten Gebiet. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. **5**, 347—352 (1955).

Verf. betrachtet Gleichungen vom Sturm-Liouvilleschen Typ und hier wieder speziell solche, für die die Lösung im wesentlichen eine hypergeometrische Funktion oder eine konfluente hypergeometrische Funktion ist. Dann läßt sich die Anzahl der Nullstellen für einen bestimmten Wert der in der Lösung auftretenden Parameter angeben. Die Ausnutzung dieser bekannten Resultate auf das im Titel genannte Problem wird nur kurz angedeutet.

F. Penzlin.

Takabayasi, Takehiko: The vector representation of spinning particle in the quantum theory. I. Progress theor. Phys. **14**, 283—302 (1955).

L'A. déduit et interprète un certain nombre de relations tensorielles conséquences de l'équation d'onde non relativiste de la particule à spin. Un „potentiel interne“ et un „champ magnétique interne“ apparaissent.

O. Costa de Beauregard.

Román, P.: Erhaltungsgesetze und quantenmechanische Operatoren. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. **5**, 143—158 (1955).

In der vorliegenden Arbeit gibt der Verf. eine Darstellung des von E. Noether 1918 entdeckten Zusammenhanges zwischen Transformationsgruppen, die die Lagrangefunktion invariant lassen, und den Erhaltungssätzen. Neu gegenüber den bekannten Darstellungen (z. B. E. L. Hill, dies. Zbl. **44**, 385) ist die triviale Erweiterung auf den Fall, daß die Lagrangefunktion auch von den zweiten Ableitungen der Feldfunktionen abhängt.

F. Penzlin.

Costa de Beauregard, O.: Covariance relativiste à la base de la mécanique quantique. J. Phys. Radium **16**, 770—780 (1955).

L'A. reprend et complète la présentation de la formulation relativiste covariante de la mécanique ondulatoire qu'il a introduite précédemment (ce Zbl. **57**, 210). Partant de la représentation des fonctions d'ondes par des intégrales de Fourier présentant la covariance relativiste, il obtient une théorie générale satisfaisante pour la description des particules sans spin ou avec spin, libres ou en interaction avec un champ extérieur. Ce formalisme est en accord et complète les formalismes de Schwinger et de Feynman. Le rôle de la représentation d'interaction dans la description spatio-temporelle des phénomènes fait l'objet d'une très intéressante discussion.

G. Petiau.

Good jr., R. H.: Properties of the Dirac matrices. Reviews modern Phys. **27**, 187—211 (1955).

In dem vorliegenden Bericht gibt der Verf. eine ausführliche Darstellung der grundlegenden Eigenschaften der Diracmatrizen. Er verzichtet dabei bewußt auf die Benutzung der von der modernen Algebra gelieferten allgemeinen Sätze. So wird nach einem einleitenden Abschnitt über die Herkunft der Diracschen Matrizen der „Fundamentalsatz“: „alle vierreihigen Darstellungen der Diracmatrizen sind äquivalent“ nach dem Vorgange von Pauli (dies. Zbl. **15**, 194) rein matrizen-theoretisch bewiesen. Es folgen die Behandlung der Lorentztransformation, der Ladungskonjugation, der quadratischen Kovarianten und der Identitäten zwischen biquadratischen Invarianten. Von speziellen Darstellungen wird nirgends Gebrauch gemacht.

F. Penzlin.

Nataf, Roger: Sur les mouvements collectifs de rotation des noyaux. I. II. C. r. Acad. Sci., Paris **240**, 2510—2512, **241**, 31—33 (1955).

Verf. erörtert die von A. Bohr vorgeschlagene Koordinatentransformation zur Ableitung der wirbelfreien Strömung im Kerntröpfchen. *G. Süßmann.*

Marty, Claude: Sur une méthode nouvelle d'obtention des niveaux de rotation nucléaires. I—III. C. r. Acad. Sci., Paris **241**, 855—857, 928—929, 1112—1113 (1955).

Diskussion einiger Punkte der Bohr-Mottelsonschen Theorie. *G. Süßmann.*

Milford, F. J.: Projection operator for the Rarita-Schwinger equation. Phys. Review, II. Ser. **98**, 1488 (1955).

Die Kompliziertheit der Theorie von Rarita und Schwinger für ein kräftefreies Teilchen mit dem Spin $3/2$ rührt daher, daß der „Vektor-Spinor“ Ψ_ν neben den Feldgleichungen $(\gamma_\mu \partial_\mu - i m) \Psi_\nu = 0$ noch den Nebenbedingungen $\gamma_\nu \Psi_\nu = 0$ und $p_\mu \Psi_\mu = 0$ zu unterwerfen ist, damit der zum Spin $\frac{1}{2}$ gehörige Anteil unterdrückt wird. Verf. überwindet diese Schwierigkeit durch die Konstruktion eines Projektionsoperators, der genau den zum Spin $3/2$ gehörigen Anteil herausblendet. Diese Darstellung ist insbesondere dann von Vorteil, wenn Summen über die Spin $3/2$ -Zustände zu berechnen sind. *F. Penzlin.*

Feshbach, Herman: Relativistic wave equations. Phys. Review, II. Ser. **98**, 801—802 (1955).

Verf. skizziert eine Methode zur Gewinnung von Feldgleichungen für Teilchen mit höherem Spin. Wesentlich ist dabei, daß nicht von gruppentheoretischen Hilfsmitteln Gebrauch gemacht wird, sondern, daß nur die elementaren Eigenschaften der Diracschen Matrizen zur Anwendung kommen. Als Spezialfall ist die de Brogliesche Fusionsmethode in der hier angegebenen Formulierung enthalten. Einige Ergebnisse über die Anwendung der Methode auf den Fall des Spins $3/2$ und 1 sind referiert. Eine ausführlichere Darstellung ist angekündigt. *F. Penzlin.*

Case, K. M.: Hamiltonian form of integral spin wave equations. Phys. Review, II. Ser. **100**, 1513—1514 (1955).

Verf. bringt die Kemmerschen Gleichungen auf die „Hamiltonsche Form“ $i \partial_t \Psi = H \Psi$. Da er dabei nur von den Kemmer-Duffinschen Relationen Gebrauch macht und keine spezielle Darstellung benutzt, gilt das Ergebnis zugleich für den Fall des Spins 0 und 1. Neu scheint dem Ref. die vom Verf. angegebene Möglichkeit der nahezu wörtlichen Übertragung dieser Ergebnisse auf alle Felder vom Dirac-Fierz-Pauli-Typ mit ganzzahligem Spin zu sein. *F. Penzlin.*

Proca, A.: Particules de très grandes vitesses en mécanique spinorielle. Nuovo Cimento, X. Ser. **2**, 962—971 (1955).

L'A. a introduit précédemment (ce Zbl. **55**, 220) une forme nouvelle de mécanique dite mécanique spinorielle dans laquelle le mouvement d'un point au lieu d'être décrit par des vecteurs x^α comme en mécanique relativiste classique est décrit par des variables spinorielles. Après avoir rappelé les bases de cette théorie il étudie ici le cas où la vitesse tridimensionnelle du corpuscule est égale à celle de la lumière ce qui entraîne que la masse au repos doit être nulle. Alors toutes les grandeurs d'espace-temps attachées au corpuscule sont des constantes et leur disposition dans l'espace est précisée. En particulier la longueur du „spin“ des particules de vitesse c est nulle. *G. Petiau.*

Proca, A.: Interférences en mécanique spinorielle. Nuovo Cimento, X. Ser. **2**, 972—979 (1955).

Après une étude des phénomènes d'interférences considérées comme caractérisés par une grandeur intervenant dans l'interaction appareil-corpuscule, l'A. montre comment les intégrales premières de la mécanique spinorielle du point matériel permettent d'écrire l'expression d'un champ périodique attaché à la particule et qui intervient dans les termes d'interaction pour rendre compte des phénomènes d'interférences. Ce champ représente l'onde attachée au corpuscule et la représen-

tation utilisée en montre nettement la structure. Dans le cas où la masse est nulle on peut trouver notamment une solution possédant les caractères des champs électromagnétiques attachés au photon. *G. Petiau.*

Potier, Robert: Sur les produits scalaires de fonctions d'onde et les intégrales de Fourier réciproques en mécanique ondulatoire relativiste. *J. Phys. Radium* **16**, 688—692 (1955).

Théorie covariante relativiste des intégrales de Fourier réciproques, de l'égalité de Parseval, etc., ..., basée uniquement sur l'invariance et sur la conservativité du flux du quadri-courant de présence. Application à la théorie des particules à spin à masses multiples de Potier et de LeCouteur. *O. Costa de Beauregard.*

Verde, M.: Asymptotic expansions of phase shifts at high energies. *Nuovo Cimento, X. Ser.* **2**, 1001—1014 (1955).

Der Verf. gibt asymptotische Entwicklungen für die Phasenverschiebungen für den Fall großer Impulswerte an, wobei er nur zentralsymmetrische statische Potentiale voraussetzt. Für nichtsinguläre Potentiale entwickelt er eine Rekursionsbeziehung, welche die Berechnung von Termen beliebiger Ordnung in $1/p$ gestattet. Im Falle von Potentialen, welche im Ursprung wie $1/r$ singulär werden, oder regulär für alle Drehimpulse, werden die Entwicklungen explizit unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $1/p^5$ angegeben. *P. Urban.*

Newton, Roger G.: Connection between the *S*-matrix and the tensor force. *Phys. Review, II. Ser.* **100**, 412—428 (1955).

Bekanntlich bestimmen Phase, Bindungsenergien und einige positive Parameter in eindeutiger Weise das Potential bei der Streuung durch eine Zentralkraft. Verf. verallgemeinert diese Überlegungen auf die Spin-Bahn-Kopplung und auf Tensorkräfte. Es werden also die radialen Schrödingergleichungen für die Drehimpulse l und $l + 2$, gekoppelt durch eine Tensorkraft, untersucht. Bekannte Theoreme für die *S*-Matrix für Zentralpotentiale, z. B. bezüglich des Verhaltens bei kleinen Energien u. a. werden verallgemeinert. Es zeigt sich, daß auch bei Tensorkräften das Potential durch die *S*-Matrix (Phasen), die Bindungszustände und genau so viele reelle symmetrische Matrizen, die an die Stelle der positiven Parameter treten, eindeutig bestimmt wird, allerdings muß, damit ein solches Potential existiert, die *S*-Matrix bestimmten Bedingungen gehorchen. *F. Cap.*

Klein, Abraham: Scattering matrix in the Heisenberg representation for a system with bound states. *Progress theor. Phys.* **14**, 580—588 (1955).

Für eine Feldtheorie, die außer Elementarteilchen auch zusammengesetzte Teilchen (gebundene Zustände) kennt, wird das Problem behandelt, die *S*-Matrix-Elemente für Stoßprozesse zwischen den zusammengesetzten Teilchen durch die Grundvariablen der Theorie, nämlich die Operatorfelder der Elementarteilchen, auszudrücken. Verf. schließt sich dabei an Arbeiten von Nishijima an, versucht jedoch demgegenüber eine Formulierung zu geben, die nur von den physikalischen (renormierten) Größen Gebrauch macht. *R. Haag.*

Borchers, H. J.: Einheitliche Darstellung des Energie-Impuls- und Spintensors für beliebigen Spin. *Z. Phys.* **141**, 571—584 (1955).

L'A. ramène à la forme $[p_\mu \beta^\mu - \kappa] \psi = 0$ les équations des corpuscules de spin quelconque établies par M. Fierz (ce Zbl. **20**, 189) et écrites par lui sous formes d'équations spinorielles. Il précise ensuite la forme générale du tenseur énergie-impulsion et montre l'équivalence des expressions obtenues avec celles obtenues sous forme spinorielle par M. Fierz. *G. Petiau.*

Bocchieri, P. e A. Loinger: Su una formulazione hamiltoniana covariante della teoria classica dei campi. *Nuovo Cimento, X. Ser.* **2**, 1058—1062 (1955).

In enger Anlehnung an das bekannte Vorgehen von Yang und Feldman in der Quantenfeldtheorie entwickeln die Verff. einen klassischen Feldformalismus. Da-

bei bleibt allerdings die Bedeutung der von der raumartigen Fläche σ abhängigen Hilfsfelder $\Phi[x, \sigma]$ und $\psi[x, \sigma]$ recht dunkel. F. Penzlin.

Schweber, S. S.: On the Yang-Feldman formalism. Nuovo Cimento, X. Ser. 2, 397—412 (1955).

Verf. gibt eine sehr detaillierte Darstellung des bekannten Yang-Feldman-Formalismus. Insbesondere werden die Vertauschungsrelationen nicht nur für die einlaufenden und auslaufenden Felder, sondern auch für die Wechselwirkungsoperatoren und das symmetrische Feld aufgestellt und mit ihrer Hilfe dann die Streutheorie formuliert. F. Penzlin.

Bocchieri, P. e A. Loinger: Sulla relazione fra la teoria di Tomonaga-Schwinger e quella di Dirac-Fock-Podolsky. Nuovo Cimento, X. Ser. 2, 314—319 (1955).

Verf. zeigen die Äquivalenz des mehrzeitigen Formalismus von Dirac-Fock-Podolsky mit der Feldtheorie von Tomonaga-Schwinger, wobei als „Vakuum“ jedoch der Zustand ohne Teilchen (also keine Löchertheorie!) fungiert. Zur Durchführung des Beweises wird eine kovariante Verallgemeinerung des von Becker und Leibfried (dies. Zbl. 40, 423) entwickelten Verfahrens benutzt. F. Penzlin.

Wakita, Hitoshi: Some remarks on the applicability of the field theory from the standpoint of the distribution analysis. Progress theor. Phys. 14, 260—261 (1955).

In der vorliegenden Note entwirft der Verf. eine äußerst knappe Skizze seiner Gedanken über eine mathematisch einwandfreie Behandlung der Quantenelektrodynamik. Da sein Vorschlag zum Schluß doch auf eine Regularisierung hinausläuft, scheint sie dem Ref. physikalisch nicht recht befriedigend. Ferner hat Ref. Bedenken, ob der vorgeschlagene Weg, insbesondere die Einführung des den Hilbertraum umfassenden Distributionsraumes \mathcal{S}' wirklich zu dem gewünschten Resultat führt. F. Penzlin.

Lehmann, H., K. Symanzik und W. Zimmermann: Zur Vertexfunktion in quantisierten Feldtheorien. Nuovo Cimento, X. Ser. 2, 425—432 (1955).

Aus der sogenannten „Vertexfunktion“ $\Gamma_5(p_1, p_2)$ in der pseudoskalaren Mesonentheorie können wir eine Funktion $f(p^2)$ in der folgenden Weise definieren: $\Gamma_5(p_1, p_2) = \gamma_5 f(-(p_1 - p_2)^2)$. Hierbei wird vorausgesetzt, daß Faktoren $i\gamma p_1$ links und $i\gamma p_2$ rechts gleich $-M$ gesetzt werden können, wenn M die Masse des Nukleons ist. Die Verf. zeigen dann, daß, wenn die studierte Theorie keine anomalen Zustände mit negativer Wahrscheinlichkeit enthält, die Funktion $f(p^2)$ die folgende Ungleichung erfüllen muß:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{\kappa \sqrt{\kappa^2 - 4M^2}}{(\kappa^2 - m^2)^2} |f(\kappa^2)|^2 d(\kappa^2) \leq 1$$

[Anomale Zustände dieser Art sind im Modell von Lee (Phys. Review, II. Ser. 95, 1329—1334 (1954); vgl. auch G. Källén-W. Pauli, Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. 30, Nr. 7 (1955)) gefunden worden.] Der Beweis dieser Ungleichung benützt die positiv definiten Eigenschaften einer gewissen Summe von Absolutquadraten. Die Bedingung ist notwendig aber nicht hinreichend, damit keine anomalen Zustände vorkommen. Es wird nicht diskutiert, ob die aufgestellte Bedingung wirklich erfüllt ist oder nicht. G. Källén.

Schweber, S. S.: On reduction formulae in field theory. Nuovo Cimento, X. Ser. 2, 173—175 (1955).

Nach Lehmann-Symanzik-Zimmermann [Nuovo Cimento, X. Ser. 1, 205—225 (1955)] kann man die Matricelemente eines beliebigen Wickschen T -Produktes auf die entsprechenden Vakuum Erwartungswerte (τ -Funktionen bei LSZ) reduzieren. Explizit durchgeführt wurde diese Reduktion in der zitierten Arbeit jedoch nur für den Fall eines Bosonfeldes. Verf. gibt hier nun die entsprechenden Formeln für den Fall eines Dirac-Feldes explizit an. F. Penzlin.

Duimio, F., P. Gulmanelli e A. Scotti: Su una semplice deduzione delle equazioni di Low dal formalismo di Lehmann-Symanzik-Zimmermann. Nuovo Cimento, X. Ser. 2, 1132—1134 (1955).

Verff. leiten die Integralgleichung von Low (dies. Zbl. 64, 219) aus der von Lehmann, Symanzik und Zimmermann [Nuovo Cimento, X. Ser. 1, 205—225 (1955)] angegebenen Formulierung der Quantenfeldtheorie her, indem sie die von den letztgenannten Autoren angegebene Reduktionsformel für die Mesonkoordinaten in dem Ausdruck für die Meson-Nukleonstreuung anwenden. *F. Penzlin.*

Ascoli, R.: On Bloch and Nordsieck's divergence. Nuovo Cimento, X. Ser. 2, 413—417 (1955).

Der Mittelwert der Zahl der langwelligen Bremsphotonen wird in der Rechnung von Bloch und Nordsieck nur deshalb unendlich, weil Übergänge zwischen Impulseigenzuständen betrachtet werden. Für normierbare Zustände bleibt er endlich. *K. Baumann.*

Searf, Frederick L.: Spectrum and nonrelativistic limit of a Bethe-Salpeter equation. Phys. Review, II. Ser. 100, 912—923 (1955).

The Bethe-Salpeter-equation for two scalar particles interacting through a massless scalar field is considered in the ladder approximation. The abnormal solutions found by Wick, which correspond to a finite coupling constant in the limit of zero binding energy, are examined in detail. However, mathematical errors lead the author to an incorrect conclusion as he admits in a later note: Phys. Review, II. Ser. 101, 1829 (1956). *Ch. Hayashi.*

Królikowski, W. and J. Rzewuski: Covariant one-time formulation of the many-body problem in quantum theory. Nuovo Cimento, X. Ser. 2, 203—219 (1955).

Eine kovariante einzeitige Gestalt des Mehrteilchenproblems der Quantentheorie der Wellenfelder wird durch die Transformation der üblichen Integrodifferentialgleichung der mehrzeitigen Theorie in eine äquivalente Gleichung hergeleitet, wo die Punkte des vierdimensionalen Minkowskischen Raum-Zeitkontinuums, von denen die Wellenfunktion und ihre Ableitungen abhängen, auf einer raumartigen Fläche liegen. Die erwähnte Transformation wird für beliebige Werte des Kopplungsparameters λ (ausgenommen eine Menge vom Maße Null) durchgeführt. Die Hauptresultate der vorliegenden Arbeit lassen sich von folgendem Satz ableiten: Ist (1) $G^{(i)}(x_1, x_2; x'_1, x'_2)$ eine eindeutige Lösung der Integrodifferentialgleichung

$$A^{(i)}[\sigma_1, \sigma_2](x_1, x_2; x'_1, x'_2) = \{x^{(i)} S\}(x_1, x_2; x'_1, x'_2) + \lambda \{G^{(i)} R S\}(x_1, x_2; x'_1, x'_2) - \lambda \int \int_{\sigma_1 \sigma_2} A^{(i)}[\sigma_1, \sigma_2](x_1, x_2; x''_1, x''_2) \gamma_\mu^{(1)} \gamma_\nu^{(2)} \{R S\}(x''_1, x''_2; x'_1, x'_2) d\sigma_\mu^{(1)} d\sigma_\nu^{(2)},$$

wo $\{A B \dots C\}(x_1, x_2; x'_1, x'_2) =$

$$\int_{\sigma_I}^{\sigma_{II}} \dots \int_{\sigma_I}^{\sigma_{II}} A(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 B(\xi_1, \xi_2; \dots) \dots C(\dots; x'_1, x'_2)$$

und $S(x_1, x_2; x'_1, x'_2) = S^{(1)}(x_1 - x'_1) S^{(2)}(x_2 - x'_2)$ mit $S^{(i)}(x) = (\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa^{(i)}) \Delta^{(i)}(x) (\Delta(x)$ ist die singuläre Jordan-Paulische Funktion), weiterhin R den lösenden Kern der Integralgleichung

$$\psi(x_1, x_2) = \psi^0(x_1, x_2) + \lambda \int \int_{\sigma_I}^{\sigma_{II}} R(x_1, x_2; x'_1, x'_2) \psi^0(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2$$

bedeuten, und (2) gehört λ nicht zum Spektrum der nachfolgenden Integrodifferentialgleichungen.

$$(\gamma_\mu^{(i)} \partial_\mu + \kappa^{(i)}) \psi(x_1, x_2) = \lambda \int \int_{\sigma_I}^{\sigma_{II}} G^{(i)}(x_1, x_2; x'_1, x'_2) \psi(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2$$

und

$$(\gamma^{(i)} \partial_\mu + \kappa^{(i)}) \psi(x_1, x_2) = \lambda \int \int_{\sigma_1 \sigma_2} A^{(i)}(\sigma_1, \sigma_2)(x_1, x_2; x'_1, x'_2) \gamma_\mu^{(1)} \gamma_\nu^{(2)} \psi(x'_1, x'_2) d\sigma_\mu^{(1)'} d\sigma_\nu^{(2)'}$$

($i = 1, 2$) äquivalent (hier bedeuten σ_I bzw. σ_{II} die raumartigen Grenzflächen des betrachteten Gebietes des Raumzeitkontinuums, und σ_1 bzw. σ_2 beliebige raumartige Flächen zwischen σ_I und σ_{II} ; $\gamma_\mu^{(i)}$ sind die Diracschen Matrizen). Sind also x_1 und x_2 bzw. x'_1 und x'_2 raumartige Punkte, so können die beiden Flächen σ_1 und σ_2 derart zusammenfallen: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, daß alle erwähnten Punkte auf σ liegen, was eine einzeitige Gleichung ergibt, die als Verallgemeinerung der Schrödingerschen Zweiteilchengleichung betrachtet werden kann. Es wird ferner der explizite Zusammenhang zwischen den Kernen $G^{(i)}$ und $A^{(i)}$ für kleine Werte von λ angegeben und die entsprechende stationäre Lösung eingehend diskutiert. Dadurch läßt sich die Kleinsche Behauptung [Phys. Review, II. Ser. 96, 1690 (1954)] widerlegen, daß nämlich die exakte kovariante Gestalt der mehrzeitigen Theorien in den einzeitigen Theorien durch eine Integraldifferentialgleichung nicht angegeben werden kann.

J. I. Horváth.

Królikowski, Wojciech: Radiation theory in crystals. Acta phys. Polon. 14, 93—105 (1955).

Ein System aus einem Atom, einem Elektronenfeld in einem periodischen äußeren elektrischen Feld sowie aus dem Strahlungsfeld wird untersucht. Als Ausgangspunkt wird eine Darstellung gewählt, welche sich von der Wechselwirkungsdarstellung darin unterscheidet, daß die Potentiale des Strahlungsfeldes statt der d'Alembertschen Gleichung einer Schrödinger-Gordon-Gleichung genügen. Die Massenkongstante der Schrödinger-Gordon-Gleichung wird so gewählt, daß die Potentiale die makroskopische Wellenbewegung in dem Kristall bereits richtig repräsentieren. Die scheinbare Photonenmasse und die Emissionswahrscheinlichkeit des Atoms werden unter der Annahme berechnet, daß das Elektronenfeld auf Gitterpunkte konzentriert ist.

K. Baumann.

Källén, G. and A. Sabry: Fourth order vacuum polarization. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. 29, Nr. 17, 20 p. (1955).

Der Integralkern der Vakuumpolarisation läßt sich durch den Vakuumerwartungswert des Produkts zweier Stromoperatoren darstellen. Der Imaginärteil dieses Erwartungswertes wird nach Aufspalten des Matrixelements und Einsetzen eines vollständigen Orthogonalsystems eine konvergente Summe von Produkten zweier Matrixelemente des Stromes. Diese Summe wird unter Benutzung bereits bekannter störungstheoretischer Ausdrücke für diese Strommatrixelemente ausgewertet. Aus dem so erhaltenen Imaginärteil wird der Realteil durch Hilberttransformation gewonnen, so daß, im Gegensatz zu älteren Verfahren, die Renormierung von Ausdrücken vierter Ordnung vermieden wird.

K. Symanzik.

Bernstein, Jeremy and Abraham Klein: Electromagnetic properties of the deuteron. I. Charge density and quadrupole moment. Phys. Review, II. Ser. 99, 966—973 (1955).

Unter der Annahme, daß höchstens zwei Mesonen aber kein Nukleon-Antinukleon-Paar vorhanden ist, wird die Tamm-Dancoff-Methode zur Berechnung der Ladungsverteilung und des Quadrupolmomentes des Deuterons verwendet. Als Kernkrafttheorie wird die *PS* *ps*-Mesonentheorie angenommen. Es ergibt sich eine Formel zur Berechnung von Multipolmomenten beliebiger Ordnung, die zur Berechnung der einzelnen Austauschkorrekturen verwendet wird. Es zeigt sich, daß die Korrekturen, wie bekannt, nur wenige Prozent betragen.

F. Cap.

Lévy, Maurice M.: Effect of renormalization on meson-nucleon *S*-scattering. Phys. Review, II. Ser. 98, 1470—1478 (1955).

Verf. gibt Renormierungsvorschriften für die invariante Integralgleichung der Meson-Nukleon-Streuung an und löst diese näherungsweise für die pseudoskalare

Mesonentheorie mit pseudoskalarer Kopplung. Für die Werte $1/2$ und $2/3$ des isotopen Spins werden die S -Phasen abgeleitet und mit den experimentellen Werten verglichen. Bei geeigneter Verfügung über den einzigen freien Parameter, der Kopplungskonstante $g^2 = 7.5 \cdot 4\pi$ ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten, doch bleibt die Möglichkeit einer rein zufälligen Übereinstimmung offen.

F. Cap.

Feldman, David: Nonrelativistic interaction between two nucleons. Phys. Review, II. Ser. **98**, 1456—1470 (1955).

The problem to derive the two nucleon Schrödinger equation from the quantum field theory is discussed, where only those mesons which are exchanged between the nucleons are taken into account discarding the nucleon self-energy parts. The Fock space representation is adopted as was done by Tamm and Dancoff. The two body nuclear potentials are obtained applying successive canonical transformations to eliminate the terms nondiagonal with respect to the particle numbers. This procedure has an advantage over the method developed by Levy-Klein and Bethe-Salpeter since the latter leads to energy-dependent and non-hermitian potentials while the former does not. This method is analogous to that of obtaining the nonrelativistic Pauli approximation from the Dirac electron theory by a canonical transformation. Assuming the small coupling constant f for meson-nucleon interaction, the nuclear potentials are evaluated up to the fourth order in f . (Here it is also assumed that the energy of the system is small and the coupling to high momentum meson is weak.) If one expands the potentials with respect to the pion-nucleon mass ratio μ/M , the leading terms are in agreement with the so-called adiabatic nuclear potentials derived by many authors and the non-adiabatic corrections linear in μ/M are found to vanish. In this respect one may say that the adiabatic potentials are justified for the two nucleon system with low energies ($\ll \mu^2/M$).

Y. Yamaguchi.

Kar, K. C. and Durga Roy: The nature of Yukawa potential. Indian J. theor. Phys. **2**, 159—166 (1955).

Die Verf. behaupten, daß die Kernkräfte rein elektromagnetischen Ursprungs seien und durch die Polarisation der Nukleonen bzw. deren magnetische Momente zustande kämen. Ref. ist leider nicht in der Lage, sich dieser Meinung anschließen zu können.

F. Cap.

Gartenhaus, Solomon: Two-nucleon potential from the cut-off Yukawa theory. Phys. Review, II. Ser. **100**, 900—905 (1955).

Verf. leitet das Potential 2. und 4. Ordnung der symmetrischen pseudoskalaren Mesonentheorie mit Gradientkopplung für ausgedehnte Nukleonen ab und geht von der Annahme aus, daß die kinetische Energie der Nukleonen klein sei gegenüber der Gesamtenergie der ausgetauschten Pionen. Die abgeleiteten Potentiale besitzen etwa ein bei $0,6 \cdot 10^{-13}$ cm liegendes Minimum und gestatten es, die exponentiellen Daten des Zweinukleonenproblems bis 10 MeV sowie die Pion-Nukleon-Streuung in annehmbarer Näherung darzustellen.

F. Cap.

Otsuki, Shoichiro and Ryozi Tamagaki: On the meson-theoretical potentials. Progress theor. Phys. **14**, 52—64 (1955).

Für den Bereich $r > r_0$, $r_0 = 1,40 \cdot 10^{-13}$ cm untersuchen Verf. die Fähigkeit der statischen Potentiale 2. Ordnung der symmetrischen pseudoskalaren Mesonentheorie, experimentelle Daten des Zweinukleonenproblems richtig wiederzugeben. Verf. untersuchen insbesondere die Proton-Proton-Streuung und kommen zu dem Schluß, daß diese bis 18 MeV in befriedigender Weise beschrieben werden könne. Kleine Unterschiede zwischen den theoretischen und den experimentellen Werten werden dazu verwendet, die Potentiale 4. Ordnung zu bestätigen.

F. Cap.

Iwadare, Junji: Nonadiabatic treatment of nuclear forces. II. Nonstatic corrections. Progress. theor. Phys. **14**, 16—26 (1955).

Im Rahmen der symmetrischen PS ps -Mesonentheorie untersucht Verf. die

nichtstatischen Beiträge zu den Potentialen zweiter und vierter Ordnung. Die Potentiale selbst werden mit Hilfe einer kanonischen Transformation (Teil I, dies. Zbl. 65, 224) und die nichtstatischen Korrekturen durch eine Reihenentwicklung nach Potenzen von $p/2M \sim m_{\text{Meson}}/2M$ gewonnen (p Nukleonenimpuls, M Nukleonmasse). Die gewonnenen, für kleine Entfernungen ($< 0,6 \cdot 1,40 \cdot 10^{-13}$ cm) geltenden Ergebnisse sind allerdings infolge der für diesen Bereich nicht zulässigen Reihenentwicklungen höchstens als qualitativ richtig anzusehen. Bemerkenswert ist, daß die Abtrennung der (hier betrachteten) Beiträge der Nicht-Paarsterme von den Beiträgen, die die Paarsterme liefern, zu physikalisch unvernünftigen geschwindigkeitsabhängigen Potentialen führt. Die Trennung der Beiträge dieser verschiedenartigen Effekte muß vermutlich in anderer Weise vorgenommen werden. Die von Klein gefundene Spin-Bahn-Kopplung als Folge des Zwei-Paar-Termes hebt sich durch Beiträge des Ein-Paar-Termes wieder weg. Für $r > 1,40 \cdot 10^{-13}$ cm sind die nichtstatischen Korrekturen bedeutungslos. F. Cap.

Hanawa, Sigeo, Mikio Namiki and Shin Chiba: Low energy limits of photon-nucleon and pion-nucleon collisions. *Progress theor. Phys.* 14, 551—579 (1955).

Der Schwingersche Kalkül mit Greenschen Funktionen zur Beschreibung wechselwirkender quantisierter Felder wird auf drei aneinander gekoppelte Felder angewendet: das Nukleonenfeld, das symmetrische, pseudoskalare Mesonenfeld und das elektromagnetische Feld. Die Ergebnisse gelten nur für kleine Energien und nur dann, wenn das Verhältnis zwischen Mesonenmasse und Nukleonenmasse klein ist, aber für beliebig große Kopplungskonstanten. Im Falle der unelastischen Streuung eines Mesons an einem Nukleon unter Emission eines zweiten Mesons und im Falle der Erzeugung dreier Mesonen bei der Absorption eines Lichtquants ergibt bereits das erste Glied einer Reihenentwicklung nach der elektrischen und der mesischen Ladung das korrekte Ergebnis. Die höheren Glieder bewirken nur Renormierungen. Voraussetzung hierfür ist, daß die renormierte Matthewssche Konstante für die direkte Wechselwirkung zweier Mesonen mindestens von der gleichen Größenordnung ist, wie die renormierte mesische Ladung. K. Baumann.

Haber-Schaim U. and W. Thirring: Remarks on pion nucleon scattering. *Nuovo Cimento, X. Ser.* 2, 100—119 (1955).

Verff. benutzen eine nichtrelativistische Feldtheorie, die nach dem Vorbild des Lee-Modells [*Phys. Review, II. Ser.* 95, 1329—1334 (1954)] konstruiert ist, und berechnen darin die Streuphasen für die $1/2, 1/2$ und $3/2, 3/2$ Zustände. Die Ergebnisse sind von Interesse für den Vergleich der 1. und 2. Näherung der Tamm-Dancoff-Methode in der üblichen Mesentheorie mit Pseudovektor-Kopplung. R. Haag.

Mitra, A. N.: Pion-nucleon scattering at high energies. *Phys. Review, II. Ser.* 99, 957—965 (1955).

Verf. untersucht die Frage, ob das 2. Maximum in der Wirkungsquerschnittskurve der π -Nukleonstreuung (bei etwa 1 BEV) aus der Mesentheorie als eine Resonanzstelle erklärt werden kann. In Frage kommt dafür nur ein Zustand mit Isotopenspin $1/2$ und Drehimpuls $5/2$ (erstes ist aus dem Experiment, letzteres aus der Theorie geschlossen). Für diesen Zustand berechnet der Verf. mit der niedrigsten Näherung der Tamm-Dancoff-Methode eine Integralgleichung für die Streuamplitude, die er näherungsweise löst. Er findet dabei keine Resonanz. R. Haag.

Barras, Alexander H.: Double scattering of pseudoscalar mesons. *Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A* 57, 137—149 (1955).

Unter Verwendung der pseudoskalaren Mesonentheorie mit Gradientkopplung untersucht Verf. die doppelte Streuung von Pionen an Nukleonen. Es werden in niederster störungstheoretischer Näherung Ausdrücke für die differentiellen Wirkungsquerschnitte abgeleitet. Für nichtrelativistische Energien ergibt sich der Wirkungsquerschnitt für Doppelstreuung zu 0,4% des Wirkungsquerschnittes der einfachen Streuung, wenn $g^2/\hbar c = 4$ gewählt wird. F. Cap.

Singh, K. K.: Fermi's statistical theory of multiple pion production. Indian J. Phys. **29**, 199—204 (1955).

L'A. étudiant la production multiple des pions dans le choc nucléon-nucléon aux hautes énergies selon le modèle de Fermi [Progress theor. Phys. **5**, 570 (1950)] applique la thermodynamique statistique relativiste classique à un gaz de pions et retrouve l'expression proposée par Fermi pour la probabilité de production de N pions. La théorie de Fermi généralisée au cas du choc nucléon-noyau contenant N nucléons conduit à une expression donnant la probabilité pour la production d'un état formé de N pions et de $n + 1$ nucléons. La multiplicité des pions produits est dans ce cas beaucoup plus grande que dans le choc nucléon-nucléon. *G. Petiau.*

Utiyama, Ryoyu: A theory of new particles. Phys. Review, II. Ser. **100**, 248—254 (1955).

Der Formalismus des isotopen Spins wird so verallgemeinert, daß er eine einheitliche, ladungssymmetrische Formulierung der Grundgleichung der Felder der Baryonen ($P, N, \Lambda^0, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Lambda^0, Y$) und der Mesonen ($\pi^+, \pi^0, \pi^-, \theta^+, \theta^0, \tau^+, \tau^0$) ermöglicht. In der Wechselwirkungs-Lagrangedichte tritt wie in der bekannten pseudoskalaren Mesontheorie die Matrix γ_5 auf. Diese Matrix gibt Anlaß zu einer neuen Auswahlregel bezüglich der inneren Parität, welche von Bedeutung sein könnte für die Metastabilität gewisser neuer Teilchen. *G. Heber.*

Papapetrou, A. und W. Urich: Das Pol-Dipol-Teilchen im Gravitationsfeld und elektromagnetischen Feld. Z. Naturforsch. **10a**, 109—117 (1955).

Les AA. se proposent de représenter, en relativité générale, le mouvement d'une particule pôle-dipole dans un champ gravitationnel et électromagnétique. La particule est représentée au moyen d'un tenseur d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$, nul en dehors d'un mince tube d'univers entourant la courbe $z^\alpha = z^\alpha(s)$ et satisfaisant à

$$\int T^{\alpha\beta} \delta x^\gamma \delta x^\lambda \dots \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 dx^3 = 0 \quad \delta x^\alpha = x^\alpha - z^\alpha(s)$$

pour deux facteurs δx^γ au moins (l'intégrale est étendue à une section d'espace). De plus si ρ_0 est la densité de charge propre, l'absence de charge multipolaire est traduite par $\int \rho_0 \delta x^\alpha \dots \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 dx^3 = 0$. Sous ces hypothèses de structure, les AA. déterminent les équations du mouvement successivement pour le tenseur cinétique $S^{\mu\nu}$ et pour le vecteur-vitesse unitaire $u^\alpha = dz^\alpha/ds$ et discute ces équations dans les formalismes lagrangien et hamiltonien. La théorie non gravitationnelle (voir par exemple F. Bopp et F. L. Bauer, ce Zbl. **35**, 273) des particules pôle-dipole se laisse ainsi grosso modo généraliser et il en est en particulier ainsi des propriétés des parenthèses de Poisson. *A. Lichnerowicz.*

Nishijima, Kazuhiko: On the interaction between hyperons and nucleons and the hyperfragments. Progress theor. Phys. **14**, 527—534 (1955).

Verf. verwendet einige empirische bekannte Eigenschaften von leichten Hyperfragmenten, um Aussagen über Eigenschaften des Hyperons Λ_0 zu machen. Genauer handelt es sich um die Reichweite und Stärke der Kraft zwischen Λ_0 und Nukleonen. Aus der Analyse folgt u. a., daß ein Gebilde, bestehend aus einem Hyperon Λ_0 und einem Nukleon, stabil und daß der Spin von Λ_0 nicht größer als $3/2$ sein sollte. Diese Schlüsse sind jedoch noch nicht ganz sicher fundiert, da die Überlegungen zum Teil Abschätzungs-Charakter besitzen. *G. Heber.*

Kernphysik:

Austern, N.: Isobar rule in two-nucleon processes. Deuteron photoeffect. Phys. Review, II. Ser. **100**, 1522—1529 (1955).

The nucleon isobar state with spin $3/2$ and isotopic spin $3/2$ is assumed and applied literally in the intermediate states to calculate the cross sections of deuteron photoeffect and nucleon Compton effect. This approach is similar to that due to

Gell-Mann and Watson, i.e., an analog to the dispersion theory for nuclear reactions. The author tried to make the derivation as simple and elementary as possible omitting a sound basis of specific meson theory. The cross sections for the processes $\pi^+ + p \rightarrow p + \pi^+$, $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$, $\pi^+ + d \rightarrow p + p$ and $\gamma + d \rightarrow n + p$ are expressed in dispersion forms. Then one finds a simple relation between these cross sections

$$(1) \quad \sigma(\gamma + d \rightarrow n + p) = \frac{9}{4} \cdot \frac{\sigma(\gamma + p \rightarrow p + \pi^0) \sigma(\pi^+ + d \rightarrow p + p)}{\sigma(\pi^+ + p \rightarrow p + \pi^+)}$$

and the angular distribution (2) $d\sigma(\gamma + d \rightarrow n + p)/d\omega \sim 2 + 3 \sin^2 \theta$. Inserting appropriate experimental values to the right hand side of (1), one can see that (1) and (2) are in fair agreement with observed deuteron photoeffect around the resonance peak (~ 3000 MeV photon). At off-resonance regions (1) and (2) should not be accepted seriously, because many effects which are not taken into account to derive (1) and (2) become now important. Similarly the nucleon compton cross-section around the resonance peak is given by

$\sigma(\gamma + p \rightarrow p + \gamma) = \frac{9}{2} (E/qc)^2 \sigma^2(\gamma + p \rightarrow p + \pi^0)/\sigma(\pi^+ + p \rightarrow p + \pi^+)$
 $d\sigma(\gamma + p \rightarrow p + \gamma)/d\omega \sim 7 + 3 \cos^2 \theta$. The maximum cross section is about 10 times as large as the Thomson cross section $(8\pi/3) (e^2/Mc^2)^2$. Y. Yamaguchi.

Marx, G. und G. Szamosi: Die Oberflächenenergie angeregter Atomkerne. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 5, 189—198 (1955).

Die von Bohm und Courant zur Berechnung der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten angegebenen statistischen Methoden werden auf die Verhältnisse des Atomkerns übertragen. Es ergibt sich, daß die Oberflächenspannung bei starker Anregung beträchtlich abnimmt. K. Wildermuth.

Kind, A.: The low energy nuclear mechanics and the independent particle model. Nuovo Cimento, X. Ser. 2, 443—449 (1955).

Verf. diskutiert das Ein-Teilchen-Modell des Atomkerns, vor allem die Emissionsprozesse einzelner Nukleonen aus angeregten Kernen. G. Süßmann.

Moszkowski, Steven A.: Particle states in spheroidal nuclei. Phys. Review, II. Ser. 99, 803—809 (1955).

Verf. gibt ein Näherungsverfahren zur Bestimmung von Energieniveaus und Eigenfunktionen im rotationselliptischen Potentialtopf an, das auch bei Einschluß der Spin-Bahn-Kopplung noch zu einfachen Formeln führt. Die Eigenfunktionen der nullten Näherung gehen aus denen der kugelförmigen Potentialtopfes durch die gleiche Transformation hervor, die die Kugel auf das Rotationsellipsoid abbildet. Eine Übertragung des Verfahrens auf andere Potentialformen ist möglich.

K. Wildermuth.

Cini, M. and S. Fubini: A theoretical investigation of nuclear reactions with neutrons. Nuovo Cimento, X. Ser. 2, 75—89 (1955).

Es wird ein quantenmechanisches Näherungsverfahren entwickelt, um die Wechselwirkung eines Neutrons mit den Nukleonen eines Targetkernes zu untersuchen. Unter gewissen Voraussetzungen gestattet die Theorie die Berechnung eines Absorptionskoeffizienten für das einfallende Neutron. Dieser wird dann verglichen mit dem Imaginärteil des optischen Potentials in der phänomenologischen Theorie von Feshbach, Porter und Weisskopf. Es zeigt sich, daß — insbesondere durch die Wirkung des Pauli-Prinzips zwischen dem einfallenden Neutron und den Nukleonen des Targetkerns — das Imaginärpotential bei der Energie Null etwa den Wert 0,03 bis 0,05 hat, mit wachsender Energie aber anwächst, und bei 6—8 MeV schon fast der totalen Absorption (schwarzer Kern) entspricht. Dieses Ergebnis ist sowohl in guter Übereinstimmung mit den Experimenten als auch mit den Resultaten, die von anderen Autoren mit Hilfe der halbklassischen Goldberger-Methode erzielt wurden.

P. Mittelstaedt.

Lipkin, H. J., A. de Shalit and I. Talmi: On the description of collective motion by the use of superfluous co-ordinates. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 2, 773–798 (1955).

Es wird gezeigt, wie man kollektive Bewegungen mit Hilfe von formal eingeführten überzähligen Koordinaten bequem beschreiben kann. Die Methode wird dann an dem geläufigen Beispiel der Translationsbewegung im einzelnen vorgeführt. Man kommt zu einer Galilei-invarianten Formulierung des Schalenmodells. Anschließend wird die Rotationsbewegung behandelt, wobei die Ähnlichkeiten und die Unterschiede zur Translation hervorgehoben werden. Insbesondere wird der Fall untersucht, in dem die „mechanischen Quadrupolmomente“ die Rolle der kollektiven Koordinaten spielen, und es wird gezeigt, daß dies bis auf Korrekturterme die Bohr-Mottelsonschen Ausdrücke der wirbelfreien, inkompressiblen Strömung der Kernmaterie ergibt. Schließlich wird die Methode auf allgemeinere kollektive Bewegungen ausgedehnt, insbesondere auf die Oszillationen des Kerntropfchens.

G. Süßmann.

Coester, F.: Collective modes in nuclei. *Phys. Review*, II. Ser. 99, 170–174 (1955).

Verf. untersucht die Quadrupol- und Kompressions-Schwingungen der Atomkerne mittels einer Koordinatentransformation im Konfigurationsraum und mit einer Produkt-Wellenfunktion als Variationsansatz. Der eine Faktor beschreibt die individuellen Nukleonbewegungen in den abgeschlossenen Schalen, der andere ihre kollektiven Bewegungen und die individuellen der „äußeren“ Nukleonen. Eine Nebenbedingung tritt demgemäß nicht auf. Verf. erhält so den Bohr-Mottelsonschen Hamiltonoperator mit Korrekturtermen. Er diskutiert insbesondere den Fall starker Kopplung und erhält das Trägheitsmoment der wirbelfreien inkompressiblen Strömung.

G. Süßmann.

Gustafson, Torsten: On the potential collective flow of a rotating nucleus with non-ellipsoidal boundary. *Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd.* 30, Nr. 5, 16 p. (1955).

Mit Hilfe des von Bohr und Mottelson entwickelten Tropfenmodells für den Atomkern kann man, unter der Annahme einer rotationselliptischen Deformation der Kernoberfläche, viele experimentell beobachtete Energieniveaus als Rotationsniveaus deuten. Es zeigt sich dabei allerdings, daß in fast allen Fällen die berechneten Trägheitsmomente der Kerne Rotationsniveaus liefern, die um den Faktor 4 bis 5 kleiner sind als die beobachteten Werte, oder umgekehrt: Aus den beobachteten Energiewerten folgen zu große Trägheitsmomente. In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, ob rotationssymmetrische Kernformen, die vom Ellipsoid abweichen, bessere Übereinstimmung mit den Experimenten liefern. Es zeigt sich, daß man bei vernünftigen Annahmen für die Abweichungen vom Ellipsoid zu Rotationsenergien gelangt, die nur noch um den Faktor 2 von den experimentellen Werten abweichen.

K. Wildermuth.

Hayakawa, Satio and Shiro Yoshida: Inelastic scattering of neutrons by rotational excitation. *Progress theor. Phys.* 14, 1–15 (1955).

Die vorliegende Arbeit behandelt die Streuung von Neutronen an Atomkernen. Das Streuzentrum wird beschrieben durch Wellenfunktionen aus dem Bohr-Mottelsonschen Kollektivmodell, und der Ansatz für die Wechselwirkung zwischen dem einfallenden Neutron und dem Kern wird ebenfalls der Bohr-Mottelsonschen Theorie entnommen. Es zeigt sich, daß der Wirkungsquerschnitt stark vom Atomgewicht und der Potentialtopftiefe, die in den Wechselwirkungsansatz eingeht, abhängt, so daß es schwierig ist, die Ergebnisse mit experimentellen Werten zu vergleichen.

K. Wildermuth.

Gatto, R.: Theory of the effect of nucleon-nucleon correlations on the scattering of high energy electrons or muons by nuclei. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 2, 669–676 (1955).

Der Verf. studiert den Einfluß der Korrelationen zwischen den Nukleonen

eines Kernes auf die Streuung eines schnellen Elektrons oder μ -Mesons durch einen Kern. Er gibt eine allgemeine Diskussion dieses Effektes und erörtert ausführlich den Grenzfall von Kernkräften mit Reichweite Null. *P. Urban.*

Nielsen, O. B.: Multipole order of the γ -rays from $_{81}\text{Tl}^{208}$. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. **30**, Nr. 11, 16 p. (1955).

Der α -Zerfall von Bi^{212} liefert Tl^{208} entweder im Grundzustand oder in einem von 5 angeregten Niveaus; diese zerfallen ihrerseits unter Emission von γ -Strahlen und Auger-Elektronen (β -Strahlen). Aus dem Koinzidenzspektrum der α - und β -Strahlen lassen sich die Koeffizienten der inneren Umwandlung errechnen, deren Vergleich mit den theoretischen Werten Aussagen über die Multipolordnung der γ -Strahlung gestattet: In fünf Fällen haben wir es mit magnetischer Dipolstrahlung zu tun. *K. Wildermuth.*

Hurwitz, H. and P. F. Zweifel: Slowing down of neutrons by hydrogenous moderators. J. appl. Phys. **26**, 923—931 (1955).

In der Reaktortechnik kann die Abbremsung der Neutronen verhältnismäßig einfach mit der Fermischen „Altersgleichung“ bestimmt werden, wenn die prozentuale Energieabgabe pro Stoß so klein ist, daß mit kontinuierlicher Bremsung gerechnet werden kann. Dies ist nicht der Fall bei der Bremsung durch wasserstoffhaltige Moderatoren, bei denen man auf kompliziertere Rechenverfahren angewiesen ist. Es wird hier mit unendlich ausgedehntem Moderator und einer einer einzelnen Fourierkomponente entsprechenden Quellstärke gerechnet. Durch Entwicklung nach Legendre-Polynome werden aus der Boltzmannschen Transportgleichung zwei Näherungsverfahren abgeleitet, die für genauere numerische Rechnungen geeignet sind. *H. Gaus.*

Hill, R. D.: Model for asymmetric fission. Phys. Review, II. Ser. **98**, 1272—1276 (1955).

Unter der Annahme einer räumlichen Schalenstruktur des Kernes wird die Spaltung von U^{235} als symmetrischer Einschnitt bis zu einer Unterschale gedeutet, wo diese den nichtspaltenden Kernteil umschließt, der sich zu einem der beiden Spalthälften schlägt. Die Berechnung der statistischen Verteilung der beim Einschnitt freiwerdenden Neutronen führt zu einer guten Annäherung an die experimentellen Kurven der Spaltstück- und Ladungsverteilung. Insbesondere kann die Energieabhängigkeit der Sattelpunkthöhe erklärt werden. *K. Wildermuth.*

Woeste, K.: Kernspaltung im Kollektivmodell. I. Z. Phys. **141**, 643—658 (1955).

Die Abhängigkeit der Energieniveaus eines rotationselliptisch deformierten Oszillatorpotentials von der Größe der Deformation wird diskutiert. Die Anwendung dieses Modells auf die Kernspaltung — von zusätzlichen Oberflächenkräften sowie den Coulombkräften wird abgesehen — zeigt eine starke Abhängigkeit der Kernspaltung von der Schalenstruktur. *K. Wildermuth.*

Woeste, K.: Kernspaltung im Kollektivmodell. II. Z. Phys. **143**, 31—43 (1955).

(Teil I s. vorsteh. Referat). Den beiden Energiebeiträgen: Oberflächenenergie und Coulombenergie, die bisher dem Studium der Oberflächenschwingungen der Atomkerne zugrunde gelegt wurden, fügt der Verf. noch einen Einteilchenenergiebeitrag hinzu. Die Schwingungsenergien liegen dann für schwere Kerne bei etwa 6 MeV. Die induzierte Spaltung wird als Resonanzeffekt gedeutet. *K. Wildermuth.*

Lopuszański, Jan: Solution of the fluctuation problem in the cascade theory by means of the G-equations of Jánossy without ionization loss. Acta phys. Polon. **14**, 191—196 (1955).

In the one dimensional cascade theory with approximation A the G-equation of Jánossy is solved in a form of a recurrent formula. The energy region is divided into bands: $1/(n+1) < \varepsilon \leq 1/n$, where ε is expressed in terms of the solution for $\varepsilon > 1/n$. Neither the explicit form of the solution nor the numerical result is given. *S. Hayakawa.*

Lopuszański, Jan: The solution of the G -equations of Jánossy with ionization loss. *Acta phys. Polon.* **14**, 251—253 (1955).

The method of the author (see the preceding review) is extended to the case of approximation B . A recurrent formula similar to that in approximation A is obtained.

S. Hayakawa.

Fester Körper:

• Landolt-Börnstein: Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik. Herausgegeben von Arnold Eucken†. I. Band: Atom- und Molekularphysik. 4. Teil: Kristalle. Herausgegeben von K. H. Hellwege. 6. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1955. XI, 1007 S. 930 Abb.

Von den bekannten Zahlentabellen liegt nun der 4. Teil des ersten Bandes vor, der die Konstanten der Kristalle bringt. Es sind jedoch nur solche Daten enthalten, deren Messung atomphysikalische Methoden verlangt oder die atomphysikalisch gedeutet werden können. Grund zu dieser Teilung scheint die Zugehörigkeit des Teilbandes 4 zum 1. Band zu sein, der die Atom- und Molekularphysik enthält. Angaben über Kristallphosphore oder Halbleitereigenschaften, deren atomphysikalische Deutung noch nicht völlig klar ist, findet man daher nicht im Bd. 1/4. Das Werk hat folgenden Inhalt: Auf Erläuterungen zur Benutzung folgen klare und übersichtliche Tabellen über Symmetrieelemente, die 32 Kristallklassen (auch in graphischer Darstellung) und eine Systematik der Raumgruppen. In zwei großen Abschnitten werden dann die Gittertypen, Strukturen und Dimensionen sehr vieler anorganischer und organischer Kristalle behandelt. Eine eigene Tabelle erleichtert die Auffindung spezieller Substanzen. Der nächste Abschnitt ist den Ionen- und Atomradien gewidmet. Es folgen Daten über die Gitterenergien der Kristalle und über innere Schwingungen. Diese Abschnitte enthalten nicht nur Meßwerte (Raman-spektren) sondern auch quantenmechanisch berechnete Werte. Die Elektronen-emission von Metallen und Metalloiden, die Energiebänder in Festkörpern, Röntgenspektren und Bindungszustände sowie die Elektronenspektren von Kristallen bilden den Inhalt der weiteren Abschnitte. Die Hochfrequenzspektren von Kristallen (einschließlich der Kernresonanzfrequenzen sowie der Kernquadrupolspektren) und Absorptionen durch Gitterstörungen sind Gegenstand der beiden letzten Abschnitte. — Alle Abschnitte sind mit speziellen Erläuterungen, sehr ausführlichen Literaturverzeichnissen und meist auch mit einer Substanzentabelle versehen. Text, Anordnung Druck sowie Auswahl der Daten und Zitate sind so vorzüglich, wie man es von diesem Standardwerk gewohnt ist.

F. Cap.

Wondratschek, Hans: Eine anschauliche Ableitung einiger physikalischer Eigenschaften in verschiedenen Kristallklassen. *Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin* **4** (1954/55), 11—18 (1955).

Am Beispiele der Pyro- und der Piezoelektrizität (mit einigen Bemerkungen über Optik und Spannungsoptik) wird erläutert, wie elementare aber etwas umständliche Überlegungen gestatten, physikalische Eigenschaften in verschiedenen Kristallklassen abzuleiten. Pyroelektrizität z. B. verlangt die Möglichkeit einer einzigen polaren Achse, was nur in den 10 Klassen 1, 2, m , $2mm$, 3, $3m$, 4, $4mm$, 6 und $6mm$ der Fall ist. Dabei ist folgender Satz wichtig: Ist eine physikalische Eigenschaft so beschaffen, daß sie allen erzeugenden Symmetrieelementen eines Kristalles genügt, so genügt sie auch allen anderen Symmetrieelementen des Kristalles.

W. Nowacki.

Smirnov, A. A.: Zur Bewegungstheorie des Elektrons im Kristallgitter eines geordneten Kristalls. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1955, 67—73 und russ. Zusammenfassg. 73 (1955) [Ukrainisch].

Es wird die Bewegungstheorie des Elektrons im Kristallgitter eines binären sich ordnenden Kristalls untersucht. Die Rechnungen geschehen in der Näherung der fast freien Elektronen.

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Barron, T. H. K. and C. Domb: On the cubic and hexagonal close-packed lattices. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **227**, 447—465 (1955).

Die große Stabilität der kubischen Packung im Vergleich zur hexagonalen Packung wird durch den Einfluß der Nullpunktsenergie erklärt. Die statische Gitterenergie ist für die hexagonale Packung kleiner, die Nullpunktsenergie größer als für die kubische Packung.

G. Leibfried.

Benson, G. C. and H. P. Schreiber: A method for the evaluation of some lattice sums occurring in calculations of physical properties of crystals. II. *Canadian J. Phys.* **33**, 529—533 (1955).

Schreiber, H. P. and G. C. Benson: Edge energies of alkali halide crystals. *Canadian J. Phys.* **33**, 534—540 (1955).

Sutton, Paul M.: Computation of mean Debye temperature of cubic crystals from elastic constants. II. *Phys. Review, II. Ser.* **99**, 1826—1830 (1955).

(Teil I, Quimby and Sutton, dies. Zbl. **51**, 230.) Ein Verfahren zur Berechnung der Debye-Temperatur in kubischen Kristallen wird angegeben. Aus der graphischen Darstellung lassen sich die Debye-Temperaturen mit einer Genauigkeit von etwa 0,5% gewinnen.

G. Leibfried.

Birman, Joseph: Effect of overlap on electrostatic lattice potentials in ionic crystals. *Phys. Review, II. Ser.* **97**, 897—902 (1955).

Das elektrostatische Gitterpotential in NaCl- und ZnS-Strukturen wird für ausgedehnte Ionen berechnet. Das „Ion“ besteht aus einer Punktladung und einer Gaußschen Verteilung, deren Breite variiert wird. Die Auswertung geschieht nach einem Verfahren, das der Ewaldschen Berechnung von Gittersummen nachgebildet ist. Ein Vergleich mit experimentellen Daten wird nicht versucht.

G. Leibfried.

Hwang, Jenn-Lin: Revised Houston method for counting lattice frequencies. *Phys. Review, II. Ser.* **99**, 1098—1100 (1955).

Eine von Houston stammende Methode zur näherungsweisen Berechnung des Spektrums von Gitterschwingungen wird verbessert 1. durch Unterteilung des Wellenzahlbereichs in Gebiete, die verschieden behandelt werden, 2. durch verbesserte Annahmen über die Flächen konstanter Frequenz.

G. Leibfried.

Fokker, A. D.: Nomenclature of strain parameters. *Physica* **21**, 575—578 (1955).

Salter, L.: On the thermodynamics of crystalline lattices. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **233**, 418—427 (1955).

Die Kopplungsparameter von Aluminium werden unter der Annahme von Wechselwirkung zwischen nächsten und übernächsten Nachbarn bestimmt. Die Kopplungsparameter liefern die Frequenzen der Gitterschwingungen und damit das ganze thermische Verhalten eines Kristalls in der Annäherung durch harmonische Schwingungen. Die 5 unabhängigen Kopplungsparameter werden aus den 3 elastischen Konstanten, sowie dem Verlauf der spezifischen Wärme und der Entropie bei hohen Temperaturen ermittelt. Der Zusammenhang zwischen Entropie und Kopplungsparameter wird aus einer näherungsweisen Berechnung der dabei auftretenden Gittersummen erhalten. Ein Vergleich mit einem Modell nächster Nachbarwechselwirkung, dessen 3 Parameter aus den elastischen Daten ermittelt werden können, zeigt relativ große Unterschiede.

G. Leibfried.

Kitajgorodskij, A. I.: Theorie der Kopplung der Strukturamplituden. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **105**, 482—484 (1955) [Russisch].

Es wird bewiesen, daß die Wahrscheinlichkeit für ein positives Vorzeichen des Produktes der Strukturamplituden $F_H F_K F_{K-H}$ gleich ist $W_+ = 1/(1 + \varepsilon)$ mit

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1 - F_H^2 - F_K^2 - F_{K-H}^2 + 2 F_H F_K F_{K-H}}{1 - F_H^2 - F_K^2 - F_{K-H}^2 + 2 |F_H F_K F_{K-H}|}} \exp \left[\frac{2 |F_H F_K F_{K-H}|}{\sum n_j^2} \right]$$

(n_j = Elektronenzahl des Atoms j in der Elementarzelle) (nach deutscher Übersetzung referiert).

W. Nowacki.

Tavora, Elysiario: The vector area concept and the determination of the relative reticular density of lattice planes. *Anais Acad. Brasil. Ci.* **27**, 137—140 (1955).

Für ein beliebiges Tetraeder $O A_1 A_2 A_3$ (Fläche $A_1 A_2 A_3$ mit den Indizes $h_1 h_2 h_3$) gilt $S_{h_1 h_2 h_3} + S_{100} + S_{010} + S_{001} = 0$ ($S =$ „vector area“). Es wird ein Ausdruck für $S_{h_1 h_2 h_3}$, der von a_1, a_2, a_3 und h_1, h_2, h_3 abhängt, abgeleitet; desgleichen als Funktion der a_i und h_i bzw. a_i^* und h_i . *W. Nowacki.*

Ballhausen, C. J. and Chr. Klíxbüll Jørgensen: Studies of absorption spectra. X. *d*-electrons in crystal fields of different symmetries. *Danske Vid. Selsk. mat.-fys. Medd.* **29**, Nr. 14, 32 p. (1955).

Die möglichen Zustände von einem bis zu vier *d*-Elektronen in anorganischen Übergangsmetallverbindungen mit kubischer, tetragonaler und rhombischer Symmetrie werden gruppentheoretisch bestimmt und die sich daraus ergebenden Aufspaltungsbilder diskutiert. *W. Brenig.*

Lomer, W. M.: The valence bands in two-dimensional graphite. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **227**, 330—349 (1955).

Die Ein-Elektronenzustände von zweidimensionalem Graphit werden gruppentheoretisch klassifiziert und die Blochschen Eigenfunktionen für die Valenzbänder des Kristalls durch Linearkombinationen der Atomeigenfunktionen $2p_x, 2p_y$ und $2s$ ausgedrückt. Die Funktionen $2p_z$ bilden das Leitungsband. Die Energiewerte werden durch vier Überlappungsintegrale zwischen nächsten Nachbarn und vier entsprechende Hamilton-Integrale ausgedrückt. Die sich ergebende Bandstruktur ist relativ unempfindlich gegenüber Unsicherheiten in den Werten dieser Integrale und kann auch durch die Berücksichtigung weiterer Nachbarn nicht wesentlich geändert werden. Die Zustände bilden drei einander berührende Bänder, die normalerweise voll mit Elektronen besetzt sind. Die große Bandbreite von etwa 10 eV ist für die Diskussion von Röntgenuntersuchungen von Interesse. *W. Oldekop.*

Johnston, D. F.: The structure of the π -band of graphite. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **227**, 349—358 (1955).

Die Energiewerte der π -Leitungszustände des Graphits in der Nähe der Fermikante werden unter Zuhilfenahme gruppentheoretischer Betrachtungen näherungsweise aus den $2p_z$ Atomeigenfunktionen berechnet. Die Energiewerte ergeben sich aus einer 4-wertigen Funktion des *k*-Vektors. Es zeigt sich, daß die ersten 2 Bänder nahezu voll mit Elektronen besetzt sind, während die beiden übrigen Bänder nahezu leer sind. Die untere Kante des dritten „unbesetzten“ Bandes liegt jedoch etwa $4 \cdot 10^{-3}$ eV unterhalb der oberen Kante des zweiten „besetzten“ Bandes, so daß auch am absoluten Nullpunkt „freie“ Elektronen vorhanden sind. Die Energiezustände in der Umgebung der Fermikante werden teils explizit, teils tabellarisch angegeben. Mit ihrer Hilfe wird in einer nachfolgenden Veröffentlichung der Hall-Koeffizient des Graphits berechnet. *W. Oldekop.*

Howarth, D. J.: Application of the augmented plane wave method to copper. *Phys. Review, II. Ser.* **99**, 469—478 (1955).

Die Methode von M. M. Saffren und J. C. Slater [dies. Zbl. **52**, 238 (1955)] zur Bestimmung der Wellenfunktionen im periodischen Potential wird auf Cu angewandt. Als Breite des $3d$ -Bandes ergibt sich 3,9 eV. Die Zellenmethode lieferte 3,5 eV (der Unterschied erklärt sich vermutlich aus der Benutzung eines etwas anderen Potentials), die Näherung fester Bindung dagegen nur 2,7 eV. *W. Brenig.*

Allen, Leland C.: Interpolation scheme for energy bands in solids. *Phys. Review, II. Ser.* **98**, 993—996 (1955).

Die Methode der „orthogonalisierten ebenen Wellen“ zur Berechnung der Bandstruktur von Festkörpern wird so weiterentwickelt, daß es möglich wird, die Rechnungen ohne erheblichen numerischen Aufwand nicht nur wie bisher an bestimmten Symmetriepunkten der Brillouin-Zone durchzuführen, sondern auf jeden beliebigen Punkt auszudehnen. *O. Madelung.*

Fukuda, Nobuyuki and Shuichi Otake: On the multiple scattering of an electron in lattice. *Progress theor. Phys.* **13**, 110—111 (1955).

Bei der üblichen Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit von Metallen wird angenommen, daß die Streuung der Elektronen am Metallgitter auf Grund der Bornschen Näherung berechnet werden kann. Diese Annahme erscheint jedoch auf Grund der Tatsache bedenklich, daß die Zahl der Streuzentren proportional dem Quadrate der Entfernung von einem Streuzentrum anwächst, während die Intensität der gestreuten Welle mit eben diesem Quadrat umgekehrt proportional abnimmt. Verff. suchen daher den Einfluß einer Mehrfachstreuung zu berücksichtigen. Durch die Annahmen 1. daß man in der Streuwelle die Verhältnisse in der Wellenzone einsetzen kann und 2. daß jede einzelne Streuung auf Grund der Bornschen Näherung behandelt werden kann, führen die Verff. das Problem auf die Lösung der Heitler-schen Gleichung für die Strahlungsdämpfung für ein Mehrkörperproblem zurück. Eine Abschätzung zeigt, daß der Einfluß der Mehrfachstreuung beträchtlich sein dürfte.

Th. Seel.

Callaway, Joseph: Electronic energy bands in iron. *Phys. Review*, II. Ser. **99**, 500—509 (1955).

Die Methode der orthogonalisierten ebenen Wellen (C. Herring, dies. Zbl. **27**, 187) wird benutzt zur Berechnung der Energiebänder und der Valenzelektronen in Eisen. Die Resultate werden auf die Bändertheorie des Ferromagnetismus angewandt. Die Austauschspaltung der Bänder und die Tendenz zum Ferromagnetismus beim absoluten Nullpunkt werden bestimmt. (Zusammenfassg. des Verf.) *W. Brenig.*

Kambe, K.: Cohesive energy of noble metals. *Phys. Review*, II. Ser. **99**, 419—422 (1955).

Die Methode von T. S. Kuhn und J. H. van Vleck (dies. Zbl. **40**, 286) zur vereinfachten Behandlung der Zellenmethode beim periodischen Potentialproblem (Quantendefektmethode) wird auf Edelmetalle angewandt. Die Resultate sind bei Kupfer und Silber befriedigend. Bei Gold jedoch ergibt sich eine um etwa einen Faktor 2 zu kleine Bindungsenergie.

W. Brenig.

Lehman, Guy W. and Hubert M. James: Interaction of impurities and mobile carriers in semiconductors. *Phys. Review*, II. Ser. **100**, 1698—1712 (1955).

Die Arbeit gibt eine theoretische Untersuchung der Wechselwirkung zwischen beweglichen Ladungsträgern und Störstellen in Halbleitern, mit dem Ziel, die beobachtete Abnahme der Aktivierungsenergie mit wachsender Störstellenkonzentration zu erklären. Wenn auch die Theorie in vielen Punkten bisherige theoretische Ansätze übertrifft, so ist doch eine völlige Deutung der Experimente noch nicht möglich.

O. Madelung.

Lax, Benjamin and J. G. Mavroides: Statistics and galvanomagnetic effects in germanium and silicon with warped energy surfaces. *Phys. Review*, II. Ser. **100**, 1650—1657 (1955).

Der Einfluß der Anisotropie des Valenzbandes von Ge und Si auf die Statistik und die galvanomagnetischen Effekte wird in Anlehnung an die bereits für das Leitungsband dieser Halbleiter entwickelten Theorie von Meiboom und Abeles diskutiert. Die vorliegende Theorie ist allerdings auf kleine Magnetfelder und schwache Abweichung von der Isotropie beschränkt.

O. Madelung.

Low, Francis E. and David Pines: Mobility of slow electrons in polar crystals. *Phys. Review*, II. Ser. **98**, 414—418 (1955).

Die Beweglichkeit eines Polarons wird berechnet, wenn die Wahrscheinlichkeit der Streuung eines Polarons durch ein thermisches Schallquant angegeben ist. Da die Kopplung zwischen Elektron und longitudinalen Schallquanten in polaren Kristallen groß ist, kann man nicht die übliche störungstheoretische Methode der S-Matrix verwenden. Vielmehr wird der von Low (dies. Zbl. **64**, 219) entwickelte Formalismus benutzt, welcher für die Berechnung der Streuung des „angezogenen“

Teilchens geeignet ist. Als Eigenfunktion des angezogenen Teilchens wird die von Lee, Low und Pines (dies. Zbl. 53, 182) angegebene verwendet. Die Rechnung ist nur für den Grenzfall sehr kleiner Polaronen-Impulse durchgeführt. *G. Heber.*

Jones, H.: The thermoelectric power of monovalent metals. Proc. phys. Soc., Sect. A 68, 1191—1193 (1955).

Die Thermokraft der Edelmetalle Cu, Ag und Au ist positiv und verhältnismäßig klein. Aus dieser Tatsache wurde häufig auf die Ungültigkeit der üblichen Elektronentheorie in diesem Falle geschlossen. Die Arbeit zeigt, daß die Thermokraft sehr empfindlich von der Gestalt der Fermi-Fläche abhängt und daß es deswegen nicht notwendig ist, bei den erwähnten Metallen Löcherleitung anzunehmen, um das positive Vorzeichen zu erklären. *O. Madelung.*

Pines, David and Charles P. Slichter: Relaxation times in magnetic resonance. Phys. Review, II. Ser. 100, 1014—1020 (1955).

Dreyfus, Bernard: Étude des solutions des équations de résonance ferrimagnétique. C. r. Acad. Sci., Paris 241, 1270—1272 (1955).

Abel'skij, Š. Š. und V. A. Jakovlev: Zusätzlicher Widerstand von Ferromagnetika im Magnetfeld. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1955, 143—145, russ. Zusammenfassg. 145 (1955) [Ukrainisch].

Es wird der Einfluß des äußeren Magnetfeldes auf den Betrag des zusätzlichen Widerstandes von Ferromagnetika untersucht, der durch die Spin-Bahnwechselwirkung der *s*- und *d*-Elektronen bedingt ist. Ein lineares Gesetz der Abnahme des zusätzlichen Widerstandes mit der Zunahme der Größe des Magnetfeldes wird erhalten, was den experimentellen Daten nicht widerspricht. — Es wird auch die Temperaturabhängigkeit des zusätzlichen Widerstandes festgestellt, sie ist proportional zu T^3 .

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Kranendonk, J. van: Spin-deviation theory of ferromagnetism. I. General theory. Physica 21, 749—766 (1955).

Verf. beginnt mit dem Hinweis darauf, daß die viel benützte Einführung von Bose-Operatoren in den Diracschen Austauschenergie-Operator nach Holstein und Primakoff einen großen Mangel impliziert: Die Eigenfunktionen des so entstandenen Hamilton-Operators enthalten automatisch physikalisch auszuschließende Zustände, bei denen der Spin an verschiedenen Atomen größer wird als zulässig. Dieser Mangel wird wesentlich, wenn man versucht, die übliche Spinwellentheorie auf höhere Temperaturen auszudehnen. Verf. sucht diese Schwierigkeit zu vermeiden. Er gelangt dabei zu einem Modell, in dem die „falschen“ Spins als Bose-Quasiteilchen im Ortsraum betrachtet werden, zwischen denen eine gewisse Wechselwirkung existiert. Man kann dann auf dieses Modell Methoden aus der Theorie realer Gase und Flüssigkeiten anwenden. Allerdings tritt hierbei die neue Schwierigkeit auf, daß die Wechselwirkung zwischen den Quasiteilchen u. a. unendliche Terme enthält und deshalb konsequenterweise niemals weggelassen werden sollte!

G. Heber.

Keffer, Frederic: Temperature dependence of ferromagnetic anisotropy in cubic crystals. Phys. Review, II. Ser. 100, 1692—1698 (1955).

Verf. zeigt, daß die Zenersche und die van Vleck'sche Theorie dieses Gegenstandes im Grunde dasselbe Modell behandeln; die eine Theorie ist hohen, die andere tiefen Temperaturen angepaßt. *G. Heber.*

Rushbrooke, G. S. and P. J. Wood: On the high-temperature susceptibility for the Heisenberg model of a ferromagnet. Proc. phys. Soc., Sect. A 86, 1161—1169 (1955).

Verff. geben Entwicklungen von χ und $1/\chi$ nach Potenzen von T^{-1} bis zum Term $\sim T^{-5}$ an und vergleichen sie mit den entsprechenden Resultaten anderer Autoren für verschiedene Gittertypen. Die Rechenmethode ist wesentlich algebraischer Art. *G. Heber.*

Brown, H. A. and J. M. Luttinger: Ferromagnetic and antiferromagnetic Curie temperatures. Phys. Review, II. Ser. 100, 685—692 (1955).

Verff. wenden drei verschiedene Methoden zur Ermittlung der Curie-Temperaturen eines drei- und zweidimensionalen Ferro- und Antiferromagnetikums an. Es handelt sich um die von Kramers und Opechowski ausgearbeitete Methode, um die Cluster-Methode von Weiss und um eine klassische Näherung. Es werden pro Atom auch höhere Spinquantenzahlen als $1/2$ zugelassen. Der Vergleich der umfangreichen numerischen Resultate ermöglicht einige Schlüsse auf die Gültigkeitsbereiche der drei Methoden.

G. Heber.

Oguchi, Takehiko: A theory of antiferromagnetism. II. Progress theor. Phys. 13, 148—159 (1955).

(Teil I, dies. Zbl. 51, 233.) Das neue Verfahren des Verf. wird zunächst am ferromagnetischen Falle erläutert: Im Diracschen Austausch-Energie-Operator werden die Spinoperatoren zweier benachbarter Atome exakt berücksichtigt, alle anderen aber durch ihren thermodynamischen Mittelwert \bar{S} ersetzt. Dieser wird ermittelt aus der Forderung, daß der thermodynamische Mittelwert der beibehaltenen Spinoperatoren, gebildet mit dem wie oben erläutert abgeänderten Hamiltonoperator, mit \bar{S} übereinstimmt. Das ergibt eine implizite Gleichung für \bar{S} , aus der man z. B. den Curiepunkt entnehmen kann. Die Methode wird auf den Antiferromagnetismus angewandt.

G. Heber.

Kanamori, Junjiro and Kei Yosida: Note on the spin wave theory of antiferromagnetism. Progress. theor. Phys. 14, 423—434 (1955).

Verff. diskutieren den Fall, in welchem ein äußeres Magnetfeld H senkrecht zur Vorzugsachse der antiferromagnetischen Magnetisierung des Kristalles wirkt (2 Teilgitter, Wechselwirkungen nur zwischen nächsten Nachbarn, einachsige Isotropie). Klassisch betrachtet, werden die Spins dann einen gewissen Winkel $\theta(H)$ mit der Vorzugsachse des Kristalls bilden. Deshalb empfiehlt es sich, je eine neue Achse für die Richtungsquantisierung der Spins der beiden Teilgitter einzuführen, wobei θ zunächst unbestimmt bleibt. Später erweist sich θ als genau der klassische Winkel. Führt man mit diesen neuen Achsen die übliche Spinwellentheorie durch, so verschwinden einige Schwierigkeiten der älteren Spinwellentheorie dieses Objektes, die sich vor allem auf χ_{\perp} und die Resonanzfrequenzen beziehen.

G. Heber.

Syoz, Itiro and Huzio Nakano: Statistical models of ferrimagnetism. Progress theor. Phys. 13, 69—78 (1955).

Die spontane Magnetisierung gewisser einfachster idealisierter Ferrimagnetika wird exakt zurückgeführt auf die exakt berechnete spontane Magnetisierung von in bestimmter Weise zugeordneten idealisierten Ferromagnetika. Durchweg wird die Idealisierung des Ising-Modelles benutzt. Ferner sollen die betrachteten Kristallgitter in zwei Teilgitter zerfallen, deren jedes von nur einer Atomsorte besetzt wird. Die Teilgitter sollen wechselseitig alle nächsten Nachbarn enthalten. Genauer werden betrachtet: das quadratische Flächengitter und gewisse „dekorierte Gitter“, die aus beliebigen Translationsgittern entstehen, indem man in der Mitte zwischen allen Paaren nächster Nachbarn des Ausgangsgitters ein weiteres Atom anbringt. Die erhaltenen Abhängigkeiten der spontanen Magnetisierung von der Temperatur entsprechen qualitativ durchaus denen, die man mittels der Molekularfeld-Näherung berechnet hat.

G. Heber.

Wolfe, R.: The theory of the reflectivity of metals. Proc. phys. Soc., Sect. A 68, 121—127 (1955).

Verf. berechnet die Wahrscheinlichkeit der Absorption ultraroter Lichtquanten durch Elektronen an einer Metalloberfläche und schließt daraus unmittelbar auf die Absorption des Metalls. Mit den Annahmen spiegelnder bzw. diffuser Reflexion der Elektronen an der Oberfläche erhält er dieselbe Ergebnisse, die Holstein und auch Dingle [Physica 19, 311 (1953)] mit klassischer Rechnung gefunden hatten.

G. Höhler.